JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LOUIS BOUTET DE MONVEL

ALAIN GRIGIS

BERNARD HELFFER

Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 93-121

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____93_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.93-121

PARAMÉTRIXES D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES

par Louis Boutet de Monvel
Alain Grigis
Bernard Helffer

Dans cet article, nous nous proposons de montrer comment on peut effectuer la construction de paramétrixes pour certains opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples, du type étudié par V.Grusin [5], [6], J. Sjöstrand [17], L. Hörmander [13], A. Menikoff [15], et les auteurs [1] [2] [3] [5] [10]. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et P un opérateur pseudo-différentiel sur X, dont le symbole total admet un développement asymptotique :

$$p(x,\xi) \sim \sum_{0}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

où pour tout entier j, p_j est homogène de degré $m-j$ en ξ. Soit maintenant Σ un cône lisse, de codimension p, dans $T^*X = X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Nous dirons que P est nul d'ordre k sur Σ si pour tout j, p_j est nul d'ordre $\geqslant k-2j$ sur Σ. Nous dirons en outre que P est transversalement elliptique le long de Σ s'il est elliptique en dehors de Σ, et si, au voisinage de chaque point de Σ, le symbole $p_0(x,\xi)$ domine d_Σ^k, où d_Σ est la distance à Σ. Si P est nul d'ordre k sur Σ, il est naturel de lui associer, pour chaque point $(x,\xi) \in \Sigma$, l'opérateur

$$\sigma^k_{x,\xi}(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_j(x,\xi) \quad y^\alpha D_y^\beta$$

qui est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$, à coefficients polynomiaux, de degré total $\leqslant k$.

Nous nous appuierons de façon essentielle sur les résultats et les constructions de [1] . Dans cet article , on introduit , pour tous nombres réels m , k , une classe d'opérateurs $OPS^{m,k}$. Dans la situation ci-dessus il est naturel de se demander si P possède une paramétrixe $Q \in OPS^{-m,-k}$ (c'est le mieux qu'on puisse espérer). La réponse est la suivante : P possède une telle paramétrixe à gauche (ou à droite) si et seulement si , pour tout $(x,\xi)\in\Sigma$, l'opérateur différentiel $\sigma^k_{x,\xi}(P)$ est inversible à gauche (ou à droite) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La question de savoir si P possède une paramétrixe est donc entièrement ramenée à l'étude de l'inversibilité , à gauche ou à droite , de certains opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Ces opérateurs sont d'ailleurs d'un type assez particulier : ils sont tous dans l'algèbre engendrée par p opérateurs d'ordre 1 de la forme $\sum_k b_{jk}\, y_k + c_{jk}\, D_{y_k}$ $(j=1,..,p\ ;\ k=1,..,n)$. Naturellement le problème d'inverser de tels opérateurs est loin d'être résolu en général ; il l'est néanmoins assez complètement pour les opérateurs d'ordre 2 (cf. [5], [13]) , et pour certains opérateurs d'ordre 3 (cf. [10]).

L'article est organisé comme suit : dans les quatre premiers paragraphes , on étudie les opérateurs différentiels du type ci-dessus qui interviennent dans notre problème , et on construit une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels qui contient leurs inverses lorsque ceux-ci existent. Le plus délicat est de montrer que si un tel opérateur dépend de façon C^∞ d'un paramètre , et est inversible pour toutes les valeurs du paramètre , l'inverse dépend aussi régulièrement du paramètre (§4) . L'application à la construction de paramétrixes est faite au §5 , où l'énoncé ci-dessus sera précisé.

§1 Notations et préliminaires.

1. Nous utilisons les notations usuelles de la théorie des équations aux dérivées partielles .

Soit E un espace vectoriel réel , de dimension finie (qu'on identifiera au besoin à $\mathbb{R}^n$). On note E^* le dual de E .

On note $\mathcal{S}(E) = S^{-\infty}(E)$ l'espace de Schwartz des fonctions de classe C^∞, à décroissance rapide (si $E = \mathbb{R}^n$, on a $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si $x^\alpha D^\beta f$ est bornée , pour tous multi-indices α , β). On note $O_M(E)$ l'espace des fonctions C^∞ à croissance lente (ie. pour tout α il existe m tel que $(1+|x|)^{-m}D^\alpha f$ soit bornée) . Si m est un nombre réel , on note $S_o^m(E) \subset O_M(E)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout α , $(1+|x|)^{-m}D^\alpha f$ soit bornée , et on pose $S_o^\infty = \bigcup S_o^m$. Enfin on note $S^m(E) \subset S_o^m(E)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout α , $(1+|x|)^{-m+|\alpha|} D^\alpha f$ soit bornée , et on pose $S^\infty = \bigcup S^m$.

Nous aurons en particulier à utiliser le sous-espace $S^m_{reg} \subset S^m$ des fonctions $a \in S^m$ qui admettent un développement asymptotique :

$$(1.1) \quad a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

où a_k est homogène de degrè $m-k$ $(a_k(tx) = t^{m-k}a_k(x)$ pour $t > 0)$ de classe C^∞ pour $x \neq 0$ (développement asymptotique signifie ici que pour tout entier N , il existe $b_N \in S^{m-N}$ tel que $a-\sum_0^{N-1} a_k = b_N$ pour $|x| > 1$). Si $a \in S^m_{reg}$, le symbole (ou partie principale) de a est le premier terme a_o du développement (1.1). Enfin si Ω est ouvert de $\mathbb{R}^p$ nous écrirons $f \in S^m(\Omega x E)$ si pour tout compact $K \subset \Omega$ et tous α,β $(1+|y|)^{|\beta|-m}(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial y})^\beta f(x,y)$ est bornée dans $K \times E$.

Soit $a = a(x,\xi)$ une fonction continue sur $E \times E^*$. Si a est à croissance lente, on note $a(x,D)$ l'opérateur défini par

$$(1.2) \quad a(x,D)f = \int e^{ix.\xi}\, a(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, đ\xi$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f , et où pour abréger on a posé $đ\xi = (2\pi)^{-\dim E}\, d\xi$ (la définition de $\hat{f}$ suppose le choix d'une mesure de Lebesgue dx sur E , et $d\xi$ désigne la mesure duale ; la mesure $\hat{f}\, đ\xi$, donc aussi l'opérateur $a(x,D)$, ne dépendent pas de ce choix). Il est clair que $a(x,D)$ est un opérateur linéaire continu $\mathcal{S}(E) \to C(E)$ (espace des fonctions continues sur E)

(1.3) Proposition. - Si $a \in O_M(E \times E^*)$, $a(x,D)$ est continu de $\mathcal{S}(E)$ dans $C^\infty(E)$. Si $a \in S^\infty_o(E \times E^*)$, $a(x,D)$ est continu dans $\mathcal{S}(E)$.

preuve : on peut supposer $E = \mathbb{R}^n$. Remarquons qu'on a $D_j\, a = b(x,D)$ avec $b = \xi_j a + D_{x_j} a$, et $x_j\, a(x,D) = c(x,D)$, avec $c = x_j a$. Par récurrence on voit donc qu'on a pour tous α , β , $x^\alpha D^\beta a(x,D) = b_{\alpha\beta}(x,D)$ avec $b_{\alpha\beta} \in O_M$ (resp. S^∞_o) si $a \in O_M$ (resp. S^∞_o) . Donc si $a \in O_M$, $D^\alpha a(x,D)$ est continu : $\mathcal{S}(E) \longrightarrow C(E)$ pour tout α , donc $a(x,D)$ est continu : $\mathcal{S} \to C^\infty$ (il est en fait continu $\mathcal{S} \to O_M$) . Pour la seconde assertion , il suffit de prouver que si $a \in S^\infty_o$, $a(x,D)$ est en fait continu : $\mathcal{S} \to L^\infty$ (alors $x^\alpha D^\beta a(x,D)$ est aussi continu $\mathcal{S} \to L^\infty$ pour tous α, β , donc $a(x,D)$ est continu $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$). Supposons donc $a \in S^m_o(E \times E^*)$. Intégrant par parties dans (1.2) on obtient

$$a(x,D)f = \int e^{ix.\xi}\ (1+|x|^2)^{-N}(1-\Delta_\xi)^N(a(x,\xi)\hat{f}(\xi))\ d\!\!{}^-\xi$$

or on a , avec des constantes $c_{\alpha\beta}$ convenables

$$(1-\Delta_\xi)^N(a\hat{f}) = \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant 2N} c_{\alpha\beta}\ D^\alpha_\xi a\ D^\beta_\xi \hat{f}$$

et pour tout α , $(1+|x|+|\xi|)^{-m} D^\alpha a$ est bornée . Pour $N \geqslant m/2$, on a $(1+|x|+|\xi|)^m(1+|x|^2)^{-N}(1+|\xi|)^{-m} \leqslant 2^{m/2}$, donc il existe $C > 0$ tel que

$$|a(x,D)f| \leqslant C \sum_{|\beta|\leqslant 2N} \int (1+|\xi|)^m\ |D^\beta \hat{f}(\xi)|\ d\!\!{}^-\xi$$

Comme le second membre de cette inégalité est une norme continue sur $\mathcal{S}$, ceci achève la démonstration.

Enfin on a le résultat suivant (qui est démontré dans [4]) :

(1.4) Si $a \in S^0_o(E \times E^*)$, $a(x,D)$ se prolonge en un opérateur continu dans $L^2(E)$.

2. Nous noterons $\mathcal{G}$ l'ensemble des opérateurs différentiels ℓ sur E de la forme

$$(1.5)\quad \ell = b.x + c.D \ , \text{ avec } b \in E^* \ , \quad c \in E$$

$$\left(\text{ie.} \quad \ell f = \sum b_j x_j f + \frac{1}{i} c_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

L'opérateur $i\ell$ est générateur infinitésimal d'un groupe de transformations unitaires :

$$(1.6)\quad \exp ti\ell .f = e^{\frac{1}{2}it^2 b.c}\, e^{itb.x}\, f(x+tc)$$

(en fait $i(\mathcal{G} \oplus \mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de transformations unitaires de $\mathcal{S}$, isomorphe au groupe de Heisenberg).

On note M_p le groupe d'automorphismes linéaires de $\mathcal{S}$ qui préserve $\mathcal{G}$ (groupe métaplectique). Si $M \in M_p$, et $\ell \in \mathcal{G}$, on a

$$(1.7)\quad M \ell M^{-1} = s_M \ell$$

où s_M est un automorphisme de $\mathcal{G}$, qui préserve la forme symplectique réelle σ définie par $[\ell,\ell'] = i\,\sigma(\ell,\ell')\,\mathrm{Id}$.

On sait (cf. [14], [16], [18]) que M_p est engendré par les constantes ($f \mapsto \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$) , les changements de variable linéaires ($f \mapsto f(g^{-1}x)$, avec $g \in GL(E)$) , les multiplications $f \mapsto e^{iQ} f$, où Q est une forme quadratique réelle sur E , et la transformation de Fourier . C'est un groupe de Lie , qui a pour générateurs infinitésimaux les opérateurs du second ordre de la forme

$$i(\lambda + \sum a_{jk} x_j x_k + b_{jk}(x_j D_k + D_k x_j) + c_{jk} D_j D_k)$$

où λ est une constante complexe , et les a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} sont réels)

L'application $M \mapsto s_M \in Sp(\mathcal{G})$ est un homomorphisme de groupes , surjectif , de noyau $\mathbb{C}^*$.

§2. Classes d'opérateurs pseudo-différentiels.

1. Définitions.

Soient E , N deux espacesvectoriels réels de dimension finie , et soit L une application linéaire $E \times E^* \to N$. On pose

$$(2.1)\quad L(x,\xi) = Bx + C\xi \qquad \text{si } x \in E \ , \ \xi \in E^*$$

$$A = C\,{}^tB \in L(N^*,N)$$

Si a est une fonction à croissance lente sur N , on notera a_L l'opérateur $a(L(x,D))$: on a donc

$$(2.2)\quad a_L f = \int e^{ix.\xi}\, a(L(x,\xi))\, \hat{f}(\xi)\, d\!\!{}^-\xi$$

Il est clair qu'on a $a \circ L \in O_M$ (resp. S_o^m) si $a \in O_M$ (resp. si $a \in S_o^m$, et si $m \geqslant 0$) . Par suite a_L est continu : $\mathcal{S}(E) \to C^\infty(E)$ si $a \in O_M$, continu $\mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E)$ si $a \in S_o^\infty$, et se prolonge continument : $L^2(E) \to L^2(E)$ si $a \in S_o^o$.

Si $a = e^{iy.\eta}$ (avec $\eta \in N^*$) , on a , d'après la formule d'inversion de Fourier :

$$(2.3)\quad a_L f = \int e^{ix.\xi} e^{ix.{}^tB\eta} e^{i\xi.{}^tC\eta}\, \hat{f}(\xi)\, d\!\!{}^-\xi = e^{ix.{}^tB\eta} f(x+{}^tC\eta) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}iA\eta.\eta} \exp(i\,{}^tL\eta)\, f$$

Donc de façon générale on a , si $a \in O_M$

$$(2.4)\quad a_L = \int \exp(i\,{}^tL\eta)\; e^{-\frac{1}{2}iA\eta.\eta}\, \hat{a}(\eta)\, d\!\!{}^-\eta$$

Dans ces formules , ${}^tL\eta$ désigne l'opérateur différentiel ${}^tB\eta.x + {}^tC\eta.D \in \mathcal{G}$. Il convient d'interprêter la derniére intégrale comme valeur de la distribution $\hat{a}(\eta)d\!\!{}^-\eta$ sur la fonction à valeurs vectorielles $\eta \mapsto e^{-\frac{1}{2}iA\eta.\eta} \exp(i\,{}^tL\eta) \in L(\mathcal{S},C^\infty)$.

Il est alors naturel d'introduire aussi l'opérateur

$$(2.5)\quad \rho(a,L) = \int \exp(i\,{}^tL\eta)\, \hat{a}(\eta)\, d\!\!{}^-\eta = b_L$$

avec $\quad \hat{b} = e^{\frac{1}{2}iA\eta\cdot\eta}\ \hat{a}$

Remarquons que si Q est une forme quadratique réelle , e^{iQ} est un multiplicateur de $\hat{O}_M$ ($= O'_c$, espace de Schwartz des convoluteurs) donc avec les notations ci-dessus on a $b \in O_M$ si $a \in O_M$. (On peut montrer que $\hat{S}^{\infty}_o$ est le dual de O_M , donc e^{iQ} est aussi un multiplicateur de $\hat{S}^{\infty}_o$, et on a $b \in S^{\infty}_o$ si $a \in S^{\infty}_o$.)Enfin si $a \in S^m$ (resp. S^m_{reg}) il est immédiat qu'on a $b \in S^m$ (resp. S^m_{reg}) , et b admet le développement asymptotique

$$b \sim \sum \frac{1}{n!} (\tfrac{1}{2}iAD.D)^n\, a = \exp(\tfrac{1}{2}iAD.D)\, a$$

(où on a posé $AD.D = \sum A_{jk} D_j D_k$)

2. Adjoints.

Si $\ell \in \mathcal{G}$, on a $(\exp i\ell)^* = \exp -i\ell$. Comme on a aussi $\overline{\hat{a}(\eta)} = \hat{\bar{a}}(-\eta)$, on déduit aussitôt de la définition (2.5) qu'on a $\rho(a,L)^* = \rho(\bar{a},L)$. De même on voit qu'on a $a^*_L = b_L$, avec $\hat{b} = \exp(iA\eta.\eta)\ \hat{\bar{a}}$, donc $b \in O_M$ (resp. S_o , S^m , S^m_{reg}) s'il en est de même de a ; dans les deux derniers cas b admet le développement asymptotique

$$(2.6)\quad b \sim \sum \frac{1}{n!} (iAD.D)^n\, \bar{a}$$

On voit aussi que si $a \in S^{\infty}_o$ (et en particulier si $a \in S^m$) , a_L^* est aussi continu $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, donc a_L se prolonge continument : $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$.

3. Composés.

Si $a = e^{iy.\eta}$ et $b = e^{iy.\eta'}$, avec $\eta, \eta' \in N^*$, on a d'après (2.3)

$$a_L b_L f = e^{ix.{}^tB\eta}\, e^{i\langle x+{}^tC\eta,\, {}^tB\eta'\rangle}\, f(x+{}^tC\eta+{}^tC\eta') = c_L f$$

avec

$$c = e^{i\,{}^tC\eta.{}^tB\eta'}\, e^{i\langle y,\eta+\eta'\rangle} = a(y+A\eta)\, b = a\, b(y+{}^tA\eta)$$

On en déduit aussitôt , dans le cas général , qu'on a $a_L b_L = c_L$

avec

$$(2.7) \quad c = \int e^{iy\cdot\eta}\, a(y+A\eta)\, \hat{b}(\eta)\, đ\eta = \int e^{iy\cdot\eta}\, b(y+{}^tA\eta)\, \hat{a}(\eta)\, đ\eta$$

Cette relation est vraie si a , $b \in \mathcal{S}$, donc aussi à la limite si $a \in O_M$, $b \in S_o^\infty$ ou $a \in S_o^\infty$, $b \in O_M$. En particulier si $a \in S^m$ et $b \in S^{m'}$, on a $c \in S^{m+m'}$, et c admet le développement asymptotique

$$(2.8) \quad c \sim \sum \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\, D^\alpha a \quad (AD)^\alpha b$$

(obtenu en intégrant dans (2.7) le développement de Taylor $a(y+A\eta) \sim \sum i^{|\alpha|}/\alpha!\ D^\alpha a(y)\ (A\eta)^\alpha$.)

Remarquons que la formule (2.7) est un cas particulier de (2.2) , avec $E = N$, $B = Id$, $C = A$. Dans ce cas nous noterons plus simplement a_A l'opérateur correspondant . On a donc

$$(2.9) \quad a_L\, b_L = (a_A\, b)_L \qquad , \quad a_A\, b_A = (a_A\, b)_A$$

La formule (2.7) définit sur $S^\infty(N)$ une structure d'algèbre , associative (puisqu'elle correspond à la composition des opérateurs), que nous noterons $\mathcal{L}_A$. La deuxième égalité de (2.7) montre encore que l'algèbre opposée de $\mathcal{L}_A$ est $\mathcal{L}_{{}^tA}$; en particulier $\mathcal{L}_A$ est commutative si (et seulement si) $A = {}^tA$.

4. Transformations métaplectiques.

Si $M \in M_p$, et $\ell \in \mathcal{G}$ (§1.2) on a $M \exp i\ell\, M^{-1} = \exp i s_M \ell$. En particulier si $\eta \in N^*$ on a $M \exp i\,{}^tL\eta\, M^{-1} = \exp i\,{}^t(L\,{}^ts_M)\eta$,d'où

$$(2.10) \quad M\, \rho(a,L)\, M^{-1} = \rho(a, L_o{}^t s_M)$$

On peut toujours choisir $M \in M_p$ de sorte que $s_M{}^tL.N^*$ soit le sous-espace de $\mathcal{G}$ engendré par $x_1,\dots,x_{p+q},D_1,\dots,D_p$ (avec $2p+q$ = le rang de L , $2p$ = le rang de la restriction à ${}^tL\, N^*$ de la forme symplectique de $\mathcal{G}$). Lorsqu'il en est ainsi , il sera commode de noter la variable de E (x,y,z) , avec $x = (x_1,\dots x_p)$, $y = (x_{p+1},\dots,x_{p+q})$, $z = (x_{p+q+1},\dots,x_n)$. Tout opérateur a_L s'écrit alors , d'une seule façon :

(2.11) $a_L f = b(x,y,D_x)f = \int e^{ix.\xi}\, b(x,y,\xi)\, \hat{f}(\xi,y,z)\, đ\xi$

où $\hat{f}$ désigne ici la transformée de Fourier partielle de f par rapport à x, et où $b \in O_M$ (resp. S_o^m, S^m) si $a \in O_M$ (resp. S_o^m, S^m). Dans la situation ci-dessus, nous dirons que a_L a été mis sous forme réduite.

§3 Paramétrixes et inverses.

On conserve les notations du §2. Soit $a \in S^m_{reg}(N)$: on dit que a est elliptique si son symbole est inversible (cette définition se généralise aussitôt au cas où a est une matrice à coefficients dans S^m_{reg}). Il résulte aussitôt de (2.8) que si a est elliptique, il possède une paramétrixe, ie. il existe $b \in S^{-m}$ tel que $a \circ b - 1 \in S^{-\infty}(N)$ et $b \circ a - 1 \in S^{-\infty}(N)$ (où le produit $\circ$ est celui de l'algèbre $\mathcal{L}_A$, défini par la formule (2.7)).

Nous nous proposons de trouver des critères pour que a_L soit inversible, ou pour que a_A soit inversible (ie. que a soit inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$). Remarquons que si L est <u>surjective</u>, l'application $a \mapsto a_L$ est injective, et a_L possède un inverse de la forme b_L (avec $b \in S^{\infty}$) si et seulement si a est inversible dans $\mathcal{L}_A$. Dans toute la suite nous supposerons L surjective (celà suffira pour l'application que nous avons en vue).

1. Cas où L est bijectif.

On se ramène aussitôt au cas où $N = E \times E^*$, $L = Id$. C'est le cas étudié par V.V.Grusin [6] ; on a alors $a_L = a(x,D)$, et le noyau de a_L est la distribution $b(x,x-y)$, où $b(x,z)$ a pour transformée de Fourier partielle par rapport à z la fonction $a(x,\xi)$. En particulier le noyau de a_L est dans $\mathcal{S}(E\times E)$ (ie. a_L est continu de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$) si et seulement si $a \in S^{-\infty}$; a_L est alors en fait un opérateur compact de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.

Par suite si $a \in S^m$ est elliptique, $Ker(a_L)$ est de dimension finie, contenu dans $\mathcal{S}$, et $Im(a_L)$ est fermée de codimension finie (orthogonale à $Ker(a_L^*)$. Si $Ker\, a_L = Ker\, a_L^* = 0$, a_L est inversible , d'inverse b_L avec $b \in S^{-m}$ ($b-b' \in S^{-\infty}$ si b' est une paramétrixe de a).

Terminons par l'observation suivante : si $r \in S^{-\infty}$, et si $(1+r_L)$ est inversible dans $L^2(E)$, l'inverse est de la forme $1+s_L$ avec $s_L = -r_L + r_L^2 + r_L s_L r_L$, donc $s \in S^{-\infty}$. L'ensemble U des $r \in S^{-\infty}$ tels que $(1+r_L)$ soit inversible est donc ouvert (en fait ouvert pour la topologie induite par celle de $\mathrm{End}(L^2)$) , et l'application $r \mapsto s = (1+r)^{-1} - 1$ est holomorphe: $U \to \mathrm{End}(L^2)$, donc aussi $U \to U$.

2. <u>Cas général</u> .

Nous supposons désormais que L n'est pas bijectif , mais nous continuons de le supposer surjectif. Quitte à transmuer par un élément $M \in M_p$ convenable , on peut supposer que L est l'application $(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n) \mapsto (x_1,\dots,x_{p+q},\xi_1,\dots,\xi_p) = (x,y,\xi)$ (cas réduit)

(3.1) <u>Théorème</u>.- (<u>On suppose</u> L <u>surjectif</u>) <u>Soit</u> $a \in S^m(N)$, <u>elliptique : les assertions suivantes sont équivalentes</u>

(i) a <u>est inversible dans l'algèbre</u> $\mathcal{L}_A$

(ii) a_L <u>est inversible dans</u> $\mathcal{S}(E)$

(ii)bis a_L <u>est inversible dans</u> $\mathcal{S}'(E)$

(iii) (<u>on suppose</u> a_L <u>mis sous forme réduite</u> : $a(x,y,D_x)$) - <u>pour tout</u> $y \in \mathbb{R}^q$, <u>l'opérateur</u> $a_y = a(x,y,D_x)$ <u>est inversible dans</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ (<u>ou</u> $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$).

Il est clair que l'assertion (i) implique toutes les autres. Si $q = 0$, on est essentiellement dans le cas traité au n°1 : il est clair que dans ce cas (i) et (iii) sont équivalents ; d'autre part si $a(x,D_x)$ n'est pas inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$, a ou a^* n'est pas injectif et il existe $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ telle que $a(x,D)\varphi = 0$ ou $a(x,D)^*\varphi = 0$; alors pour toute $\psi = \psi(z)$ $(z=(x_{p+1},\dots,x_n))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-p})$, on a $a_L(\varphi(x)\psi(z)) = 0$ ou $a_L^*(\varphi(x)\psi(z)) = 0$, de sorte que a_L n'est pas inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ni dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Nous supposons désormais $q > 0$. Prouvons que (iii) implique (i). De toute façon a possède une paramétrixe $b' \in S^{-m}(\mathbb{R}^{2p+q})$. Par hypothèse pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, $a_y = a(x,y,D_x)$ est inversible , et d'après le n°1 , l'inverse est de la forme $b_y = b(x,y,D_x)$, avec $b_y - b'_y \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$. Nous allons prouver qu'on a en fait $b-b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$

ce qui implique bien sûr $b \in S^{-m}(\mathbb{R}^{2p+q})$. Pour celà nous utiliserons les résultats du n°1 , et les observations suivantes :

-si $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, l'application $y \mapsto r_y$ se prolonge en une application de classe C^∞ , nulle d'ordre infini à l'infini , de $\mathbb{S}^q = \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$ dans l'espace de Fréchet $S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$. Inversement si U est un ouvert de $\mathbb{S}^q$, et ρ une application de classe C^∞ , nulle d'ordre infini à l'infini : $U \to S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$, pour tout compact $K \subset U$ il existe $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ telle que $r_y = \rho_y$ pour $y \in K$.

-si $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et $b' \in S^{m}(\mathbb{R}^{2p+q})$, on a $r \circ b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et $b' \circ r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ (le produit est celui de l'algèbre $\mathcal{L}_A$).

Il s'agit donc de prouver qu'au voisinage de chaque point de $\mathbb{S}^q = \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$, l'application $y \mapsto b_y - b'_y$ est de classe C^∞ (nulle d'ordre infini à l'infini le cas échéant) , à valeurs dans $S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$.

Posons $b' \circ a = 1 + r$: pour y assez grand , r_y est petit , donc $1 + r_y$ est inversible , d'inverse $1 + s_y$, où $s_y \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$ est fonction holomorphe de r_y d'après le n°1 . En vue de ce qui précède , il existe un voisinage U de l'infini , et $s' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ tel que $(1+r_y)\circ(1+s'_y) = 1$ pour $y \in U$. On a alors , pour $y \in U$, $b_y = (1+s'_y)\circ b'_y$, donc $b-b' = s \circ b'$, et comme $s \circ b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ ceci démontre notre assertion au voisinage de l'infini.

Soit maintenant $y_o \in \mathbb{R}^q$ (à distance finie). On a $b_{y_o} - b'_{y_o} \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$ et il existe $\rho \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ tel que $\rho_{y_o} = b_{y_o} - b'_{y_o}$. On a alors $(b'+\rho)\circ a = 1 + r''$, avec $r'' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, $r''_{y_o} = 0$; r''_y est petit au voisinage de y_o , et comme ci-dessus il existe $s'' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et un voisinage U_o de y_o tels que $(1+s''_y)\circ(1+r''_y) = 1$ pour $y \in U_o$. Pour $y \in U_o$, on a $b = (1+s'')\circ(b'+\rho)$, donc $b-b' = s''\circ b'+(1+s'')\circ\rho$ et comme $s''\circ b' + (1+s'')\circ\rho \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, ceci démontre notre assertion au voisinage de y_o , et achève la démonstration.

Prouvons maintenant que chacune des assertions (ii) implique (iii) Remarquons que a_y est un opérateur d'indice fini , indépendant de y donc nul (puisque a_y est inversible pour y assez grand comme on vient de voir). Supposons qu'il existe un point $y_o \in \mathbb{R}^q$ tel que a_y ne soit pas inversible : on a donc $\ker a_y \neq 0$ et $\ker a_y^* \neq 0$ et il existe $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ (non nulle) , telle que $a_{y_o}\varphi = 0$. Alors si δ_{y_o} désigne la mesure de Dirac au point y_o sur $\mathbb{R}^q$, on a pour toute $\psi = \psi(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-p-q})$ $a_L(\varphi(x)\,\delta_{y_o}\,\psi(z)) = 0$, de sorte que a_L n'est pas injectif (donc pas inversible) dans $\mathcal{S}'$. De même

a_L^* n'est pas inversible dans $\mathcal{S}'$, et a_L n'est pas inversible dans $\mathcal{S}$.

Plus généralement soit a une matrice à coefficients dans $S^m(N)$, elliptique à gauche (resp. à droite). En appliquant le théorème à l'opérateur $a_L^* a_L$ (resp. $a_L a_L^*$), on voit que a possède un inverse à gauche (resp. à droite), qui est une matrice à coefficients dans $S^{-m}(N)$, si et seulement si a_L est inversible à gauche (resp. à droite) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Lorsque a_L est mis sous forme réduite : $a_L = a(x,y,D_x)$, ceci équivaut encore, compte tenu du n°1, à l'assertion suivante : pour tout $y \in \mathbb{R}^q$ l'opérateur a_y est injectif (resp. surjectif) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ (ou dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$).

Nous complétons le théorème par le résultat suivant, qui vaut pour les opérateurs de degré positif :

(3.2) <u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> a <u>une matrice à coefficients dans</u> $S^m(N)$, <u>elliptique à gauche</u>. <u>On suppose</u> $m \geqslant 0$ (<u>et</u> L <u>surjectif). Alors</u> a <u>admet un inverse à gauche à coefficients dans</u> $S^{-m}(N)$ <u>si et seulement s'il existe une constante</u> $c > 0$ <u>telle que pour toute</u> $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\text{(ii)ter} \quad \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\, \|a_L\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

En effet si a admet un inverse à gauche b à coefficients dans $S^{-m}(N)$, b_L est de degré négatif donc continu dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique (ii)ter dès que c est plus grand que la norme de b_L dans $\mathrm{End}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Inversement, supposons que a n'est pas inversible à gauche. Nous pouvons supposer a_L mis sous forme réduite : $a_L = a(x,y,D_x)$, et d'après ce qui précède, il existe $y_o \in \mathbb{R}^q$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ tels que $a_{y_o} \cdot \varphi = 0$. Soit alors $\psi_k(y,z)$ une suite de fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^{n-p}$, telles que le support de ψ_k tende vers (y_o,z_o) (où z_o est un point arbitraire de $\mathbb{R}^{n-p-q}$), qu'on ait $\psi_1 = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} \psi_k$ pour $k \geqslant 1$, et qu'on ait, pour tout k $\int |\psi_k(y,z)|^2\, dy\, dz = 1$. On a alors

$$a_L(\varphi(x)\, \psi_k(y,z)) = \psi_k(y,z)\, a_L(\varphi(x)\, \psi_1(y,z)) .$$

Or $a_L(\varphi\, \psi_1) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est nul pour $y = y_o$, donc $a_L(\varphi\psi_k)$ tend vers 0 en norme quadratique lorsque $k \to \infty$. Comme la norme de $\varphi\psi_k$ est constante (égale à $\int_{\mathbb{R}^p} |\varphi(x)|^2\, dx \neq 0$), ceci contredit l'inégalité (ii)ter .

Remarquons qu'il peut arriver que a soit elliptique (à droite et à gauche) , et que a_L ait un inverse à gauche sans avoir d'inverse à droite : c'est le cas de l'opérateur $D_x + ix$ (sur $\mathbb{R}$).

Le théorème (3.1) permet de ramener l'étude de l'inversibilité de a_L à la même étude , dans le cas où L est bijectif (n°1) . Dans ce cas l'étude est plus facile (a_L est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si $\ker a_L = 0$ (resp. $\ker a_L^* = 0$)) mais est loin d'être complète ; elle l'est néanmoins dans le cas où a est un polynôme de degré $\leqslant 2$ (cf. [5] , [13]).

§4 Introduction de paramètres.

1. Position du problème.

Nous nous interessons maintenant à ce qui se passe lorsque L et le symbole a dépendent d'un paramètre $\lambda \in \Sigma$, où Σ est une variété de classe C^∞ . Nous supposons donc $L \in C^\infty(\Sigma, L(E \times E^*, N))$, et comme au §2 nous posons $L(x,\xi) = Bx + C\xi$, $A = C\,{}^tB$ (donc $A \in C^\infty(\Sigma, L(N^*, N))$). Si $a \in S^m(\Sigma \times N)$, a_L désigne la famille d'opérateurs définis par (2.2) . Pour $\lambda \in \Sigma$, on pose $L_\lambda = L(\lambda)$, $a_\lambda(y) = a(\lambda, y)$ (donc $a_\lambda \in S^m(N)$) , et on note a_L^λ l'opérateur correspondant .

Plusieurs des constructions du §2 marchent encore. En particulier si $a \in S^\infty(\Sigma \times N)$, a_L définit un opérateur linéaire continu sur $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$, et c'est à cet opérateur que nous nous interessons plus particulièrement. Si $a \in S^m(\Sigma \times N)$, $b \in S^{m'}(\Sigma \times N)$, on a $a_L\, b_L = c_L$ où $c \in S^{m+m'}(\Sigma \times N)$ est encore donné par la formule (2.7) et admet le développement asymptotique (2.8).

La formule (2.7) définit encore une structure d'algèbre sur $S^\infty(\Sigma \times N)$, que nous noterons toujours $\mathcal{L}_A$; $a \mapsto a_L$ est donc une représentation de $\mathcal{L}_A$ dans $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$.

Si $a \in S^m_{reg}(\Sigma \times N)$ est elliptique , il possède une paramétrixe, ie. il existe $b \in S^{-m}_{reg}(\Sigma \times N)$ tel que $b \circ a - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ et $a \circ b - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (où le produit est celui de $\mathcal{L}_A$).

Nous désirons un critère pour que a_L soit inversible dans $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$: ce sera le cas si a est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$.

Le critère ci-dessous est un critère d'inversibilité dans $\mathcal{L}_A$; on y suppose L <u>surjectif</u> (ie. L_λ est surjectif pour tout λ). Il s'applique en particulier à la loi d'algèbre de $\mathcal{L}_A$ elle-même (qui est un cas particulier de (2.7) , avec $E = N$, $L = (Id, A)$, donc L est surjectif)

Si L n'est pas surjectif - ou plutôt si le rang de L n'est pas constant-, le critère ci-dessous ne s'applique plus : il se peut que a_L ait un inverse b_L sans que a soit inversible dans $\mathcal{L}_A$, et aussi que a_L soit inversible pour une valeur du paramètre sans être inversible pour les valeurs voisines . La difficulté pour le critère ci-dessous vient de ce que , même si L est surjectif (ou de rang constant) , le rang de la restriction à ${}^tL(N^*)$ de la forme symplectique de $\mathcal{G}$ peut varier : il n'est en général pas possible de trouver $M \in M_p$, dépendant régulièrement du paramètre , et permettant de se ramener à la forme réduite du §2.4 .

(4.1)<u>Théorème</u>.- <u>Avec les notations ci-dessus , on suppose</u> L <u>surjectif , et</u> $a \in S^m_{reg}(\Sigma \times N)$ <u>elliptique</u>.

(i) <u>Si</u> a_L^λ <u>est inversible en un point</u> λ_0 , <u>il est inversible au voisinage de</u> λ_0 .

(ii) <u>Si</u> a_L^λ <u>est inversible pour tout</u> $\lambda \in \Sigma$, a <u>est inversible dans l'algèbre</u> $\mathcal{L}_A$, <u>d'inverse</u> $b \in S^{-m}_{reg}(\Sigma \times N)$.

Il y a un résultat analogue pour les systèmes (matrices) : si a est une matrice rectangulaire , elliptique à gauche (resp. à droite) et si a est inversible à gauche (resp. à droite) en un point , il l'est au voisinage de ce point ; si a est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ , a admet un inverse à gauche (resp. à droite) , qui est une matrice à coefficients dans $S^{-m}(\Sigma \times N)$.

Pour démontrer le théorème , remarquons que comme a est elliptique , il possède une paramétrixe $b' \in S^{-m}(\Sigma \times N)$: on a donc $b' \circ a - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. Si en outre a_L est inversible en un point λ_0 , l'inverse est de la forme $(b_{\lambda_0})_{L\lambda_0}$, avec $b_{\lambda_0} \in S^{-m}(N)$, et on a $b_{\lambda_0} - b'_{\lambda_0} \in S^{-\infty}(N)$; si alors on pose $b'' = b' + b_{\lambda_0} - b'_{\lambda_0}$, on a $b'' \circ a = 1 + r$, avec $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, $r_{\lambda_0} = 0$. Comme L est surjectif et $r_{\lambda_0} = 0$, r_λ est petit au voisinage de λ_0, donc $(1+r_L^\lambda)$ est inversible dans L^2 , et $(1+r_\lambda)$ inversible au voisinage de λ_0, ce qui démontre l'assertion (i).

Supposons maintenant a_L inversible pour tout $\lambda \in \Sigma$: l'inverse est alors de la forme b_L^λ , où b est une fonction sur $\Sigma \times N$, et $b_\lambda \in S^{-m}(N)$ pour tout λ . Il s'agit de prouver qu'on a $b \in S^{-m}(\Sigma \times N)$ (autrement dit b_λ dépend de façon C^∞ de λ). Remarquons qu'avec les notations ci-dessus , si $(1+r_\lambda)$ est inversible pour $\lambda \in U \subset \Sigma$, on a, pour $\lambda \in U$, $b_\lambda = (1+r_\lambda)^{-1} \circ b''_\lambda$, donc $b_\lambda - b''_\lambda = s_\lambda \circ b''$ si $(1+r_\lambda)^{-1} = (1+s_\lambda)$. La deuxième assertion du théorème résultera donc du lemme suivant :

(4.2)<u>Lemme</u>.- <u>Avec les notations ci-dessus , soit</u> $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. <u>Si</u> $(1+r_\lambda)$ <u>est inversible pour tout</u> $\lambda \in \Sigma$, <u>l'inverse est de la forme</u> $(1+s_\lambda)$, <u>avec</u> $s \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$.

Le reste du § est consacré à la démonstration de ce lemme.

2. <u>Preuve du lemme 4.2</u> .

Nous travaillerons uniquement avec l'algèbre $\mathcal{L}_A$. Nous supposerons $\Sigma = \mathbb{R}^p$, $N = \mathbb{R}^q$, et noterons (A_{jk}) la matrice de A . On a les formules suivantes :

$$(4.3)\quad \begin{aligned} D_{y_j}(a \circ b) &= (D_{y_j} a) \circ b + a \circ (D_{y_j} b) \\ y_j (a \circ b) &= (y_j a) \circ b - \sum_k a \circ (A_{jk} D_{y_k} b) \\ D_{\lambda_i}(a \circ b) &= (D_{\lambda_i} a) \circ b + a \circ (D_{\lambda_i} b) + \sum_{j,k} \frac{\partial A_{jk}}{\partial \lambda_i} (D_{y_j} a \circ D_{y_k} b) \end{aligned}$$

Ces formules résultent aussitôt de (2.7) , en remarquant que $\eta_j \hat{b}(\eta)$ est la transformée de Fourier de $D_{y_j} b$. Elles sont valables pour a , $b \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (donc aussi , à la limite , pour a , $b \in S^\infty$).

Pour la suite , nous aurons besoin d'une suite particulière de normes sur $\mathcal{S}(N) = S^{-\infty}(N)$: on pose $H = (|y|^2 + |D_y|^2)^{\frac{1}{2}}$ (H admet pour fonctions propres les fonctions de Hermite :

$$h_\alpha(y) = \prod_{j=1}^{q} (\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\alpha_j} \alpha_j!)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j\right)^{\alpha_j} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}$$

la valeur propre correspondante est $(2|\alpha| +1)^{\frac{1}{2}}$). Pour tout $z \in \mathbb{C}$

l'opérateur H^z est défini par $H^z(h_\alpha) = (2|\alpha|+1)^{\frac{1}{2}z} h_\alpha$; c'est un opérateur continu sur $\mathcal{S}$, qui dépend de façon holomorphe de z . On note E_s le domaine de H^s dans L^2 , et on pose

(4.3) $\|f\|_{E_s} = \|H^s f\|_{L^2}$

(c'est une norme , qui ne dépend que de Re s).

Dans les assertions qui suivent , on oublie (provisoirement) le paramètre.

(4.5)Lemme.- Pour tout $k > \frac{1}{2} \dim N$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|a \circ b\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{L^2} \|b\|_{E_k}$$

En effet on a $a_\circ b = \int e^{iy\cdot\eta} a(y+A\eta) \hat{b}(\eta)\, d\eta$

Or pour tout $\eta \in N^*$, on a $\|e^{iy\cdot\eta} a(y+A\eta)\|_{L^2} = \|a\|_{L^2}$, d'où $\|a_\circ b\|_{L^2} \leqslant \|a\|_{L^2} \int |\hat{b}(\eta)|\, d\eta$. Mais pour $k > \frac{1}{2} \dim N$, on a , avec une constante C convenable , $\int |\hat{b}(\eta)|\, d\eta \leqslant C \|b\|_{E_k}$.

Utilisant l'autre égalité de (2.7) , on obtient , avec la même constante C :

$$\|a \circ b\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{E_k} \|b\|_{L^2} .$$

(4.6)Corollaire.- On a $\|a_\circ b\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$ si $0 \leqslant j \leqslant k$.

Soient en effet $a , b \in S^{-\infty}(N)$, et considérons la fonction holomorphe $F(z) = (H^{j-kz}a)_\circ(H^{kz-j}b)$. C'est une fonction holomorphe de z , bornée (dans L^2 et même dans $\mathcal{S}$) pour $0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1$.

Pour $\mathrm{Re}\, z = 0$, on a

$$\|F(z)\|_{L^2} \leqslant C \|H^j a\|_{L^2} \|H^{-j}b\|_{E_k} = \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$$

et pour $\mathrm{Re}\, z = 1$, on a

$$\|F(z)\|_{L^2} \leqslant C \|H^{k-j}a\|_{E_k} \|H^{j-k}b\|_{L^2} = C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$$

En vertu du théorème des trois droites de Hadamard , on a donc aussi

$$\|F(z)\|_{L^2} \leqslant C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}} \quad \text{si } 0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1$$

et pour $z = j/k$ on obtient l'assertion du corollaire .

(4.7) Corollaire.- Pour tout entier $k > \frac{1}{2}\dim N$, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de k, $\dim N$, et pas de A) telle que $\|a \circ b\|_{E_k} \leqslant C\,(1+\|A\|)^k \,\|a\|_{E_k} \|b\|_{E_k}$.

En effet si k est entier $\geqslant 0$, la norme $\|a\|_{E_k}$ est équivalente à la norme $\sum_{|\alpha+\beta|\leqslant k} \|x^\alpha D^\beta a\|_{L^2}$. Or il résulte de (4.3) qu'on a

$$x^\alpha D^\beta (a \circ b) = \sum_{\substack{\alpha'\leqslant\alpha \\ \beta'\leqslant\beta}} (-1)^{|\alpha'|} \binom{\alpha}{\alpha'}\binom{\beta}{\beta'} (x^{\alpha-\alpha'} D^{\beta-\beta'} a) \circ ((AD)^{\alpha'} D^{\beta'} b)$$

d'où, avec des constantes C, C' convenables :

$$\|a \circ b\|_{E_k} \leqslant C' \sum_{|\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''|\leqslant k} \|A\|^{|\alpha''|} \|x^{\alpha'} D^{\beta'} a\|_{E_{k-|\alpha'+\beta'|}} \|D^{\alpha''+\beta''} b\|_{E_{k-|\alpha''+\beta''|}} \leqslant$$

$$\leqslant C\,(1+\|A\|)^k \,\|a\|_{E_k} \|b\|_{E_k} .$$

Nous choissons maintenant un entier $k_0 > \frac{1}{2}\dim N$, et pour tout entier M et tout compact $K \subset \Sigma$, nous définissons une semi-norme sur $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ par

$$(4.8) \qquad \|a\|_M^K = \sum_{2|\alpha|+j=M} \sup_{\lambda\in K} \|D_\lambda^\alpha a\|_{E_{k_0+j}}$$

Comme les normes $\|a\|_{E_k}$, $k \in \mathbb{N}$, forment une suite fondamentale de semi-normes de $\mathcal{S}$, les semi-normes $\|a\|_M^K$, lorsque M parcourt $\mathbb{N}$, et K l'ensemble des compacts de Σ, forment une famille fondamentale de seminormes de $S^{-\infty}(\Sigma\times N)$.

(4.9) Proposition.- Pour tout M, et pour tout compact $K \subset \Sigma$, il existe une constante C_M telle que

$$\|a \circ b\|_M^K \leqslant C_M \sum_0^M \|a\|_j^K \,\|b\|_{M-j}^K$$

En effet, c'est vrai pour $M = 0$ (puisque $(1+\|A\|)^k$ est borné dans K). On démontre alors aisément l'assertion, par récurrence sur M, en remarquant que la semi-norme $\|a\|_M^K$ est équivalente à la semi-norme

$$\|a\|_{M-1}^K + \sum_j \|y_j a\|_{M-1}^K + \|D_{y_j} a\|_{M-1}^K + \sum_i \|D_{\lambda_i} a\|_{M-2}^K$$

et en utilisant les formules (4.3) pour majorer les normes des fonctions $D_{y_j}(a\circ b)$, $y_j(a \circ b)$, $D_{\lambda_i}(a\circ b)$. Nous laissons les détails au lecteur.

Pour tout entier M, et pour tout compact $K \subset \Sigma$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $C_j \leq \alpha^j C_o$ pour $0 \leq j \leq M$ (où les C_j sont les constantes de la proposition (4.9)). Si alors on pose

$$N_M(a) = \sum_{0}^{M} C_o \alpha^{-j} \|a\|_j^K T^j$$

la proposition (4.9) implique qu'on a

$$N_M(a_\circ b) \ll N_M(a)\, N_M(b)$$

(où le signe $\ll$ signifie que pour tout j, le coefficient de T^j dans le membre de gauche est plus petit que le coefficient de T^j dans le membre de droite).

(4.10)<u>Corollaire</u>.- <u>Soit</u> $a \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, <u>soit</u> U <u>un ouvert relativement compact de</u> Σ, <u>et supposons</u> $C_o \|a\|_o^U < 1$. <u>Alors la série géométrique</u> $\sum_1^\infty a^j$ <u>converge dans</u> $S^{-\infty}(U \times N)$

(a^j désigne la puissance j-ième de a dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$).
En effet pour tout M on a

$$N_M(\sum_1^\infty a^j) \ll \sum_1^\infty N_M(a)^j = N_M(a)\,(1-N_M(a))^{-1}$$

(la deuxième série est convergente, puisque son terme constant est de valeur absolue < 1). Ainsi la série $\sum_{j=1}^\infty \|a^j\|_k^U$ converge pour tout $k \leq M$, donc pour tout k puisque M est arbitraire, ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme(4.2) : soit $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, et supposons que pour tout $\lambda \in \Sigma$, $(1+r_\lambda)$ est inversible. Soit $\lambda_0 \in \Sigma$: il existe $s \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ tel que $(1+s_{\lambda_0})_\circ(1+r_{\lambda_0}) = 1$. On a donc $(1+s)_\circ(1+r) = 1+\rho$, avec $\rho \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ $\rho_{\lambda_0} = 0$. Comme ρ_λ est petit au voisinage de λ_0, il existe un voisinage U de λ_0 tel qu'on ait $C_o\|\rho\|_o^U < 1$. Alors $(1+\rho_\lambda)$ est inversible dans U, d'inverse $1+\sigma_\lambda$, avec $\sigma = \sum(-\rho)^j \in S^{-\infty}(U \times N)$. On a donc $(1+r)^{-1}|_U - 1 = (1+\sigma)_\circ(1+s) - 1 \in S^{-\infty}(U \times N)$. Ceci peut être répété au voisinage de chaque point de Σ, et achève la démonstration.

§5 Constructions de paramétrixes d'opérateurs à caractéristiques multiples.

1. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (le résultat de ce paragraphe se généralise aisément au cas où X est une variété de classe C^∞, mais pour les calcls qui suivent il est commode de fixer une fois pour toutes le système de coordonnées). Soit $P = p(x,D)$ un opérateur pseudo-différentiel sur X, de degré m. Nous supposons que le symbole total p admet un développement asymptotique :

$$(5.1) \qquad p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

où p_j est homogène de degré $m-j$ (autrement dit $p \in S^m_{reg}$) (pour les calculs qui suivent, j pourrait aussi bien parcourir l'ensemble des demi-entiers positifs : $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$)

Il est commode d'introduire l'opérateur différentiel à coefficients séries formelles de T :

$$(5.2) \qquad \sigma^\infty_{x,\xi}(P) = \sum_{j,\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_j(x,\xi)\, T^{|\alpha+\beta|+2j}\, y^\alpha D_y^\beta$$

Il est clair qu'on a $\sigma^\infty(P+Q) = \sigma^\infty(P) + \sigma^\infty(Q)$ si P et Q sont de même degré, et il est classique qu'on a $\sigma^\infty(P_\circ Q) = \sigma^\infty(P)_\circ \sigma^\infty(Q)$ ($P_\circ Q$ étant considéré comme opérateur de degré $\deg P + \deg Q$).

2. Soit $\Sigma \subset T^*X \setminus \{0\} = X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ un cône lisse, de codimension p. Nous dirons (comme dans [1]) que P est nul d'ordre k sur Σ (k entier positif), et écrirons $P \in \mathcal{N}^{m,k}$ (ou $p \in \mathcal{N}^{m,k}$) si pour tout j, p_j est nul d'ordre $\geq k-2j$ sur Σ (il n'y a pas de condition pour $j \geq k/2$) ; de façon équivalente : $\sigma^\infty_{x,\xi}(P)$ est divisible par T^k pour tout point $(x,\xi) \in \Sigma$. Il est commode d'introduire

$$(5.3) \qquad \sigma^k_{x,\xi}(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_j(x,\xi)\, y^\alpha D_y^\beta$$

de sorte qu'on a $\sigma^\infty_{x,\xi}(P) = \sigma^k_{x,\xi}(P)\, T^k \mod. T^{k+1}$ si $(x,\xi) \in \Sigma$; donc si $P \in \mathcal{N}^{m,k}$ et $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$, on a $\sigma^{k+k'}_{x,\xi}(P_\circ Q) = \sigma^k_{x,\xi}(P)_\circ \sigma^{k'}_{x,\xi}(Q)$.

3. Le développement de Taylor $T_k(P)$

Pour les propriétés locales des symboles et des opérateurs, il sera commode d'introduire, dans un voisinage conique d'un point $(x,\xi)\in\Sigma$, un système de coordonnées

$$(5.4)\quad u=(u_1,\dots,u_p)\quad,\quad v=(v_1,\dots,v_{2n-p})$$

où les u_i (resp. v_j) sont C^∞, homogènes de degré 0 (resp. 1, et non toutes nulles), de sorte que, au voisinage de (x,ξ), Σ soit défini par le système d'équations $u = 0$. Dans toute la suite les lettres u, v représentent un tel système de coordonnées.

Si $P = p(x,D)\in\mathcal{N}^{m,k}$, il existe un polynôme unique

$$(5.5)\quad T_k(P) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(v)\,u^\alpha \quad\text{, avec } a_\alpha(v) \text{ homogène de degré } m-\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}|\alpha|$$

tel que $p-T_k(P)$ soit nul d'ordre $k+1$ sur Σ, au voisinage de x,ξ. On obtient ce polynôme en ne retenant dans le développement de Taylor de $p\sim\sum p_j$ le long de Σ que les termes dominants, c'est à dire semi-homogènes de poids $m-\frac{1}{2}k$ lorsqu'on attribue à v le poids 1 et à u le poids $-\frac{1}{2}$ (cf. [1]).

4. L'opérateur P_Σ.

Soit $P\in\mathcal{N}^{m,k}$. On sait d'après [1] qu'il existe (au voisinage de chaque point $(x,\xi)\in\Sigma$) un opèrateur différentiel unique

$$(5.6)\quad P_\Sigma = \sum a_{\alpha\beta}(v)\;u^\alpha\,D_u^\beta$$

où $a_{\alpha\beta}$ ne dépend que de v, et est homogène de degré $m-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}|\beta|$, tel que pour tout $Q\in\mathcal{N}^{m',k'}$ on ait

$$(5.7)\quad T_{k+k'}(P\circ Q) = P_\Sigma\,T_{k'}(Q)$$

(l'unicité d'un tel opérateur est immédiate; l'éxistence et la construction de P seront repris et précisés ci-dessous)

Il est clair que P_Σ et $\sigma^k(P)$ ne dépendent que de $T_k(P)$. Pour $k = 0$, P_Σ et $\sigma^k(P)$ sont simplement l'opérateur de multiplication par la constante $p_o(x,\xi)$.

5. Lien entre $T_k(P)$, $\sigma^k(P)$, et P_Σ .

Décomposons les champs de vecteurs $\partial/\partial x_s$, $\partial/\partial\xi_s$ en partie transverse et partie tangente à Σ au voisinage d'un point $(x,\xi)\in\Sigma$:

$$(5.8)\quad \partial/\partial x_s = \sum_j B_{js}(v)\ \partial/\partial u_j + r_s$$

$$\partial/\partial\xi_s = \sum_j C_{js}(v)\ \partial/\partial u_j + \rho_s$$

où les B_{js} , C_{js} sont des fonctions qui ne dépendent que de v , et pas de u , et les r_s , ρ_s sont tangents à Σ , donc

$$(5.9)\quad B_{js} = \partial u_j/\partial x_s\,|_\Sigma \qquad \text{(homogène de degré } 0)$$

$$C_{js} = \partial u_j/\partial\xi_s\,|_\Sigma \qquad \text{(homogène de degré } -1)$$

Nous noterons encore $E = \mathbb{R}^n$ (variable y) , et $N = \mathbb{R}^p$ (variable u ; on peut identifier canoniquement N au fibré tangent normal de Σ). Nous noterons aussi

(5.10) $B : E \to N$ l'opérateur de matrice (B_{js})

$C : E^* \to N$ l'opérateur de matrice (C_{js})

$L = (B + C) : E \times E^* \to N$

$A = C\ {}^tB : N^* \to N$

On a donc

$$(5.11)\quad A_{jk} = \sum_s C_{js}\ B_{ks}$$

Soit U_j l'opérateur $u_j(x,D)\in\mathcal{N}^{0,1}$ (la fonction u_j est seulement définie au voisinage de (x,ξ) , et il convient plutôt de considérer U_j comme opérateur pseudo-différentiel opérant sur les micro-fonctions définies au voisinage de (x,ξ)). On a

$$(5.12)\quad \sigma^1(U_j) = \sum_s \partial u_j/\partial x_s\ y_s + \partial u_j/\partial\xi_s\ D_{y_s} = \sum_s B_{js}\ y_s + C_{js}\ D_{y_s}$$

$$= (u_j)_L$$

D'autre part soit $Q \in \mathcal{N}^{m,k}$, de symbole total $q(x,\xi)$. Le symbole total de $U_j \circ Q$ a pour développement asymptotique :

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha u_j \quad D_x^\alpha q$$

Pour le calcul de $T_{k+1}(U_j Q)$ on peut bien sûr remplacer q par $T_k(Q) = b$, et on constate aussitôt que seuls les termes avec $|\alpha| \leqslant 1$ ont une contribution non nulle. Enfin on peut remplacer D_{x_s} par sa partie transverse à Σ (formule (5.8)), et on obtient en fin de compte

$$T_{k+1}(U_j Q) = T_{k+1}(u_j b + \sum_s \partial u_j/\partial\xi_s \; D_{x_s} b) = u_j b + \sum_{k,s} C_{js} B_{ks} \; D_{u_k} b$$

Finalement, puisque $A_{jk} = \sum_s C_{js} B_{ks}$, on a

(5.13) $$(U_j)_\Sigma = u_j + \sum_k A_{jk} \; D_{u_k} = (u_j)_A$$

Nous pouvons maintenant énoncer le lien qui existe entre P_Σ, $\sigma^k(P)$, et le développement de Taylor $T_k(P)$:

(5.14)<u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, <u>et</u> $a = T_k(P)$. <u>On a</u>

$$P_\Sigma = a_A \quad , \quad \sigma^k(P) = a_L \qquad (\S 2 \text{ , formules (2.2),(2.9)}).$$

preuve: nous venons de démontrer cette assertion lorsque P est l'un des U_j, et bien sûr elle est vraie pour $k = 0$. Soient maintenant $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$. Posons $a = T_k(P)$, $b = T_{k'}(Q)$, $c = T_{k+k'}(PQ)$, et supposons $P = a_A$, $Q = b_A$, $\sigma^k(P) = a_L$ et $\sigma^{k'}(Q) = b_L$. On a alors

$$c = P_\Sigma \; b = a_A \; b$$

$$(PQ)_\Sigma = P_\Sigma Q_\Sigma = a_A \; b_A = (a_A \; b)_A = c_A \quad \text{(d'après (2.9))}$$

$$\sigma^{k+k'}(PQ) = \sigma^k(P) \; \sigma^{k'}(Q) = a_L \; b_L = (a_A \; b)_L = c_L \quad \text{(d'après (2.9))}$$

Dans le cas général, si $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, on peut toujours écrire P sous la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \; U_1^{\alpha_1} \ldots U_p^{\alpha_p}$$

où A_α est de degré $\leq m-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}|\alpha|$ (donc $A_\alpha \in \mathcal{N}^{m-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}|\alpha|,0} \subset \mathcal{N}^{m,k-|\alpha|}$) Comme l'assertion est vraie pour les U_j , et pour les A_α (k=0) , elle l'est aussi pour P .

6. Dans [1] on a introduit les classes de symboles $S^{m,k}$ et $\mathcal{H}^m = \bigcap S^{m-j,-2j}$, et les opérateurs pseudo-différentiels correspondants ($OPS^{m,k}$, $OP\mathcal{H}^m$). D'après [1] , on a $a \in S^{m,k}$ si $a \in S^m$ en dehors de Σ , et si tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait , pour tous α, β , et pour $|v| \geq 1$, avec des constantes $c_{\alpha\beta}$ convenables :

$$(5.15) \quad \left|\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^\beta a\right| \leq c_{\alpha\beta} \; |v|^{m-|\beta|}\left(|u| + |v|^{-\frac{1}{2}}\right)^{k-|\alpha|}$$

Aussi d'après [1] (5.2) , on a $h \in \mathcal{H}^m$ si et seulement si $h \in S^{-\infty}$ en dehors de Σ , et si tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait , pour tous α, β , γ , et pour $|v| \geq 1$, avec des constantes $c_{\alpha\beta\gamma}$ convenables :

$$(5.16) \quad \left|u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^\gamma h\right| \leq c_{\alpha\beta\gamma} \; |v|^{m-|\gamma|+\frac{1}{2}|\beta|-\frac{1}{2}|\alpha|}$$

Comme $h \in S^{-\infty}$ hors de Σ , on peut , quitte à le tronquer , supposer qu'il est nul pour $|u| > 1$. On a alors $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (au voisinage d'un point de Σ , on identifie Σ à $\mathbb{R}^{2n-p}$ (variable v) , et N à $\mathbb{R}^p$ (variable u). ; et on attribue aux variables u et v de nouveaux poids : respectivement 1 et 0 , comme au §4). La condition (5.16) se réécrit alors comme suit :

(5.17) <u>Soit</u> $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, <u>nulle pour</u> u <u>assez grand . On pose</u> $h_\lambda(v,u) = h(\lambda v, \lambda^{-\frac{1}{2}}u)$. <u>Alors</u> $h \in \mathcal{H}^m$ <u>si et seulement si l'ensemble des</u> $\lambda^{-m} h_\lambda$, $\lambda \geq 1$, <u>est borné dans</u> $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$.

Soit maintenant $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, et $Q \in OPS^{m',k'}$ (resp. $OP\mathcal{H}^{m'}$) , de symboles totaux $p(x,\xi)$, $q(x,\xi)$. On a $PQ \in OPS^{m+m',k+k'}$ (resp. $OP\mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k}$) , et le symbole total r de PQ admet encore le développement asymptotique :

$$r \sim \sum \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha} p \quad D_x^{\alpha} q \quad .$$

Utilisant le fait qu'on a $u^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial u})^{\beta}(\frac{\partial}{\partial v})^{\gamma} q \in S^{m'-|\gamma|,k+|\alpha|-|\beta|}$ (resp. $\mathcal{H}^{m'-|\gamma|+\frac{1}{2}|\beta|-\frac{1}{2}|\alpha|}$) on constate aisément qu'on a

(5.18) $r - P_{\Sigma}\, q \in S^{m+m',k+k'+1}$ (resp. $\mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}$)

et P_{Σ} est bien sûr le seul opérateur différentiel de la forme (5.6) qui ait cette propriété .

(5.19)<u>Remarque</u>.- Les mêmes constructions que ci-dessus peuvent aussi être effectuées pour étudier la multiplication à droite par P : il existe un opérateur P'_{Σ} unique , de la forme (5.6) , tel que pour tout $Q \in OPS^{m',k'}$ (resp. $OP\mathcal{H}^{m'}$) on ait ,

(5.18)bis $r - P'_{\Sigma}\, q \in S^{m+m',k+k'}$ (resp. $\mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}$)

q désignant le symbole total de Q , et r celui de QP .

Si $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$, la classe de $Q_{\circ}P$ mod. $OPS^{m+m',k+k'+1}$ est complètement déterminée par le développement de Taylor $T_{k+k'}(QP)$, et si $T_k(P) = a$, $T_{k'}(Q) = b$, on a d'après ce qui précède

$$T_{k+k'}(Q_{\circ}P) = Q_{\Sigma}\, a = b_A\, a = a\, t_A\, b \quad \text{(d'après (2.7))}$$

On a donc de façon générale $P'_{\Sigma} = a\, t_A$. Il est alors clair que P'_{Σ} est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si P_{Σ} est inversible à droite (resp. à gauche) , puisque c'est la multiplication à droite par $a = T_k(P)$ dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$.

7. <u>Constructions de paramétrixes</u>.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème que nous avons en vue : soit $P \in \mathcal{N}^{m,k}$. Nous supposons P transversalement elliptique le long de Σ , ie. P est elliptique (de degré m) en dehors de Σ , et tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait (avec $c > 0$ convenable)

(5.20) $$|p_o(x,\xi)| \geqslant c\ |\xi|^m\ |u|^k \quad .$$

De façon équivalente : P est elliptique de degré m hors de Σ, et $a = T_k(P)$ est elliptique de degré k en chaque point de Σ.

Cette définition se généralise aussitôt au cas des systèmes (ie. P est une matrice à coefficients dans $\mathcal{N}^{m,k}$) : nous dirons que P est transversalement elliptique à gauche (resp. à droite) s'il est elliptique à gauche (resp. à droite) en dehors de Σ, et si $a = T_k(P)$ est elliptique à gauche (resp. à droite) en chaque point de Σ.

(5.21) Théorème.- Soit P un système d'opérateurs pseudo-différentiels, de degré m, nul d'ordre k sur Σ, transversalement elliptique à gauche (resp. à droite) le long de Σ. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P possède une paramétrixe à gauche (resp. à droite) $Q \in OPS^{-m,-k}$.

(ii) P_Σ est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ.

(iii) $\sigma^k(P)$ est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ.

(iv) Pour tout point $(x,\xi) \in \Sigma$, il existe $C > 0$ tel qu'on ait, pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\|\psi\|_{L^2} \leqslant C\,\|\sigma^k(P).\psi\|_{L^2}$ (resp. la même assertion pour l'adjoint $\sigma^k(P)^*$).

(v) Pour toute distribution f, $Pf \in H^s_{loc}$ implique $f \in H^{s+m-\frac{1}{2}k}_{loc}$ (resp. la même assertion pour P^*)

(pour la dernière assertion, nous supposons P propre, de sorte que Pf est bien définie, sans restriction sur le support de f).

Il est clair que l'assertion (i) implique toutes les autres (en particulier la dernière, parceque la paramétrixe $Q \in OPS^{-m,-k}$, qu'on peut toujours choisir propre, est continue $H^s_{loc} \to H^{s+m-\frac{1}{2}k}_{loc}$). Par ailleurs, si $a = T_k(P)$, on a, avec les notations ci-dessus, $P_\Sigma = a_A$, $\sigma^k(P) = a_L$. Or a est elliptique à gauche (resp. à droite), et L est surjectif (car les différentielles $du_j = \sum_s B_{js}\, dx_s + C_{js}\, d\xi_s$ sont linéairement indépendantes) ; l'équivalence de (ii), (iii), (iv) résulte donc du théorème3.1 et de la proposition3.2. Reste à prouver que (ii) implique (i), et que (v) implique (iv).

Nous commençons par prouver l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) pour une paramétrixe à droite (l'éxistence d'une paramétrixe à gauche se traite de façon complètement analogue grâce à la remarque (5.19)). Nous nous appuyons sur les résultats de [1] , en particulier la proposition(6.1) et les résultats d'éxistence de symboles ayant un développement asymptotique donné ([1], §1). Remarquons pour commencer que le problème est local , car si P possède une paramétrixe à droite , de classe $OPS^{-m,-k}$, au voisinage de chaque point de $T^*X \setminus 0$, elle en possède une globalement , comme on voit aussitôt par partition de l'unité.

Remarquons maintenant qu'il éxiste $Q_1 \in OPS^{-m,-k}$ tel que $P\,Q_1 = Id - R_1$, avec $R_1 \in OPS^{-\frac{1}{2},-1}$ (par exemple : puisque p_o est transversalement elliptique à droite , on a

$$(p_o\, p_o^* + |\xi|^{2m-k}\, Id)^{-1} \in S^{-2m,-2k}$$

d'après [1], §1 , et on peut prendre $Q_1 = q_1(x,D)$, avec $q_1(x,\xi) = p_o^*\,(p_o\, p_o^* + |\xi|^{2m-k} Id)^{-1}$)).

D'après [1] , §1 , il existe Q_2 tel qu'on ait , pour tout entier N , $Q_2 - \sum_{j<N} (R_1)^j \in OPS^{-\frac{1}{2}N,-N}$. On a alors $PQ_1Q_2 = Id - R_2$, avec $R_2 \in OP\mathcal{H}^o = \bigcap OPS^{-\frac{1}{2}N,-N}$.

Notons r_2 le symbole total de R_2 , tronqué de façon qu'il soit nul pour $|u| < 1$ comme plus haut. Comme $P_\Sigma = a_A$ est inversible à droite en tout point de Σ , le théorème(4.1) affirme que P_Σ possède un inverse à droite de la forme b_A , avec $b \in S^{-k}(\Sigma \times N)$, b_A est continu sur $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, et par raison d'homogénéité on a $b_A(h_\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}k-m}(b_A(h))_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$, et tout $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. En particulier il résulte de (5.17) qu'il existe un opérateur de Hermite $Q_3 \in OP\mathcal{H}^{\frac{1}{2}k-m}$ tel que le symbole total q_3 de Q_3 coïncide avec $b_A r_2$ pour $|u| < 1$; on a alors $P\,Q_3 - R_2 \in OP\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$ (puisque $P_\Sigma\, q_3 = r_2$ pour $|u| < 1$, et d'après (5.18)). On a donc

$$P\,(Q_1Q_2 + Q_3) = Id - R_3$$

avec $R_3 \in OP\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$. Finalement R_3 est de degré < 0 , et il éxiste un opérateur $Q_4 \sim \sum_0^\infty (R_3)^j$ (on a $Q_4 - Id \in OP\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}$) . Si on pose $Q = (Q_1Q_2 + Q_3)\,Q_4$, on a bien $Q \in OPS^{-m,-k}$, et $PQ \sim Id$.

Montrons enfin l'implication (v) $\Rightarrow$(iv) (cf. aussi [13]). D'après L. Hörmander [12] , l'assertion (v) a la conséquence suivante : pour tout compact $K \subset X$, il existe $C > 0$ tel que pour $x \in K$ et $|\xi| > 1$ on ait , pour toute $\psi \in C_o(\mathbb{R}^n)$:

$$|\xi|^{-k} \|\psi\|^2_{L^2} \leqslant C \Big(\|P_{N,x,\xi}\psi\|^2_{L^2} + |\xi|^{-N} \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant N} \int |y^\alpha D_y^\beta \psi(y)|^2 \, dy \Big)$$

où on a posé

$$P_{N,x,\xi} = \sum_{|\alpha+\beta|<N} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p(x,\xi)\ |\xi|^{-m-\frac{1}{2}|\alpha|+\frac{1}{2}|\beta|}\ y^\alpha D_y^\beta$$

Appliquons ceci au point $(x,\lambda\xi)$, avec $(x,\xi)\in\Sigma$, $|\xi| = 1$, $\lambda \to \infty$, en choisissant $N = k+1$. On voit aussitôt que $\lambda^{\frac{1}{2}k} P_{N,x,\lambda\xi}$ tend vers $\sigma^k_{x,\xi}(P)$ pour $\lambda \to \infty$, et on obtient donc à la limite (puisque λ^{k-N} tend vers 0)

$$\|\psi\|^2_{L^2} \leqslant C \|\sigma^k_{x,\xi}(P).\psi\|^2_{L^2}$$

ce qui implique (iv) d'après la proposition3.2 .

Comme on a dit , le théorème3.1 facilite l'étude de l'inversibilité d'un opérateur différentiel de la forme a_L , mais celle-ci est loin d'être complète en général. Elle l'est néanmoins lorsque a est un polynôme elliptique du second degré (cf. [5], [13]) , et le critère de [5] ou [13] se traduit en le résultat suivant (qui généralise le résultat de [5] parceque la restriction à Σ de la forme symplectique canonique de T^*X n'a plus besoin d'être de rang constant , et qui précise le résultat de [13] en affirmant l'éxistence d'une paramétrixe d'un type particulier) :

Soit $P \in \mathcal{N}^{m,2}$ (ie. nul d'ordre 2 sur Σ) , transversalement elliptique le long de Σ . On suppose que le symbole principal p_o prend (localement) ses valeurs dans un angle (strictement convexe) $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Notons Q la matrice hessienne de p_o (identifiée à une forme bilinéaire symétrique) , et A la matrice fondamentale de p_o (définie par $Q(u,v) = \sigma(u,Av)$, où σ est la forme symplectique canonique de T^*X) : en tout point de Σ , les valeurs propres de A sont de la forme $\pm 2i\lambda_k$ $(k=1,\dots,n)$, avec $\lambda_k \in \Gamma$. Soit d'autre part $V = \ker A^{2n}$ le sous-espace spectral de A relatif à la valeur propre 0 , et $I_2(P) = p_1 - (1/2i)\sum_1^n \partial^2 p_o/\partial x_j \partial\xi_j$ le symbole sous principal (p_o , p_1 sont les deux premiers termes dans le développement asymptotique $p \sim p_o + p_1 + \dots$ du symbole total de P) . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P possède une paramétrixe bilatère $Q \in OPS^{-m,-2}$

(ii) Pour tout $(x,\xi) \in \Sigma$, tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, et tout vecteur complexe $v \in V$, on a

$$\sum_1^n (2\alpha_j+1)\lambda_j + Q(v,\bar{v}) + I_2(P) \neq 0$$

(iii) $Pf \in H^s_{loc}$ implique $f \in H^{s+m-1}_{loc}$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOUTET DE MONVEL L. : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27, 585-639 (1974).

[2] BOUTET DE MONVEL L. et TRÈVES F. : On a class of pseudodifferential operators with double characteristics. Inventiones Math. 24, 1-34,(1974).

[3] BOUTET DE MONVEL L. et TRÈVES F. : On a class of systems of pseudodifferential equations with double characteristics. Comm. Pure Appl. Math. 27, 59-89 (1974).

[4] CALDERON A.P. et VAILLANCOURT R. : On the boundedness of pseudodifferential operators. J. Math. Soc. Japan 23, 374-378 (1971).

[5] GRIGIS A. : Hypoellipticité et paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles. Astérisque, ce vol.

[6] GRUSIN V.V. : On a class of hypoelliptic operators. Mat. Sbornik 83, 456-473 (1970) et Math. USSR Sbornik 12, 458-476 (1970).

[7] GRUSIN V.V. : Pseudodifferential operators in R^n with bounded symbols. Funkt. Anal. i evo pril. 43, 37-50 (1970), et Funct. Anal. Appl.4, 202-212 (1970).

[8] GUILLEMIN V. : Symplectic spinors and partial differential equations. C.R. Colloque sur la géométrie symplectique, Aix en Provence,1974.

[9] GUILLEMIN V. : A symbol calculus for Hermite operators, à paraître.

[10] HELFFER B. : Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples. A paraître dans J. Math. Pures Appl.

[11] HELFFER B. : Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels. A paraître dans Ann. Inst. Fourier.

[12] HÖRMANDER L. : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. A.M.S. Proc. Symp. Pure Math. 10, 138-183 (1967).

[13] HÖRMANDER L. : A class of pseudodifferential operators with double characteristics. Math. Ann. 217, 165-188 (1975).

[14] LERAY J. : Solutions asymptotiques et groupe symplectique. Fourier Integral Operators. Lecture Notes in Math. 459, Springer Verlag.

[15] MENIKOFF A. : Subelliptic estimates for pseudodifferential operators with double characteristics. Preprint.

[16] SEGAL I.E. : Transforms for operators and symplectic automorphics over a locally compact abelian group. Math. Scand. 13, 31-43 (1963).

[17] SJÖSTRAND J.:Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics. Ark. för Mat. 12, 85-130 (1974).

[18] WEIL A. : Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math. 111, 143-211 (1964).

L.BOUTET DE MONVEL
Université de Grenoble
B.P.116
38402 Saint Martin d'Hères

A.GRIGIS
Mathématiques - Bâtiment 425
Université de Paris XI
91405 Orsay

B.HELFFER
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91120 Palaiseau