

SERGE ALINHAC

**Diffusion des singularités à travers une surface pour  
un opérateur hyperbolique**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1976), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1976\\_\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976___A1_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DIFFUSION DES SINGULARITES A TRAVERS UNE SURFACE POUR  
UN OPERATEUR HYPERBOLIQUE.

par

S. ALINHAC

INTRODUCTION.

Cet article étudie la propagation des singularités pour un modèle d'opérateur à caractéristiques doubles, du type  $P_+P_- + \text{reste}$ , avec  $\{P_+, P_-\} \neq 0$  sur la variété caractéristique  $P_+ = P_- = 0$  (de codimension 2). Les résultats présentés affinent, de façon quantitative (ordre des opérateurs), les résultats généraux établis en [2].

En supposant que les caractéristiques sont simples pour  $t \neq 0$ , on montre comment une singularité "pure" (mettons, de  $P_-$ ) pour  $t > 0$  "diffuse" pour  $t < 0$  en deux singularités : une de  $P_-$ , qui "fait suite" à la singularité pour  $t > 0$ , comme dans le cas de caractéristiques simples, et une de  $P_+$ , qui peut être éventuellement absente (cas d'un produit) ou atténuée.

Bien que ce travail soit prolongation de [1] et [2], on a fait une exposition auto-contenue, redémontrant en particulier le théorème de [2].

I) Position du problème ; étude d'un cas particulier.

On étudie, dans le plan  $\mathbb{R}^2$  de point courant  $(x,t)$ , l'opérateur

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(t) \frac{\partial}{\partial x}. \text{ On notera } P_{\pm} = \frac{\partial}{\partial t} \pm t \frac{\partial}{\partial x}. \text{ Bien qu'on construise dans}$$

la partie II une parametrix du problème de Cauchy sur  $t = 0$  associé à  $P$ , on s'intéresse ici plus particulièrement au problème suivant, que nous nommons "diffusion" des singularités à travers  $t = 0$ : étant donnée une solution  $u$  de  $Pu = 0$  qui, pour  $t > 0$ , n'a de singularités que dans les caractéristiques de  $P_-$ , quelles sont les singularités de  $u$  pour  $t < 0$  ?

Pour préparer l'étude générale de II, supposons d'abord  $a = \text{cte}$ . On a alors la :

Proposition 1 : Soit  $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \frac{\partial}{\partial x}$ . Supposons que  $a = -(2k+1)$  ( $k$  entier  $\geq 0$ ).

Alors une singularité "pure"  $P_-$  pour  $t > 0$  demeure "pure"  $P_-$  pour  $t < 0$  (la partie II montre d'ailleurs que c'est le seul cas).

Preuve. Supposons d'abord  $a = -1$ . Alors  $P = P_+P_-$ , et si  $Pu = P_+P_-u = 0$ ,  $P_-u$  est  $C^\infty$  pour  $t > 0$ , donc aussi pour tout  $t$ . La singularité de  $u$  se transmet donc de  $t > 0$  à  $t < 0$  le long de la caractéristique simple de  $P_-$ .

. Soit maintenant  $a = -(2k+1)$ . Comme  $[P_+, P_-] = -2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,

$P_+P_-P_- = P_-(P_+P_- - 2 \frac{\partial}{\partial x})$ , et  $P_+P_-^{k+1} = P_-^k P_+$ . Si  $Pu = 0$ ,  $P_+P_-^{k+1}u = 0$ , donc  $P_-^{k+1}u$  est  $C^\infty$  pour tout  $t$ , et  $\text{WF}(u) \subset \text{car } P_-$  pour tout  $t$ .

II) Le cas général.

Le théorème ci-dessous est un résumé des résultats établis aux points

1)  $\rightarrow$  3). La partie A reprend les résultats généraux de [2], tandis que la partie B précise quantitativement la "diffusion".

Théorème.

Soit  $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(t) \frac{\partial}{\partial x}$ , où  $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $a(0)$  réel.

A] Il existe des opérateurs  $E_{\pm} : \mathcal{E}'_{+1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

( $\mathcal{E}'_{+1}$  désigne l'espace des distributions  $u$  à support compact avec  $\text{WF}(u) \subset \{\xi > 0\}$ ) tels que :

i)  $PE_{\pm} = 0$ , modulo  $C^\infty$ .

ii) Pour tout  $t_0 > 0$ ,  $E_{\pm}$ , restreint à  $t > t_0$ , s'écrit (modulo un opérateur régularisant dépendant de  $t$ ) comme un opérateur intégral de Fourier dont la lagrangienne est décrite par la phase  $\varphi_{\pm} = (x-y) \xi \mp \frac{t^2}{2} \xi$ , et d'ordre  $m_{\pm}$ , avec :

$$m_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\operatorname{Re} a(0)}{4}$$

iii)  $E_+$  et  $E_-$  sont des solutions "indépendantes" dans le noyau de  $P$  en ce sens qu'il existe des opérateurs  $\sigma_{\pm}(D_x)$ , d'ordre 0, et  $\mu_{\pm}(D_x)$  d'ordre  $-\frac{1}{2}$ , tels que :

$$\begin{cases} E_+ \sigma_+ + E_- \sigma_- \Big|_{t=0} = \operatorname{id} & , & (E_+ \sigma_+ + E_- \sigma_-)' \Big|_{t=0} = 0 \\ E_+ \mu_+ + E_- \mu_- \Big|_{t=0} = 0 & , & (E_+ \mu_+ + E_- \mu_-)' \Big|_{t=0} = \operatorname{id} . \end{cases}$$

iv)  $E_{\pm}$  propagent "effectivement" les singularités, c'est-à-dire que si  $(x_0, +1) \in \operatorname{WF}(v)$  toute la partie de l'axe de bicaractéristique de  $P_{\pm}$  issu de  $(x_0, 0, +1, 0)$  au-dessus de  $t > 0$  est contenue dans  $\operatorname{WF}(E_{\pm} v)$ .

B] Soient  $\bar{E}_{\pm}$  les opérateurs obtenus en appliquant la partie A] du théorème pour  $t < 0$ . Il existe des opérateurs  $A(D_x)$  et  $B(D_x)$ , d'ordre zéro, tels que si  $\mathcal{V} \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{R})$ ,

$$E_- \mathcal{V} = \bar{E}_- A \mathcal{V} + \bar{E}_+ B \mathcal{V} \text{ pour } t < 0.$$

L'opérateur  $A$  est elliptique d'ordre zéro.

i) Si  $a(0)$  n'est pas un entier impair négatif,  $B$  est elliptique d'ordre 0.

ii) Si  $a(t) = -(2p+1) + O(t^k)$  (pour un entier  $p \geq 0$ , et  $k \geq 1$ ),  $B$  est un opérateur d'ordre  $-l$  pourvu que  $2l + 1 \leq k$ .

Dans les points 1)  $\rightarrow$  3) qui suivent, on fournit une preuve complète de A] et B], en passant assez vite sur les points techniques, qu'on trouvera "tels quels" dans [2].

1) Réduction asymptotique de l'opérateur P.

C'est un cas particulier de celle de [1], que nous précisons rapidement :

Proposition 1 : Soit

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(t) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Il existe des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, tangentiels,  $c(t, D_x)$  et  $d(t, D_x)$ ,  $c(0, D_x)$  elliptique, et un opérateur d'ordre 1,  $\Pi(D_x) = ia(0) D_x + \Pi_0(D_x) + \Pi_{-1} + \dots$ , tels que si  $\mathcal{V}$  est solution de l'équation

$$Q \mathcal{V} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Pi(D_x) \right) \mathcal{V} = 0, \text{ alors}$$

$$u = c\mathcal{V} + d|D_x|^{-1} \mathcal{V}'_t \text{ est solution de } P u = 0 \text{ (modulo } C^\infty \text{)}.$$

De plus, si  $a(t) = a(0) + O(t^k)$  ( $k$  entier  $\geq 1$ ), on peut choisir  $\Pi_{-\ell+1} = 0$  tant que  $2\ell + 1 \leq k$  ( $\ell \geq 1$ ).

Preuve : Pour alléger l'écriture, on travaille après transformée de Fourier en  $x$  :

$$\ddot{u} = c(t, \xi) \mathcal{V}(t, \xi) + \frac{d(t, \xi)}{\rho} \mathcal{V}'_t(t, \xi),$$

$$\text{et } \mathcal{V}'_{tt} + (t^2 \xi^2 + \Pi(\xi)) \mathcal{V} = 0. \text{ Alors}$$

$$u'' + (ia\xi + t^2 \xi^2) u = \mathcal{V} (c'' - c(\Pi - ia\xi) - 2t^2 \rho d' - 2t \rho d - 2 \frac{\Pi}{\rho} d') + \mathcal{V}' \left( \frac{d''}{\rho} + 2c' - \frac{d}{\rho} (\Pi - ia\xi) \right). \text{ On choisit } c = c_0 + c_{-1} + \dots, d = d_0 + d_{-1} + \dots \text{ et } \Pi = \Pi_1 + \Pi_0 + \dots \text{ de façon que les coefficients de } \mathcal{V} \text{ et } \mathcal{V}' \text{ soient des symboles d'ordre } -\infty.$$

$$\text{On a d'abord : } \begin{cases} 2t^2 d'_0 + 2t d_0 c_0 \left( \frac{\Pi_1}{\rho} - i \frac{a\xi}{\rho} \right) = 0 \\ 2c'_0 - d_0 \left( \frac{\Pi_1}{\rho} - ia \frac{\xi}{\rho} \right) = 0 \end{cases}$$

puis généralement, pour calculer  $c_{-p}$  et  $d_{-p}$ , le même système d'équations avec des seconds membres  $f_{-p}$  et  $g_{-p}$  (respectivement)

$$\rho f_{-p} = -c''_{p+1} + \frac{2}{\rho} (\Pi_1 d'_{-p+1} + \Pi_0 d'_{-p+2} + \dots + \Pi_{-p+2} d'_0) + (\Pi_0 c_{-p+1} + \dots + \Pi_{-p+1} c_0)$$

$$\rho g_{-p} = -d''_{-p+1} + \frac{1}{\rho} (\Pi_0 d_{-p+1} + \dots + \Pi_{-p+1} d_0).$$

En omettant provisoirement les indices  $-p$ , on pose  $td = u$  : le système devient (avec  $A = \frac{\Pi_1 - ia\xi}{\rho}$ )

$$\left\{ 2u' + \frac{A}{t} c = f/t, 2c' - \frac{A}{t} u = g. \text{ Si } w_\varepsilon = c + i\varepsilon u, \text{ on obtient :} \right.$$

$$2w'_\varepsilon + i\varepsilon \frac{A}{t} w_\varepsilon = g + i\varepsilon f/t \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

On choisit désormais  $\Pi_1$  en sorte que  $A(0) = o(\Pi_1 = ia(0)\xi)$ .

Alors  $w_\varepsilon = C \exp\left(-i \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds\right)$ , où

$C' = (g+i\varepsilon f/t) \exp\left(+i \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds\right)$ , est une solution de l'équation.

. Pour  $f=g=0$  (calcul de  $c_0, d_0$ ), on prend  $c=1$ , et

$$C_0 = \frac{W_+ + W_-}{2} = \cos \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds, \quad d_0 = \frac{-1}{t} \sin \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{A}{s}\right) ds.$$

. Sinon, on choisit  $C(0) = 0$ , étant entendu qu'on choisit  $\Pi_{-p+1}$  (calcul de  $C_{-p}, d_{-p}$ ) en sorte que  $f_{-p}(0) = 0$ , ce qui est loisible car  $C_0(0) = 1$ . Cela assure que  $d_{-p}$  est régulière.

Précisons le cas  $a(t) = a(0) + O(t^k)$  :  $\frac{A}{t} = O(t^{k-1})$ , donc  $c'_0 = O(t^{2k-1})$ ,  $u'_0 = O(t^{k-1})$

Si  $k \geq 3$ ,  $f_{-1}(0) = 0$  avec le choix  $\Pi_0 = 0$ . On a alors  $g_{-1} \pm i \frac{f_{-1}}{t} = O(t^{k-3})$ . De même, si  $g_{-p} \pm \frac{f_{-p}}{t} = O(t^k)$  et  $\Pi_0 = \dots = \Pi_{-p+1} = 0$ ,  $C_{-p} = O(t^{\ell+1})$ ,  $u_{-p} = O(t^{\ell+1})$ , donc  $f_{-p-1} = -c'_{-p} + \frac{2}{\rho} \Pi_1 d'_{-p} + \Pi_{-p} C_0 = \Pi_{-p} C_0 + O(t^{\ell-1})$ . On peut prendre  $\Pi_{-p} = 0$  si  $\ell \geq 2$ , d'où l'assertion de la proposition 1.

## 2) Forme de la solution pour $t > 0$ .

Posons  $T = t$ ,  $X = x + \frac{t^2}{2}$ . L'opérateur  $Q$  devient  $Q = \frac{\partial^2}{T} + 2T \frac{\partial^2}{\partial X \partial T} + \frac{\partial}{\partial X} + \Pi(D_X)$ .

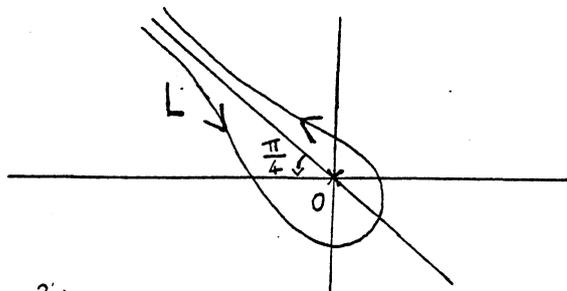
Après transformation de Fourier, et "stretching"  $s = T|\xi|^{1/2}$ , on aboutit à l'équation

$q''_{ss} + 2isq'_s \frac{\xi}{\rho} + \frac{i\xi + \Pi(\xi)}{\rho} q = 0$ . Comme on ne s'intéresse ici qu'aux singularités pour lesquelles  $\omega = +1$  ( $\xi = \rho$ ), on est amené à chercher

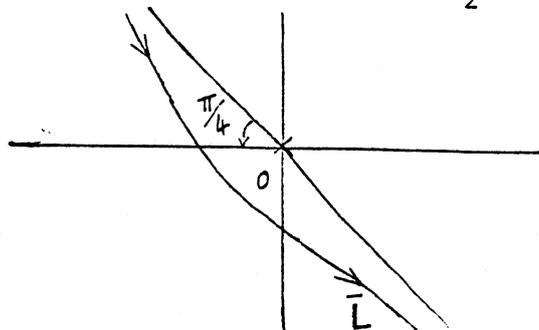
a) une base de solutions pour l'équation  $q'' + 2isq' + \mu q = 0$ . (ici,  $\mu = i + \frac{\Pi(\xi)}{\xi}$ ).

On obtient ces solutions par la méthode de Laplace, respectivement

$q(s) = \int_L e^{sz} e^{-i \frac{z^2}{4}} z^\lambda dz$ , avec  $\lambda = -1 - i/2 \mu$ , et  $L$  un contour complexe de la forme :



et  $\bar{q}(s) = \int_{\bar{L}} e^{s\bar{z}} e^{-i \frac{\bar{z}^2}{4}} \bar{z}^\lambda d\bar{z}$ , avec  $\lambda = -1 - i/2 \mu$ , et  $\bar{L}$  le contour



Étudions le comportement de ces solutions lorsque  $s \rightarrow +\infty$  :  
 Si  $\text{Re } \lambda > -1$ ,  $q(s) = 2ie^{3i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{\pi}{4}\lambda} \sin \pi \lambda \tilde{I}_\lambda(s)$ , où  $\tilde{I}_\lambda(s) = \int_0^{+\infty} e^{ste} e^{-t^2/4} t^\lambda dt$ .

En posant  $s t = \sqrt{2}\alpha$ ,  $\tilde{I}_\lambda(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{s}\right)^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{(i-1)\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{2s^2}} \alpha^\lambda d\alpha$ , la dernière intégrale écrite tend clairement vers une constante non nulle quand  $s \rightarrow +\infty$ .

Donc  $q(s) \sim cte \frac{1}{s^{\lambda+1}}$  et on "gagne un cran" de comportement en  $s$  par déviation de  $q$  :  $q'(s) \sim cte \frac{1}{s^{\lambda+2}}$ , etc (on dit que  $q$  se comporte "comme"  $\frac{1}{s^{\lambda+1}}$ ).

Si  $\text{Re } \lambda < -1$ , la formule  $\frac{\lambda}{s} q_{\lambda-1}(s) = \frac{i}{2s} q_{\lambda+1}(s) - q_\lambda(s)$  permet d'étendre le résultat précédent.

En prenant pour  $\bar{L}$  la droite d'équation  $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -1$  et en observant que

$$\bar{q}(s) = \int_{\bar{L}} e^{s^2} e^{-is^2} s^{\lambda+1} \varphi^\lambda d\varphi ; \text{ il vient}$$

$$\bar{q}(s) = s^{\lambda+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is^2} e^{-s^2 \frac{x^2}{2}} (x(1-i) - 2i)^\lambda dx (1-i). \text{ En posant}$$

$x = t/s$ ,  $\bar{q}(s) = e^{-is^2} s^\lambda (1-i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \left(\frac{t(1-i)}{s} - 2i\right)^\lambda dt$ , et le coefficient de  $e^{-is^2}$  dans l'expression de  $\bar{q}$  se comporte "comme"  $s^\lambda$ . On note  $\bar{q}(s) = e^{-is^2} \bar{q}(s)$ .

De ces comportements, on déduit en particulier que  $q$  et  $\bar{q}$  sont des solutions indépendantes (si  $\lambda$  entier  $\geq 0$ , on doit remplacer  $q$  par  $\tilde{I}_\lambda$ ).

b) En retournant aux coordonnées d'origine, on obtient que, si  $v$  et  $w$  n'ont de singularités que pour  $\xi = \rho$ ,

$$\tilde{E}_- v = \int e^{ix\xi + it^2/2\xi} q(t|\xi|^{1/2}, \xi) \hat{\mathcal{V}}(\xi) d\xi \text{ et } \tilde{E}_+ w = \int e^{ix\xi - t^2/2\xi} \bar{q}(t|\xi|^{1/2}, \xi) \hat{\mathcal{W}}(\xi) d\xi$$

Sont des solutions de  $\mathcal{O}E_\pm = 0$ .

Observons que pour  $t \geq 0$ , les fonctions  $q(t|\xi|^{1/2})$  et  $\bar{q}(t|\xi|^{1/2})$  se comportent comme des symboles  $(1/2, 1/2)$  (pour plus de précisions, voir Boutet de Monvel [3]).

Pour  $t_0 > 0$  fixé,  $q$  et  $\bar{q}$  restreints à  $t > t_0$  sont des symboles classiques  $(1,0)$  d'ordres respectifs exactement

$$m_- = -\frac{\text{Re } \lambda(\infty) + 1}{2}, \quad m_+ = \frac{\text{Re } \lambda(\infty)}{2}, \quad \text{où } \lambda(\infty) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \lambda(\xi)$$

$$= -1 - i/2 \quad \mu(\infty) = -1 - i/2 \quad i(1 + a(0)) = -1 + \frac{a(0) + 1}{2} = \frac{a(0) - 1}{2}$$

Les solutions  $\tilde{E}_- v$  et  $\tilde{E}_+ w$  ont leurs fronts d'onde contenus dans les bicaractéristiques respectivement de  $P_-$  et  $P_+$  issues des singularités des données  $v$  et  $w$ .

. D'autre part, si  $(x_0, +1) \in WF(\mathcal{V})$ , alors tout l'arc de bicaractéristique de  $P_-$  issu de  $(x_0, 0, +1, 0)$  au-dessus de  $t > 0$  est dans le front d'onde de  $\tilde{E}_- \mathcal{V}$  (de même pour  $\tilde{E}_+$ ). En effet,

$$\tilde{E}_- \mathcal{V} \Big|_{t=0} = q(0, D_x) \mathcal{V}, \quad (\tilde{E}_- \mathcal{V})'_t \Big|_{t=0} = q'_s(0, D_x) |D_x|^{1/2} \mathcal{V};$$

comme la solution  $q$  n'est pas indument nulle, l'un au moins des deux opérateurs  $q$  ou  $q'_s$  est elliptique, et donc l'une des traces de  $\tilde{E}_- \mathcal{V}$  est singulière en  $(x_0, +1)$ . Or l'on sait [1] que, dans ces conditions, l'un au moins des deux arcs issus de  $(x_0, 0, +1, 0)$  pour  $P_-$  et  $P_+$ , pour  $t > 0$ , est contenu dans le front d'onde de  $\tilde{E}_- \mathcal{V}$ . D'après le point précédent, ce ne peut être que celui de  $P_-$ .

Enfin, il est facile d'établir, compte tenu de ce que les solutions  $q$  et  $\bar{q}$  sont indépendantes, que toute solution  $U$  de  $QU = 0$  dont les traces n'ont de singularités que du type  $(x_0, +1)$  s'écrit, pour  $t > 0$ ,  $U = \tilde{E}_- \mathcal{V} + \tilde{E}_+ W$ , pour certaines  $\mathcal{V}$  et  $W$ .

### 3) Forme de la solution pour $t < 0$ .

a) Comportement de  $q(s)$  lorsque  $s \longrightarrow -\infty$ .

Posons  $s = -\sigma$ ,  $\sigma > 0$ . La fonction  $q(-\sigma)$  est encore une solution de l'équation 2.a :

$q'' + 2i\sigma q' + \mu q = 0$ . Elle s'écrit donc  $q(-\sigma) = Aq(\sigma) + B\bar{q}(\sigma)$ , où  $A$  et  $B$  sont des pseudo-différentiels d'ordre 0 à déterminer. On a, en posant

$$\delta = q'(0)\bar{q}(0) - q(0)\bar{q}'(0) \text{ (elliptique)}, \quad A\delta = -(q(0)\bar{q}'(0) + q'(0)\bar{q}(0)),$$

et  $B\delta = 2q(0)q'(0)$ .

Pour étudier l'ellipticité de  $A$  et  $B$ , on suppose que dans les expressions qui définissent  $q$  et  $\bar{q}$ ,  $\lambda$  a la valeur  $\lambda(\infty)$ , et l'on étudie la nullité des valeurs résultantes pour  $A$  et  $B$ .

. Commençons par  $B$ ; comme  $q'_\lambda(0) = q_{\lambda+1}(0)$ , on étudie  $q_\nu(0)$ . Si  $\operatorname{Re} \nu > -1$ ,

$q_\nu(0) = 2ie^{3\frac{i\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}\nu} (\sin \pi\nu) \int_0^{+\infty} e^{-t^2/4t^\nu} dt$ , et la dernière intégrale écrite qui vaut  $2^\nu \Gamma(\frac{\nu+1}{2})$ , n'est jamais nulle. Les seules valeurs pour lesquelles  $q_\nu(0) = 0$  sont  $\nu$  entier  $\geq 0$ .

Si  $\operatorname{Re} \nu \leq -1$ ,  $\nu q_{\nu-1}(0) = \frac{i}{2} q_{\nu+1}(0)$ , donc  $q_\nu(0)$  ne peut être nulle que si  $\nu$  entier.

Si  $\nu = -k$ ,  $k$  entier  $\geq 1$ ,  $q_{-k}(0) = 2\pi i \operatorname{Res}_0(z^{-k} e^{-i\frac{z^2}{4}})$  :  $q_{-k}(0) = 0 \iff k$  pair

Si maintenant  $\lambda(\infty)$  est un entier  $\geq 0$ , on a pris en fait  $\tilde{I}_\lambda$  en place de  $q$ , et alors  $B \neq 0$ .

Si  $\lambda$  est entier pair  $\leq -1$ ,  $q_\lambda(0) = 0$ , et si  $\lambda$  est entier impair  $\leq -1$ ,  $q'_\lambda(0) \neq 0$

En résumé, B elliptique  $\Leftrightarrow \lambda \neq (\text{entier} \leq -1)$ .

Voyons A. On a, si  $\text{Re } \lambda > -1$ ,  $\bar{q}_\lambda(0) = 2 i e^{-3i\frac{\pi}{4}(\lambda+1)} \sin \frac{\pi}{2}(\lambda+1) \tilde{I}_{\lambda+1}(0)$

On a alors, à un facteur non nul près,

$$q_\lambda(0) q_\lambda^{-1}(0) q_\lambda^1(0) \bar{q}_\lambda(0) = (\sin \frac{\pi \lambda}{2}) \tilde{I}_\lambda(0) \tilde{I}_{\lambda+2}(0) - i e^{-i\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi \lambda}{2} \tilde{I}_{\lambda+1}^2(0).$$

Pour  $\lambda$  réel (ce que l'on a supposé pour simplifier, mais qui ne joue vraisemblablement aucun rôle), les  $\tilde{I}_\lambda(0)$  sont réels, et le nombre écrit ne peut être nul.

$$\text{Si } \text{Re } \lambda \leq -1, \text{ on a comme plus haut } q_{\lambda-1}(0)^{-1} q_{\lambda-1}(0) + q'_{\lambda-1}(0) \bar{q}_{\lambda-1}(0) = \frac{i}{2\lambda} (q_\lambda(0) \bar{q}'_\lambda(0) + q'_\lambda(0) \bar{q}_\lambda(0))$$

Donc A ne peut être nul que si  $\lambda$  entier  $\leq -1$ . Mais ce cas est l'un de ceux où  $B = 0$ , et si par exemple  $q(0) = 0$ , nécessairement  $q'(0) \neq 0$  (car  $q \not\equiv 0$ ) et  $\bar{q}(0) \neq 0$  (car  $\delta \neq 0$ ) donc A n'est jamais nul.

b) Ordre du symbole lorsque  $\lambda(\infty) = (\text{entier} \leq -1)$ .

Supposons  $\lambda(\xi) = -2p + h(\xi)$ , h symbole d'ordre  $-r$ ,  $r \geq 1$ .

Alors grâce à cette formule,  $\lambda q_{\lambda-1}(0) = i/2 q_{\lambda+1}(0)$ , il vient  $q_\lambda(0) = \frac{(i/2)^p q_h(0)}{(h-1)\dots(h+1-2p)}$

et comme h est petit,  $\text{Re } h > -1$ ,

$q_h(0) = (\sin \pi h) \times$  (symbole elliptique d'ordre 0). Donc  $q_h(0)$  est un symbole d'ordre  $-r$ , et  $q_\lambda(0)$  aussi, donc B aussi.

Si  $\lambda = -(2p+1) + h$ ,  $q'_\lambda(0) = q_{\lambda+1}(0)$ , même conclusion.

Comme  $\lambda(\infty) = \frac{a(0) - 1}{2}$ , cette situation se produit pour  $a(0) = 1 - 2k$ ,  $k \geq 1$ , c'est-à-dire a(0) entier impair négatif.

Si alors  $\pi(\xi) = i a(0)\xi + \pi_{-2}(\xi) + \dots$ ,  $\pi_{-e}$  elliptique, alors h est elliptique d'ordre  $-2$ , et B aussi.

c) En application de la proposition 1, on pose :

$E_\pm = C \tilde{E}_\pm + d |D_x|^{-1} (\tilde{E}_\pm)'_t$ , obtenant ainsi des opérateurs vérifiant la partie A ] du théorème. Les opérateurs  $\tilde{E}_\pm = (c + d |D_x|^{-1} \frac{\partial}{\partial t}) (\tilde{E}_\pm(-t))$

Sont, modulo un opérateur elliptique d'ordre 0, les opérateurs qu'on obtient en appliquant à P la partie A ] du théorème pour le demi-plan  $t < 0$ .

De la formule  $\tilde{E}_- \mathcal{U}(x,t) = (\tilde{E}_- A(D_x) \mathcal{U})(x,-t) + (\tilde{E}_+ B(D_x) \mathcal{U})(x,-t)$  valable pour  $t < 0$ , qu'on vient d'établir en b), on déduit

$$E_- \mathcal{U} \Big|_{t < 0} = \tilde{E}_- A(D_x) \mathcal{U} + \tilde{E}_+ B(D_x) \mathcal{U}.$$

B I B L I O G R A P H I E

- [1] Alinhac S. Parametrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable.  
Astérisque n° 19, 1976
- [2] Alinhac S. Parametrix pour un système hyperbolique à multiplicité variable.  
Comm. in P.D.E., 2, 1977.
- [3] Boutet de Monvel L. Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo differential operators.  
C.P.A.M. 27, 1974

ALINHAC Serge  
44, rue Clément Perrot  
94400 VITRY