JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES ROLLAND

Théorème d'indice pour une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 311-340

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____311_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.311-340

THÉORÈME D'INDICE POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES FORTEMENT DÉGÉNÉRÉS SUR LA FRONTIÈRE.

par

Jacques ROLLAND

0. INTRODUCTION.

On se propose d'étudier des problèmes aux limites dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, associés à des opérateurs $L(x,D_x)$, elliptiques à l'intérieur, dégénérés sur le bord Γ de cet ouvert, le bord étant caractéristique.

Lorsque les opérateurs sont du type de Fuchs les problèmes aux limites associés ont été étudiés par plusieurs auteurs (voir par exemple : [1], [2], [16], [15], [17], [18], [5], [7],...).

On s'intéresse ici à l'étude des problèmes aux limites associés à des opérateurs $L(x;D_x)$ qui dégénèrent sur le bord en un opérateur du type de Fuchs, c'est-à-dire des opérateurs de la forme $L(x,D_x) = L_1(x,D_x + L_2(x,D_x)$ avec :

$$L_1(x,D_x) = \sum_{h=0}^{m-r-1} P^{m-h}(x,D_x)\ \{\varphi^{k+q(m-r-h)}(x)\}.$$

$$L_2(x,D_x) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}(x,D_x)\ \{\varphi^{k-h}(x)\}.$$

où : φ est une fonction de classe C^∞ équivalente à la distance au bord Γ de Ω, m et r sont deux entiers tels que $0 \leq r < m$ et q un réel > 1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$, et où $P^{m-h}(x,D_x)$ (resp $P^{r-h}(x,D_x)$) sont des opérateurs aux dérivées partielles d'ordre $\leq m-h$ (resp $\leq r-h$), $P^m(x,D_x)$ étant elliptique sur $\overline{\Omega}$.

Le point de départ de cette étude est l'article de V.V. Grusin et M.I. Visik [18] dans lequel ces auteurs traitent, dans le cadre L^2, les problèmes aux limites associés à des opérateurs $L = L_1+L_2$ qui dégénèrent sur le bord en un opérateur L_2 quasi elliptique. Dans [14] on montre comment à partir de cette étude L^2, on peut obtenir la régularité H^p, pour tout entier $p \geq 0$, lorsque L_2 est elliptique.

Dans cet article, on montre que si B est un système d'opérateurs frontière tel que le couple d'opérateurs $\{L_2,B\}$ soit à indice dans des espaces convenables, le second membre f étant dans $H^p(\Omega)$ (cf. : [5]) alors le couple d'opérateurs $\{L,B\}$ est lui aussi à indice dans des espaces convenables, le second membre f étant dans $H^p(\Omega)$. Cette étude donne par ailleurs la régularité des problèmes aux limites associés.

En particulier, l'opérateur L_2 peut se réduire à l'opérateur "identité", c'est-à-dire que l'on peut avoir $r = k = 0$.

La méthode consiste à obtenir, dans le cas des coefficients constants une estimation a priori directe et un régularisateur à droite, puis d'obtenir des estimations a priori, directe et duale, dans le cas des coefficients variables.

Dans le dernier chapitre, on met en évidence divers types d'opérateurs qui réalisent un isomorphisme algébrique et topologique de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ sur lui-même, résultat bien connu pour certains opérateurs du type de Fuchs (cf. [2], [7]). En particulier les opérateurs :

$$L = \sum_{i=1}^{n} D_i(\varphi^k D_i .) + \lambda \text{ avec k entier} > 2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}\lambda > 0 \text{ et}$$

$\mathrm{Im}\lambda \neq 0$,

et $$L' = \sum_{i=1}^{n} D_i^2(\varphi^k D_i^2 .) + \sum_{i=1}^{n} D_i(\varphi D_i .) + 1 \text{ avec } k > 3$$

réalisent un isomorphisme de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ sur $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, l'opérateur L étant hypoelliptique dans R^n.

Le plan de cet article est le suivant :

I - Enoncé des résultats.

II - Etude d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable.

III - Etude d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés dans le demi-espace

IV - Etude sur Ω.

V - Applications.

Cet article est le résumé d'une thèse de doctorat de 3ème cycle soutenue à l'Université de Rennes.

Ce travail m'a été proposé par Monsieur J. Camus. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici toute ma gratitude, ses très nombreux conseils m'ont beaucoup aidé, en particulier ils m'ont permis d'écrire les opérateurs sous une forme plus utilisable et d'avoir ainsi une vision plus générale et moins technique du problème. Je veux aussi remercier Monsieur P. Bolley dont l'aide constante et les suggestions m'ont été précieuses.

I. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ, tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\} \\ (\forall x \in \Gamma)(\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0). \end{cases}$$

On définit les espaces de Sobolev avec poids $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)$, pour $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et q réel > 1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$:

$$W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega) = \{u \in H^{r+p-k}(\Omega) \ ; \ \varphi^k \ u \in H^{r+p}(\Omega) \text{ et } \varphi^{k+q(m-r)} \ u \in H^{m+p}(\Omega)\}$$

munis de la norme canonique. On définit des traces pour les éléments de ces espaces de la façon suivante : soit σ un nombre réel et $U_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ d(x,\Gamma) < \sigma\}$ où $d(x,\Gamma)$ désigne la distance de x à Γ. On suppose que σ est suffisamment petit pour que, pour tout point $x \in U_\sigma$, la distance de x à Γ ne soit atteinte que par un seul point x_Γ de Γ. L'application Ψ définie par :

$$x \longmapsto (x_\Gamma \ ; \ \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} \ d(x,\Gamma))$$

est un isomorphisme de classe C^∞ de U_σ sur $\Gamma \times]-\sigma,\sigma[$. Soit α une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ égale à 1 dans un voisinage de 0 et à support dans $]-\sigma,\sigma[$. Alors, pour tout u appartenant à $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)$, on pose, pour x appartenant à Γ :

$$\gamma_j \ u(x) = \begin{cases} D^j_t \ u(\Psi^{-1}(x,t))|_{t=0} \ , \text{ pour } j = 0,..,r+p-k-1, \text{ si } 0 \leq k < r+p \\ (-1)^{-j-1} \int_0^{+\infty} t^{-j-1} \ \alpha(t) u(\Psi^{-1}(x,t)) dt, \text{ pour } j = -k,..,\min(-1,r+p-k-1), \\ \qquad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Soient deux opérateurs L_1 et L_2 définis sur Ω par :

$$L_1(x,D_x) \ u(x) = \sum_{h=0}^{m-r-1} P^{m-h}(x,D_x) \ \{\varphi(x)^{k+q(m-r-h)} \ u(x)\}$$

et

$$L_2(x,D_x) \ u(x) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}(x,D_x) \ \{\varphi(x)^{k-h} \ u(x)\}.$$

Nous nous intéressons ici à l'opérateur $L(x,D_x)$ défini par :

$$L(x,D_x) = L_1(x,D_x) + L_2(x,D_x)$$

$L(x,D_x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$L(x,D_x) = \sum_{h=0}^{\operatorname{Min}(m,m+k-r)} P^{m-h} \ (x,D_X) \ \{\varphi^{k+\Theta(h)}(x).\} \ .$$

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(i) m et r sont deux entiers tels que $0 \leq r < m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$, q étant un réel > 1 ; k est un entier ≥ 0 et, pour tout $h = 0,\ldots, \min(m,m+k-r)$:

$$\Theta(h) = \max(q(m-r-h), \ m-r-h) \ ;$$

(ii) Pour tout $h = 0,\ldots,\min(m,m+k-r)$, $P^{m-h}(x,D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ d'ordre inférieur ou égal à m-h ; si $\Theta(h)\notin\mathbb{N}$, $P^{m-h}(x,D_x)$ est, par définition, l'opérateur nul. On notera $P^{m-h}_{m-h}(x,D_x)$ la partie principale d'ordre m-h de $P^{m-h}(x,D_x)$;

(iii) $P^m(x,D_x)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique dans $\bar{\Omega}$.

On introduit alors la condition "d'ellipticité générale" suivante :

(C) Pour tout $x_0\in\Gamma$, tout $x\in\bar{\Omega}$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, on a :

$$L_0(x_0,x;\xi) = \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h}_{m-h}(x_0,\xi)\ \varphi(x)^{q(m-r-h)} \neq 0.$$

Cette condition implique que $P^r(x,D_x)$ est elliptique sur Γ. Nous noterons r_+ le nombre de racines τ de l'équation $P^r_r(x,\xi'+\tau\xi) = 0$ telles que $\operatorname{Im}\tau > 0$ (on suppose que r_+ ne dépend pas de $x\in\Gamma$ et de la donnée du couple de vecteurs de $\mathbb{R}^n(\xi',\xi)$ linéairement indépendants).

L'opérateur $L_2(x;D_x)$ est donc du type étudié dans [5]. On introduit alors, pour $p \geq 0$, les conditions suivantes :

$\underline{H_1(p,\Omega)}$: Pour tout $x\in\Gamma$, l'équation indicielle $\Phi_{L_2}(x;\rho) = 0$, avec :

$$\Phi_{L_2}(x,\rho) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}_{r-h}(x;\operatorname{grad}\varphi(x))\ i^{k-h}\ \rho(\rho-1)\dots(\rho-k+h+1),$$

n'admet pas de racine ρ telle que $\operatorname{Re}\rho = -r-p+k-\frac{1}{2}$.

$\underline{H_2(p,\Omega)}$: Pour tout $x\in\Gamma$, le nombre $r_p(x)$ de racines ρ de l'équation $\Phi_{L_2}(x,\rho) = 0$, vérifiant $\operatorname{Re}\rho > -p-r+k-\frac{1}{2}$ est constant et égal à r_p ; et le nombre $\chi_p = r_+-r_p$ est ≥ 0.

On définit maintenant des opérateurs frontière, si $\chi_p > 0$. Pour $j = 1,\dots,\chi_p$ soit $B^p_j(x,D_\Gamma)$ l'opérateur défini par :

$$B^p_j(x,D_\Gamma)\ \gamma u = \sum_{\lambda=-k}^{r+p-k-1} B_{j\lambda}(x,D_\Gamma)\ \grave{\gamma}_\lambda\ u$$

où, pour tout couple d'entiers (j,λ) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$ et $-k \leq \lambda \leq r+p-k-1$ $B_{j\lambda}(x,D_\Gamma)$ est un opérateur différentiel sur Γ, à coefficients $C^\infty(\Gamma)$ et d'ordre inférieur ou égal à $m_j-\lambda$, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq r+p-k-1$ (si $m_j-\lambda$ est négatif, l'opérateur $B_{j\lambda}(x,D_\Gamma)$ correspondant est, par définition, l'opérateur nul.

On note $B_p = B_p(x,D_\Gamma) = (B^p_1(x,D_\Gamma),\dots,B^p_{\chi_p}(x,D_\Gamma))$. On introduit alors la condition suivante :

$\underline{H_3(p,\Omega)}$: Pour tout $x\in\Gamma$ et tout vecteur ξ cotangent en x à Γ, le problème aux limites :

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{h=0}^{\min(r,k)} P_{r-h}^{r-h}(x;\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)D_t)\ \{t^{k-h}\ v(t)\}=0\\ \displaystyle\sum_{\lambda=-k}^{r+p-k-1} B_{j\lambda}^{m_j-\lambda}(x;\xi)\ \gamma_\lambda\ v=0 \text{ pour } j=1,\dots,\chi_p,\ \text{si } \chi_p>0\end{array}\right.$$

ou $\left\{\displaystyle\sum_{h=0}^{\min(r,k)} P_{r-h}^{r-h}\ (x;\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)\ D_t\ \{t^{k-h}v(t)\}=0 \text{ si } \chi_p=0\right.$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^{r+p}(R_+) = \{u\in H^{r+p-k}(\mathbb{R}_+)\ ;\ t^k u\in H^{r+p}(\mathbb{R}_+)\}$

($B_{j\lambda}^{m_j-\lambda}\ (x,\xi)$ désigne la partie homogène d'ordre $m_j-\lambda$ de $B_{j\lambda}(x,\xi)$).

Pour tout entier $p \geq 0$, l'opérateur L induit une application linéaire et continue de $W_{q,m-r,k}^{m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$ et, pour $\chi_p > 0$, l'opérateur $\{L,B_p\ \gamma\}$ induit une application linéaire et continue de $W_{q,m-r,k}^{m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Nous pouvons maintenant donner les résultats essentiels de ce travail :

1er cas : $\chi_p > 0$

THÉORÈME I.1. On suppose que les conditions (C), $H_1(p,\Omega)$, $H_2(p,\Omega)$ et $H_3(p,\Omega)$ sont vérifiées et que, pour tout $x\in\Gamma$, l'équation $\Phi_{L_2}(x;\rho) = 0$ n'a pas de racine ρ dans la bande $-(p+s) + k-r - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\rho \leq -p-r+k - \frac{1}{2}$, s étant un entier ≥ 0. Alors, pour tout entier ν tel que $0 \leq \nu \leq s$ l'opérateur $\{L,B_p\ \gamma\}$, opérant de $W_{q,m-r,k}^{m+p+\nu}(\Omega)$ dans $H^{p+\nu}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+\nu-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de ν.

2ème cas : $\chi_p = 0$

THÉORÈME I.2. On suppose que les conditions (C), $H_1(p,\Omega)$, $H_2(p,\Omega)$ et $H_3(p,\Omega)$ sont vérifiées et que pour tout $x\in\Gamma$, l'équation indicielle $\Phi_{L_2}(x,\rho) = 0$ n'a pas de racine ρ dans la bande $-(p+s) - r + k - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\rho \leq\ -p - r + k - \frac{1}{2}$, s étant un entier ≥ 0. Alors, pour tout entier ν tel que $0 \leq \nu \leq s$, l'opérateur L, opérant de $W_{q,m-r,k}^{m+p+\nu}(\Omega)$ dans $H^{p+\nu}(\Omega)$, est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de ν.

Remarque I.1. On a des théorèmes analogues pour l'opérateur $L^*(x,D_x)$ défini par :

$$L^*(x,D_x)u(x) = \sum_{h=0}^{\min(m,m+k-r)} \varphi_{(x)}^{k+\Theta(h)}\ P^{m-h*}(x,D_x)u(x)$$

où $P^{m-h*}(x,D_x)$ est l'opérateur adjoint formel de $P^{m-h}(x,D_x)$.

En effet : l'opérateur $L_2^*(x,D_x)$ est du même type que l'opérateur $L_2(x,D_x)$ donc l'opérateur $\overline{L}_1 + L_2^*$, $\overline{L}_1$ étant l'opérateur obtenu en remplaçant dans l'opérateur L_1 les coefficients par leurs conjugués, vérifie des théorèmes analogues aux théorèmes I.1 et I.2 ; on montre que l'opérateur $L_1^* - \overline{L}_1$ est compact de $W_{q,m-r,k}^{m+\ell}(\Omega)$ dans $H^\ell(\Omega)$

pour tout ℓ dans $\mathbb{Z}$. La remarque s'obtient en écrivant :

$$L^* = L_1^* + L_2^* = (L_1^* - \overline{L}_1) + (\overline{L}_1 + L_2^*).$$

II. ÉTUDE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET DÉGÉNÉRÉS A UNE VARIABLE.

II.1. Notations et énoncés des résultats.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, q un réel > 1, m un entier > 0 tel que $qm \in \mathbb{N}$, p un entier relatif. On définit l'espace de Sobolev avec poids :
$W^{m+p}_{q,m,k}(I) = \{u \in H^{p-k}(I) \ ; \ t^k u \in H^p(I)$ et $t^{k+qm} u \in H^{m+p}(I)\}$ muni de la norme canonique.

Pour simplifier, on note $W^{m+p}_{q,m}(I)$ l'espace $W^{m+p}_{q,m,0}(I)$, cet espace a été introduit dans [14].

Remarque. On a les isomorphismes algébriques et topologiques suivants :

$$W^{m+p}_{q,0,k}(I) \simeq W^{m+p}_{k}(I)$$

et

$$W^{m+p}_{q,m,k}(I) \simeq W^{p}_{k}(I) \cap W^{m+p}_{k+q^m}(I)$$

où, pour $\ell \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$, $W^{\ell}_{r}(I)$ est l'espace introduit dans [4].

Soit M l'opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Mu(t) = M(t,D_t)u(t) = D_t^m\{t^{qm} u(t)\} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t) \ D_t^j\{t^{qj} \ u(t)\},$$

où :

(i) q est un réel > 1, m un entier > 0 tel que $qm \in \mathbb{N}$,

(ii) pour $j = 0,\dots m-1$, $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $a_j = 0$ si $qj \notin \mathbb{N}$.

On considère l'hypothèse suivante :

(H) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a :

$$M_0(t,\tau) = \tau^m \ t^{qm} + \sum_{j=0}^{m-1} \ a_j(0) \ \tau^j \ t^{qj} \neq 0.$$

Cette condition est équivalente à dire que les polynômes

$$P^+(\tau) = \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(0)\tau^j \text{ et } P^-(\tau) = (-1)^{qm} \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(0)(-1)^{qj} \tau^j$$

n'ont pas de racine réelle. On notera m_+ (resp m_-) le nombre de racines τ de l'équation $P^+(\tau) = 0$ (resp $P^-(\tau) = 0$) telles que Im $\tau > 0$.

Pour l'opérateur M nous avons les résultats suivants :

THÉORÈME II.1. Sous l'hypothèse (H), pour tout $p \in \mathbb{Z}$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $T > 0$, $M(t,D_t)$ est un opérateur linéaire continu et à indice de $W^{m+p}_{q,m,k}(-T,T)$ sur $W^p_k(-T,T)$ d'indice indépendant de p et égal à $m-m_+ +m_-$.

COROLLAIRE II.1. Supposons que l'hypothèse (H) soit vérifiée. Soit alors $p \in \mathbb{Z}$. Si u appartient à $W^{m+p}_{q,m,k}(-T,T)$ et si $M(t,D_t)u$ appartient à $W^{p+1}_k(-T,T)$, alors u appartient à $W^{m+p+1}_{q,m,k}(-T,T)$ et on a :

$$\|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m,k}(-T,T)} \leq C\{\|M(t,D_t)u\|_{W^{p+1}_k(-T,T)} + \|u\|_{W^{m+p}_{q,m,k}(-T,T)}\}$$

où C est une constante indépendante de u.

COROLLAIRE II.2. Sous l'hypothèse (H), si $u \in \mathcal{D}'(-T,T)$ et si $M(t,D_t)u \in C^\infty(-T,T)$, alors $u \in C^\infty(-T,T)$.

On retrouve ainsi un résultat qui découle du théorème IV.2 de [10] et du théorème III de [11].

Le théorème II.1 se déduit facilement d'une étude sur (0,T). Pour cela on introduit l'hypothèse :

(H_+) Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_0(t,\tau) \neq 0$$

Ceci équivaut à dire que le polynôme $P^+(\tau)$ n'a pas de racine réelle.

THÉORÈME II.2. Sous l'hypothèse (H_+), pour tout $p \in \mathbb{Z}$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $T > 0$, $M(t,D_t)$ est un opérateur linéaire continu et à indice de $W^{m+p}_{q,m,k}(0,T)$ sur $W^p_k(0,T)$, d'indice indépendant de p et égal à $m-m_+$.

COROLLAIRE II.3. Supposons que l'hypothèse (H_+) soit vérifiée. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Si u appartient à $W^{m+p}_{q,m,k}(0,T)$ et si $M(t,D_t)u$ appartient à $W^{p+1}_k(0,T)$ alors u appartient à $W^{m+p+1}_{q,m,k}(0,T)$ et on a :

$$\|u\|_{W^{m+p+1}_{q,m,k}(0,T)} \leq C\{\|M(t,D_t)u\|_{W^{p+1}_k(0,T)} + \|u\|_{W^{m+p}_{q,m,k}(0,T)}\}$$

où C est une constante indépendante de u.

COROLLAIRE II.4. Sous l'hypothèse (H_+), si $u \in \mathcal{D}'([0,T])$(*) et si $M(t,D_t)u \in C^\infty([0,T])$ alors $u \in C^\infty([0,T])$.

II.2. Démonstration du théorème II.2.

On étudie d'abord l'opérateur $M_0(t,D_t)$ défini par :

(*) $\mathcal{D}'([0,T])$ désigne l'espace des restrictions à (0,T) des éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$$M_o(t,D_t)u(t) = D_t^m\{t^{qm}\ u(t)\} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(0)\ D_t^j\ \{t^{qj}\ u(t)\}\ .$$

En posant $y = \frac{t^{-q+1}}{-q+1}$, par une étude analogue à celle faite dans [18], on démontre que $M_o(t,D_t)$ est, sous l'hypothèse (H_+), linéaire continu et à indice de $W^m_{q,m}(0,T)$ sur $L^2(0,T)$ d'indice $m-m_+$.

Par récurrence sur p, en composant avec l'opérateur D_t et en utilisant des résultats de compacité, on montre que sous l'hypothèse (H_+), $M_o(t,D_t)$ est linéaire continu et à indice de $W^{m+p}_{q,m}(0,T)$ sur $H^p(0,T)$, d'indice $m-m_+$.

En remarquant que l'opérateur $M(t,D_t) - M_o(t,D_t)$ est compact de $W^{m+p}_{q,m}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ on démontre le théorème II.2 pour $k = 0$.

Pour $k > 0$, si $f\in W^p_k(0,T)$ on a $f\in H^{p-k}(0,T)$; ce qui précède montre qu'il existe $u\in W^{m+p-k}_{q,m}(0,T)$ tel que $M(t,D_t)u = f$. En écrivant

$$t^k\ M(t,D_t)u = \{M(t,D_t) + M'(t,D_t)\}\ (t^k\ u)$$

et en utilisant des résultats de compacité sur l'opérateur $M'(t,D_t)$ on montre que t^k u appartient à $W^{m+p}_{q,m}(0,T)$ ce qui montre que u appartient à $W^{m+p}_{q,m,k}(0,T)$. Ainsi nous avons démontré que $M(t,D_t)$ est surjectif de $W^{m+p}_{q,m,k}(0,T)$ sur $W^p_k(0,T)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$.

Puisque $W^{m+p}_{q,m,k}(0,T)\hookrightarrow W^{m+p-k}_{q,m}(0,T)$ le noyau de $M(t,D_t)$ dans $W^{m+p}_{q,m,k}(0,T)$ est de dimension $m-m_+$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$. Le théorème II.2. est donc démontré.

II.3. Démonstration du théorème II.1.

En utilisant le changement de variables $y = -t$ et le théorème II.2 on montre que, sous l'hypothèse (H), l'opérateur $M(t,D_t)$ est linéaire continu et à indice, d'indice m_-, de $W^{m+p}_{q,m}(-T,0)$ sur $H^p(-T,0)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$.

En utilisant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
W^{m+p}_{q,m}(-T,0) \times W^{m+p}_{q,m}(0,T) & \xrightarrow{\quad M\times M \quad} & H^p(-T,0) \times H^p(0,T) \\
r \uparrow & & \uparrow r \\
W^{m+p}_{q,m}(-T,T) & \xrightarrow{\quad M \quad} & H^p(-T,T)
\end{array}$$

où : $r(u) = (u_{|(-T,0)},\ u_{|(0,T)})$

et en remarquant que l'opérateur r est linéaire, continu, injectif et à indice, d'indice $-p$, de $H^p(-T,T)$ dans $H^p(-T,0) \times H^p(0,T)$ et de $W^{m+p}_{q,m}(-T,T)$ dans $W^{m+p}_{q,m}(-T,0) \times W^{m+p}_{q,m}(0,T)$ on obtient le théorème II.1 dans le cas $k = 0$. Le cas $k > 0$ se démontre comme précédemment.

III. ÉTUDE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET DÉGÉNÉRÉS DANS LE DEMI-ESPACE.

III.1. Cas des coefficients constants : étude dans une bande $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)$.

III.1.1. Notations et résultats.

On considère l'opérateur $L = L(t,D_x)$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$L\,u(x) = L(t,D_x)u(x) = \sum_{h=0}^{\min(m,m+k-r)} P^{m-h}(D_x)\ \{t^{k+\Theta(h)}\ u(x)\}$$

où :

(i) $x = (x',t) \in \mathbb{R}^n$ avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$; m et r sont deux entiers tels que $0 \leq r < m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$, q étant un réel > 1 ; k est un entier ≥ 0 et pour tout $h = 0,\dots,\min(m,m+k-r)$:

$$\Theta(h) = \max(q(m-r-h),\ m-r-h)\ ;$$

(ii) pour tout $h = 0,\dots,\min(m+k-r,m)$, $P^{m-h}(D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants complexes, homogène et d'ordre m-h ou identiquement nul :

$$P^{m-h}(D_x) = \sum_{|\alpha'|+j=m-h} P^{m-h}_{\alpha',j}\ D^{\alpha'}_{x'}\ D^j_t$$

(si $\Theta(h) \notin \mathbb{N}$, $P^{m-h}(D_x)$ est, par définition, l'opérateur nul) ;

(iii) $P^m(D_x)$ est un opérateur d'ordre m elliptique.

On peut écrire : $L(t,D_x) = L_1(t,D_x) + L_2(t,D_x)$ où

$$L_1(t,D_x) = \sum_{h=0}^{m-r-1} P^{m-h}(D_x)\ \{t^{k+q(m-r-h)}\ .\ \}$$

et

$$L_2(t,D_x) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}(D_x)\ \{t^{k-h}\ .\ \}$$

Pour tout entier $p \geq 0$ on définit les espaces de Sobolev avec poids :

$$W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in H^{r+p-k}(\mathbb{R}^n_+)\ ;\ t^k u \in H^{r+p}(\mathbb{R}^n_+)\ \text{et}\ t^{k+q(m-r)}u \in H^{m+p}(\mathbb{R}^n_+)\}$$

muni de la norme canonique. On définit des traces pour les éléments de ces espaces de la façon suivante :

$$\gamma_j u(x') = \begin{cases} D^j_t\ u(x',0) \text{ pour } j = 0,\dots,r+p \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq r+p \\ (-1)^{-j-1} \int_0^{+\infty} t^{-j-1}\ u(x',t)dt \text{ pour } j = -k,\dots\min(-1,r+p-k-1) \text{ si } k \geq 1 \end{cases}$$

Pour $\delta > 0$ nous noterons $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$ l'espace de Sobolev avec poids formé des restrictions à $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)$ des éléments de $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$.

On introduit alors la condition d'"ellipticité générale" suivante

(C_1) Pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$L_0(t,\xi) = \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h}(\xi)\ t^{q(m-r-h)} \neq 0\ .$$

Cette condition implique que l'opérateur $P^r(D_x)$ est elliptique. L'opérateur $L_2(t,D_x)$ est donc du type étudié dans [5]. On introduit alors pour tout entier $p \geq 0$ les conditions suivantes :

<u>$H_1(p)$</u> : L'équation indicielle $\Phi_{L_2}(\rho) = 0$ avec

$$\Phi_{L_2}(\rho) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}_{(0,r-h)}\ i^{k-h}\ \rho(\rho-1)\dots(\rho-k+h+1),$$

n'admet pas de racine ρ telle que $\mathrm{Re}\,\rho = -p-r+k-\frac{1}{2}$.

Désignons par r_+ le nombre de racines τ de l'équation $P^r(\xi'+\tau\xi) = 0$ telle que $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ (on supposera que r_+ ne dépend pas de la donnée du couple de vecteurs de $\mathbb{R}^n(\xi',\xi)$ linéairement indépendants) et par r_p le nombre de racines ρ de l'équation $\Phi_{L_2}(\rho) = 0$ telles que $\mathrm{Re}\,\rho > -p-r+k-\frac{1}{2}$. La second condition est :

<u>$H_2(p)$</u> : Le nombre $\chi_p = r_+ - r_p$ est ≥ 0.

On définit maintenant les opérateurs frontière. Lorsque $\chi_p > 0$, pour $j=1,\dots,\chi_p$, soit l'opérateur $B_j^p(D_{x'})$ défini par :

$$B_j^p(D_{x'})\,\gamma u = \sum_{\lambda=-k}^{r+p-k-1} B_{j\lambda}(D_{x'})\gamma_\lambda\, u$$

où, pour tout couple d'entiers (j,λ) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$, $-k \leq \lambda \leq r+p-k-1$, $B_{j\lambda}(D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles soit identiquement nul, soit à coefficients constants complexes, homogène d'ordre $m_j-\lambda$, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq r+p-k-1$ (si $m_j-\lambda$ est négatif l'opérateur $B_{j\lambda}(D_{x'})$ correspondant est, par définition, l'opérateur nul).

On note $B_p = B_p(D_{x'}) = (B_1^p(D_{x'}),\dots,B^p_{\chi_p}(D_{x'}))$, et on introduit alors la condition :

<u>$H_3(p)$</u> : Pour tout ω appartenant à la sphère unité S_{n-2} de $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L_2(t;\omega,D_t)\ v(t) = 0 \\ B_p(\omega)\ \gamma\ v = 0 \end{cases} \qquad , \text{ si } \chi_p > 0\ ;$$

ou

$$L_2(t;\omega,D_t)\ v(t) = 0 \qquad , \text{ si } \chi_p = 0$$

n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^{r+p}(\mathbb{R}_+)$.

Pour tout $p \geq 0$, l'opérateur $\{L,B_p\ \gamma\}$ (resp L) induit une application linéaire et continue de $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp $H^p(\mathbb{R}^n_+)$) si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats de ce paragraphe :

THÉORÈME III.1. Soit p un entier ≥ 0. On suppose que les conditions (C_1), $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ sont vérifiées. Alors, il existe J > 0 et C > 0 tels que, pour tout u appartenant à $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ avec supp $u \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\delta[$, on ait :

$$\|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\{\|Lu\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|B_p\,\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ \|u\|_{W^{m+p-1}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

$$(\text{resp } \|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\{\|Lu\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{W^{m+p-1}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)}\})$$

si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

THÉORÈME III.2. Soit p un entier ≥ 0. On suppose que les conditions (C_1), $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $_3(p)$ sont vérifiées. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute fonction $\beta \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ vérifiant $0 \leq \beta(t) \leq 1$, supp $\beta \subset [0,\delta[$ et $\beta(t) = 1$ au voisinage de 0, on ait : il existe un opérateur R_0 linéaire et continu de $H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp $H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$ dans $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$ tel que pour tout (f,g) (resp f) appartenant à $H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp $H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$ on ait :

(i) $L \circ R_0(f,g) = f + Q_1(f)$

(ii) $B_p\,\gamma\,\{\beta(t)\,R_0(f,g)\} = g + Q_2(f,g)$

(resp) : (i) $L \circ R_0(f,g) = f + Q_1(f)$ si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$), où Q_1 est un opérateur linéaire et continu de $H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$ et Q_2 est un opérateur linéaire et continu de $H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))\times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $\prod_{j=1}^{\chi_p} H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ si $\chi_p > 0$.

Posons $\mathcal{P}_p = \{L(t,D_x), B_p(D_{x'})\gamma\beta\}$ et $\mathcal{P}^*_p$ l'adjoint de $\mathcal{P}_p$. $\mathcal{P}^*_p$ est un opérateur linéaire et continu de $[H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]'$, les espaces $[H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]'$ et $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1}\ (0,\delta)]'$ étant considérés comme des espaces de distributions sur $\mathbb{R}^n$.

Du théorème III.2 on déduit facilement le résultat suivant qui nous permettra d'atteindre le cas des coefficients variables :

THÉORÈME III.3. Soit p un entier ≥ 0. On suppose que les conditions (C_1), $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ sont vérifiées. Alors il existe $\delta > 0$ et $C > 0$, tels que, pour tout $(f,g) \in [H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp $f \in [H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]'$) on ait:

$$\|(f,g)\|_{[H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\{\|\mathcal{P}_p^*(f,g)\|_{[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))]'}$$

$$+ \|i^*(f,g)\|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-r+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\}$$

$$(\text{resp } \|f\|_{[H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))]'} \leq C\{\|\mathcal{P}_p^*(f)\|_{[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]'} +$$

$$+ \|i^*(f)\|_{[H^{p+1}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))]'}\})$$

où i^* désigne l'adjoint de l'injection canonique i de $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n-1}\ (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+1-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp de $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$ dans $H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta))$) si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

III.1.2. Démonstration des résultats.

Par transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par rapport aux variables tangentielles, l'opérateur L est transformé en un opérateur différentiel en t noté $L(t;\xi',D_t)$, dépendant du paramètre ξ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, et défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L(t;\xi',D_t) = \sum_{h=0}^{\min(m,m+k-r)} P^{m-h}(\xi',D_t)\ \{t^{k+\Theta(h)}\ .\}$$

On définit de même les opérateurs $L_1(t;\xi',D_t)$, $L_2(t;\xi',D_t)$ et $L_o(t;\xi',D_t)$. On définit aussi l'opérateur différentiel ordinaire $M = L(t,D_t)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$M(t,D_t) = \sum_{h=0}^{m-r} \frac{P^{m-h}_{o,m-h}}{P^r_{o,r}}\ D_t^{m-r-h}\ \{t^{q(m-r-h)}\ .\}$$

ce qui a un sens puisque $P^r_{o,r} \neq 0$ car P^r est elliptique. Cet opérateur entre dans la classe introduite au chapitre II .

Pour démontrer les théorèmes III.1 et III.2, on fait d'abord une étude pour $|\xi'|$ grand, puis une étude pour $|\xi'|$ borné.

Pour $|\xi'|$ grand, on est amené, pour des raisons de non-homogénéité de l'opérateur $L(t;\xi',D_t)$ à recouvrir $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)$ par deux bandes (dépendant de $|\xi'|$)

$\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau_1)$ et $\mathbb{R}^{n-1} \times (\tau_2,\delta)$ où $\tau_1 = \delta_1 \, |\xi'|^{-\frac{1}{q}}$ et $\tau_2 = \delta_2 \, |\xi'|^{-\frac{1}{q}}$ avec $\delta_2 < \delta_1$.

Sur $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau_1)$ on approche l'opérateur $L(t;\xi',D_t)$ par l'opérateur $L_2(t;\xi',D_t) \circ M(t,D_t)$; sur $\mathbb{R}^{n-1} \times (\tau_2,\delta)$ on approche $L(t;\xi',D_t)$ par l'opérateur $t^k \, L_o(t;\xi',D_t)$. On obtient alors la :

PROPOSITION III.1. Il existe $\delta > 0$, $A > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ vérifiant $|\xi'| \geq A$:

(i) il existe un opérateur R' de $H^p(0,\delta) \times \mathbb{C}^{\chi_p}$ (resp $H^p(0,\delta)$) dans $W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta)$ tel que pour tout $(f,\Psi) \in H^p(0,\delta) \times \mathbb{C}^{\chi_p}$ (resp $f \in H^p(0,\tau)$) on ait :

a) $L(t;\xi',D_t) \circ R'(f,\Psi) = f$,

b) $B_p(\xi') \, \gamma \, \{\beta(t) \, R'(f,\Psi)\} = \Psi$,

c) $|||\, R'(f,\Psi) \,|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p,\xi'} \leq C\{\| f\|^{(0,\delta)}_{p,\xi'} + |\Psi|_{\xi'}\}$,

(resp a) $L(t;\xi',D_t) \circ R'(f) = f$,

c) $|||\, R'(f) \,|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p,\xi'} \leq C\| f\|^{(0,\delta)}_{p,\xi'})$,

(ii) pour tout $u \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta)$ tel que $\operatorname{supp} u \subset [0,\delta[$ on ait :

$$|||\, u \,|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p,\xi'} \leq C\{\| L(t;\xi',D_t)u\|^{(0,\delta)}_{p,\xi'} + |\Psi|_{\xi'} + |||\, u \,|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p-1,\xi'}$$

$$(\text{resp } |||\, u \,|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p,\xi'} \leq \{\| L(t;\xi',D_t)u\|^{(0,\delta)}_{p,\xi'} + |||\, u \,|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p-1,\xi'}\}$$

si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$). Si $k = r = p = 0$ le terme $|||\, u \,|||^{(0,\delta)}_{q,m,0,m-1,\xi'}$ n'intervient pas dans les inégalités précédentes.

Les normes introduites dans cette proposition sont les suivantes :

$$|||\, u \,|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p,\xi'} = \{(\| u_{|(0,\tau_1)}\|^{(0,\tau_1)}_{q,m-r,k,m+p,\xi'})^2 + $$

$$+ (\| u_{|(\tau_2,\delta)}\|^{(\tau_2,\delta)}_{k+q(m-r),m+p,\xi'})^2\}^{1/2}$$

avec, si I est un intervalle de R,

$$\| u\|^{I}_{q,s,k,\ell,\xi'} = \{\sum_{j=0}^{\ell-s} |\xi'|^{2(\ell-s-j)} \| D^j_t\{t^k u\}\|^2_{L^2(I)} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\ell} |\xi'|^{2(\ell-j)} \; \| D^j_t\{t^{k+q^s} \, u\}\|^2_{L^2(I)}\}^{1/2}$$

$$\| u\|^{I}_{k,\ell,\xi'} = \| u\|^{I}_{q,o,k,\ell,\xi'} \quad ; \quad \| u\|^{I}_{\ell,\xi'} = \| u\|^{I}_{q,o,o,\ell,\xi'} \; ;$$

$$|\Psi|_{\xi'} = \sum_{j=1}^{\chi_p} |\xi'|^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}} |\Psi_j| \qquad \text{si } \chi_p > 0 .$$

Pour tout ξ' borné, on procède par partition de l'unité en ξ' et l'on démontre la :

PROPOSITION III.2. Pour tout $\delta > 0$ et $A > 0$, il existe une partition finie $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_N$ de $\{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} / |\xi'| \leq A\}$ et, pour chaque $i = 1,\dots,N$, un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}([0,\delta])$, notés e^i_j , $j = 1,\dots,\ell_i$, tels que pour $\xi' \in A_i$ l'opérateur linéaire et continu de $W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta) \times \mathbb{C}^{\ell_i}$ dans $H^p(0,\delta)$ défini par :

$$(u,\lambda_1 \dots \lambda_{p_i}) \longmapsto L(t;\xi',D_t)\, u + \sum_{j=1}^{\ell_i} \lambda_j\, e^i_j$$

admette un inverse à droite $R_i(\xi')$, dépendant continument de $\xi' \in A_i$. De plus il existe une constante $C' > 0$ telle que :

(i) pour tout $f \in H^p(0,\delta)$, pour tout $i = 1,\dots,N$ et tout $\xi' \in A_i$, on ait, si $(u,\lambda_1 \dots \lambda_{p_i}) = R_i(\xi')\, f$:

$$\{\| u\|^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p} + \sum_{j=1}^{\ell_i} |\lambda_j|\} \leq C' \| f\|^{(0,\delta)}_p$$

(ii) pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $|\xi'| \leq A$ et tout $u \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta)$, on ait :

$$\| u\|^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p} \leq C'\{\| L(t;\xi',D_t)u\|^{(0,\delta)}_p + \| u\|^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p-1}\}$$

Les normes introduites dans cette proposition sont les suivantes :

$$\| u\|^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p} = \{ \sum_{=0}^{r+p} \| D^\ell_t \{t^k u\}\|^2_{L^2(0,\delta)} + \sum_{\ell=0}^{m+p} \| D^\ell_t \{t^{k+q(m-r)} u\}\|^2_{L^2(0,\delta)} \}^{\frac{1}{2}}$$

$$\| f\|^{(0,\delta)}_p = \{ \sum_{\ell=0}^{p} \| D^\ell_t f\|^2_{L^2(0,\delta)} \}^{\frac{1}{2}} .$$

Si $r = k = 0$, l'espace $W^{m-1}_{w,m,o}(0,\delta)$ est muni de la norme :

$$\| u\|^{(0,\delta)}_{q,m,o,m-1} = \{\| u\|^2_{H^{-1}(0,\delta)} + \sum_{\ell=0}^{m-1} \| D^\ell_t \{t^{qm} u\}\|^2_{L^2(0,\delta)} \}^{\frac{1}{2}} .$$

Démonstration du théorème III.1.

On choisit $\delta > 0$ et $A > 0$ de telle façon que la proposition III.1 soit vérifiée. Soit alors $u \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ avec supp $u \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\delta[$. Si l'on désigne par $\hat{}$ la transformation de Fourier par rapport aux variables tangentielles, pour presque tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\hat{u}(\xi',.) \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta)$.

D'après la proposition III.1, on a, pour $|\xi'| \geq A$:

$$\left[|||\hat{u}(\xi',.)|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p,\xi'}\right]^2 \le C\left\{\left[||L(t;\xi',D_t)\,\hat{u}(\xi',.)||^{(0,\delta)}_{p,\xi'}\right]^2\right.$$
$$\left. + |B_p(\xi')\gamma\hat{u}(\xi',.)|^2_{\xi'} + \left[|||\hat{u}(\xi',.)|||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p-1,\xi'}\right]^2\right\}$$

Pour $|\xi'| \le A$, on a, d'après la proposition III.2 :

$$\left[||\hat{u}(\xi',.)||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p}\right]^2 \le C\left\{\left[||L(t;\xi',D_t)\hat{u}(\xi',.)||^{(0,\delta)}_{p}\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[||\hat{u}\,(\xi',.)||^{(0,\delta)}_{q,m-r,k,m+p-1}\right]^2\right\}.$$

En regroupant ces deux inégalités, en intégrant par rapport à $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et en remarquant que

$$u \longmapsto \{||t^k u||^2_{H^{r+p}(\mathbb{R}^n_+)} + ||t^{k+q(m-r)}u||^2_{H^{m+p}(\mathbb{R}^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme du graphe dans $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ on obtient la majoration a priori :

$$||u||_{W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)} \le C\{||L(t,D_x)u||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + ||B_p\gamma u||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} +$$
$$+ ||u||_{W^{m+p-1}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

Le cas $\chi_p = 0$ est analogue.

<u>Démonstration du théorème III.2.</u> On définit l'opérateur R_0 par la "formule" suivante pour $(f,g) \in H^p(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$R_0(f,g) = \mathfrak{F}^{-1}_{\xi' \to x'}\{(1-\varphi_A)R'(\xi')(\hat{f}(\xi',t),\hat{g}(\xi')) + \sum_{i=1}^{N} \varphi_{A_i}\,\pi_i\,R_i(\xi')\,\hat{f}(\xi',t)\}$$

où :

φ_A est l'indicatrice de $\{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\ ;\ |\xi'| \le A\}$; pour $|\xi'| \ge A$ $R'(\xi')$ est l'inverse à droite introduit à la proposition III.1, pour $i = 1,\dots,N$, φ_{A_i} est l'indicatrice de A_i (proposition III.2), π_i est la projection de $W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta) \times \mathbb{C}^{\ell_i}$ sur $W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta)$ et $B_i(\xi')$ est l'inverse à droite introduit à la proposition III. .

Des propositions III.1 et III.2, on déduit :

$$||t^k R_0(f,g)||_{H^{r+p}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))} + ||t^{k+q(m-r)}R_0(f,g)||^2_{H^{m+p}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))}$$
$$\le C\{||f||^2_{H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))} + ||g||_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\}.$$

De plus, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a $\widehat{R_0(f,g)}(\xi',.) \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta)$. D'après la proposition I.3 de [5] ceci équivaut à dire que : $t^{k+q(m-r)}\widehat{R_0(f,g)}(\xi',.) \in H^{m+p}(0,\delta)$ et $t^k\widehat{R_0(f,g)}(\xi',.) \in H^{r+p}(0,\delta) \cap H_0^{\min(k,r+p)}(0,\delta)$.

Par conséquent :

$t^{k+q(m-r)}R_0(f,g) \in H^{m+p}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ et $t^kR_0(f,g) \in H^{r+p}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \cap H_0^{\min(k,r+p)}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$

ce qui équivaut à dire que $R_0(f,g) \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$.

En utilisant la remarque faite précédemment sur les normes équivalentes dans $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ on déduit de l'inégalité précédente que R_0 est linéaire et continu de

$$H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ dans } W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)).$$

Pour i = 1,...N et j = 1,..., ℓ_i, on définit l'opérateur π_j^i qui à $(u,\lambda_1,\dots \lambda_{\ell_i}) \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(0,\delta) \times \mathbb{C}^{\ell_i}$ associe λ_j. On note S_j^i l'opérateur linéaire et continu de $H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ défini par :

$$S_j^i(f) = -\mathcal{F}^{-1}_{\xi'\to x'}\{\varphi_{A_i}\ \pi_j^i\ R_i(\xi')\ \hat{f}(\xi',t)\}$$

et l'on pose $Q_1(f) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\ell_i} S_j^i(f) \otimes e_j^i$. L'opérateur Q_1 est linéaire et continu de $H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta))$.

On définit Q_2, linéaire et continu de $H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $\prod_{j=1}^{\chi_p} H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, par :

$$Q_2(f,g) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi'\to x'}\{\sum_{i=1}^{N}\varphi_{A_i}[B_p(\xi')\gamma\{\beta\ \pi_i(\xi')\ \hat{f}(\xi',t)\} - \hat{g}(\xi')]\} \quad .$$

Par transformation de Fourier tangentielle, on vérifie facilement les majorations annoncées au théorème III.2 dans le cas $\chi_p > 0$. Le cas $\chi_p = 0$ est analogue.

<u>Démonstration du théorème III.3</u>. Notons Q l'opérateur $\{Q_1,Q_2\}$, nous pouvons considérer que Q est un opérateur linéaire et continu de

$$H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ dans } H^{p+1}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+1-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

D'après le théorème III.2 on a

$$\mathcal{P}_p \circ R_0 = I + i \circ Q$$

où I désigne l'opérateur identité de $H^p(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\delta)) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Par dualité il vient

$$R_0^* \circ \mathcal{P}_p^* = I^* + Q^* \circ i^*$$

En utilisant la continuité des opérateurs R_0^* et Q^* dans des espaces appropriés on obtient facilement la majoration annoncée.

III.2. Cas des coefficients variables.

III.2.1. Notations et résultats. On considère l'opérateur $L \equiv L(x,t;D_x)$ défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Lu(x) \equiv L(x,t;D_x)u(x) = \sum_{h=0}^{\min(m,m+k-r)} P^{m-h}(x,D_x)\ \{t^{k+\Theta(h)}\ u(x)\},$$

où :

(i) $x = (x',t)\in\mathbb{R}^n$, avec $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ et $t\in\mathbb{R}$; m et r sont deux entiers tels que $0 \leq r < m$ et $q(m-r)\in\mathbb{N}$, q étant un réel > 1 ; k est un entier ≥ 0, et, pour tout $h = 0,\dots,\min(m,m+k-r)$, on a :

$$\Theta(h) = \max\ (q(m-r-h),\ m-r-h).$$

(ii) pour tout $h = 0,\dots,\min(m,m+k-r)$, $P^{m-h}(x,D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables sur R^n et à dérivées bornées sur $\mathbb{R}^n$, d'ordre inférieur ou égal à m-h ; si $\Theta(h)\notin\mathbb{N}$ $P^{m-h}(x,D_x)$ est, par définition, l'opérateur nul. On écrira :

$$P^{m-h}(x,D_x) = \sum_{|\alpha'|+j\leq m-h} P^{m-h}_{(\alpha',j)}(x)\ D_{x'}^{\alpha'}\ D_t^j$$

et l'on notera $P^{m-h}_{m-h}(x,D_x)$ la partie principale, d'ordre m-h, de $P^{m-h}(x,D_x)$.

(iii) $P^m(\underline{x},D_x)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique sur $\mathbb{R}^n_+$, c'est-à-dire que pour tout $x\in\mathbb{R}^n_+$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, on a :

$$P^m_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha'|+j=m} P^m_{(\alpha',j)}(x)\ \xi'^{\alpha'}\ \xi_n^j \neq 0.$$

On peut écrire : $L(x,t;D_x) = L_1(x,t;D_x) + L_2(x,t;D_x)$, où :

$$L_1(x,t;D_x) = \sum_{h=0}^{m-r-1} P^{m-h}(x,D_x)\ \{t^{k+q(m-r-h)}\ .\}$$

et

$$L_2(x,t;D_x) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}(x,D_x)\ \{t^{k-h}\ .\}$$

On introduit alors la condition "d'ellipticité générale" suivante :

(C_1) Pour tout $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, pour tout $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, on a :

$$L_0((x',0),t\ ;\ \xi) = \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h}_{m-h}((x',0)\ ;\ \xi)\ t^{q(m-r-h)} \neq 0\ .$$

Cette condition implique que l'opérateur $P^r((x',0)\ ;\ D_x)$ est elliptique. L'opérateur $L_2(x,t,D_x)$ est donc du type étudié dans [5].

A l'opérateur L on associe l'opérateur "partie principale" défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$L^o(x,t;D_x)\ u(x) = \sum_{h=0}^{\min(m,m+k-r)} P^{m-h}_{m-h}(x;D_x)\ \{t^{k+\Theta(h)}\ u(x)\}\ .$$

L'opérateur $L^o(0,t;D_x)$ est du type étudié dans III.1.

On introduit alors, pour tout $p \geq 0$, les conditions suivantes :

$\underline{H_1(p)}$: L'équation indicielle $\Phi_{L_2}(\rho) = 0$ avec :

$$\Phi_{L_2}(\rho) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}_{(o,r-h)}(0)\ i^{k-h}\ \rho(\rho-1)\dots(\rho-k+h+1)$$

n'admet pas de racine ρ telle que $\mathrm{Re}\ \rho = -p-r+k-\frac{1}{2}$.

Désignons par r_+ le nombre de racines τ de l'équation $P^r_r(0,\xi'+\tau\xi) = 0$ telles que $\mathrm{Im}\ \tau > 0$ (on suppose que r_+ ne dépend pas de la donnée du couple de vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n(\xi',\xi)$) et par r_p le nombre de racines ρ de l'équation $\Phi_{L_2}(\rho) = 0$ telles que $\mathrm{Re}\ \rho > -p-r+k-\frac{1}{2}$.

$\underline{H_2(p)}$: Le nombre $\chi_p = r_+ - r_p$ est ≥ 0.

On définit maintenant les opérateurs frontière, lorsque $\chi_p > 0$;
Pour $j = 1,\dots,\chi_p$, soit l'opérateur $B^p_j(x',D_{x'})$ défini par :

$$B^p_j(x',D_{x'})\ \gamma u = \sum_{\lambda=-k}^{r+p-k-1} B_{j,\lambda}(x';D_{x'})\ \gamma_\lambda\ u$$

où, pour tout couple d'entiers (j,λ) vérifiant $1 \leq j \leq \chi_p$, $-k \leq \lambda \leq r+p-k-1$, $B_{j,\lambda}(x',D_{x'})$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment dérivables et à dérivées bornées sur $\mathbb{R}^{n-1}$, d'ordre inférieur ou égal à $m_j-\lambda$, m_j étant un entier vérifiant $-k \leq m_j \leq r+p-k-1$ (et si $m_j-\lambda$ est négatif, l'opérateur $B_{j,\lambda}(x',D_{x'})$ correspondant est, par définition, l'opérateur nul).

On note $B_p = B_p(x',D_x) = (B^p_1(x',D_{x'}),\dots,B^p_{\chi_p}(x',D_{x'}))$. A cet opérateur B_p, on associe l'opérateur $B^o_p(x',D_{x'})$ défini par :

$$B^o_p(x',D_{x'}) = (B^{po}_1(x';D_{x'}),\dots,B^{po}_{\chi_p}(x';D_{x'}))\ ,$$

où

$$B^{po}_j(x',D_{x'})\gamma\ u = \sum_{\lambda=-k}^{r+p-k-1} B^{m_j-\lambda}_{j,\lambda}\ (x,D_{x'})\ \gamma_\lambda\ u\ ,$$

$B^{m_j-\lambda}_{j,\lambda}\ (x',D_{x'})$ étant la somme des termes d'ordre exactement $m_j-\lambda$ dans l'opérateur $B_{j,\lambda}(x',D_{x'})$.

Nous introduisons alors la condition suivante :

$\underline{H_3(p)}$: Pour tout $\omega \in S_{n-2}$, sphère unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L^o_2(0,t;\omega,D_t)\ \{v(t)\} = 0 \\ B^o_p(0;\omega)\ \gamma\, v = 0\ ,\ \text{si}\ \chi_p > 0\ , \end{cases}$$

ou : $\{L_2^0(0,t;\omega,D_t)\ \{v(t)\} = 0$, si $\chi_p = 0$,

n'admet que la solution $v = 0$ dans $W_k^{r+p}(R_+)$.

Pour tout $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ par :

$$\mathcal{P}_p : u \longmapsto \mathcal{P}_p u = \begin{cases} \{Lu, B_p\ \gamma\ u\}, & \text{si } \chi_p > 0 , \\ Lu & , \text{si } \chi_p = 0 . \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp $H^p(\mathbb{R}^n_+)$) si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

L'opérateur adjoint $\mathcal{P}_p^*$ et $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$) dans $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)]'$ si $\chi_p > 0$ (resp $_p = 0$).

Les espaces $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]$ et $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)]$ seront considérés comme des espaces de distributions sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $p \geq 0$, nous noterons j_p l'isomorphisme canonique de $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$ sur $H_0^{-p}(\mathbb{R}^n_+)$, espace des distributions de $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

On a les théorèmes suivants :

THÉORÈME III.4. <u>Soit</u> $p \geq 0$. <u>On suppose que les conditions</u> (C_1), $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ <u>sont vérifiées</u>. <u>Alors</u>, <u>pour tout entier</u> $s \geq 0$ <u>tel que l'équation indicielle</u> $\Phi_{L_2}(\rho) = 0$ <u>n'ait pas de racine</u> ρ <u>dans la bande</u>

$$-(p+s) - r+k - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \rho \leq -p-r+k - \frac{1}{2}$$

<u>il existe des constantes</u> $\varepsilon_s > 0$ <u>et</u> $C_s > 0$ <u>telles que</u> :

<u>Si</u> u <u>appartient à</u> $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$, <u>si le support de</u> u <u>est contenu dans la boule de centre</u> 0 <u>et de rayon</u> ε_s <u>et si</u> $\mathcal{P}_p u$ <u>appartient à</u> :

$$H^{p+s}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+s-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \ (\text{resp } H^{p+s}(\mathbb{R}^n_+)), \ \underline{\text{alors}} :$$

(i) u appartient à $W^{m+p+s}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$,

(ii) $$\|u\|_{W^{m+p+s}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_s\{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+s}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+s-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^{m+p+s-1}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

(resp $\|u\|_{W^{m+p+s}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_s\{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+s}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{W^{m+p+s-1}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)}\})$,

si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

THÉORÈME III.5. Soit p un entier ≥ 0. On suppose que les conditions (C_1), $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ sont réalisées. Alors, il existe des constantes $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ telles que, pour tout (f,g) (resp f) appartenant à $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'$) et à support dans la boule de centre 0 et de rayon ε on ait :

$$\|(f,g)\|_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\{\|\mathcal{P}^*_p(f,g)\|_{[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)]'} + \|j_p f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\}$$

(resp $\|f\|_{[H^p(\mathbb{R}^n_+)]'} \leq C\{\|\mathcal{P}^*_p(f)\|_{[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n)]'} + \|j_p f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)}\}$) ,

si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

III.2.2. Démonstration des résultats.
Estimations directes (théorème III.4).

Pour $s = 0$ nous avons seulement à démontrer la majoration a priori. Si $u \in W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ avec supp $u \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\delta[$ le théorème III.1. montre qu'il existe $C > 0$, indépendante de u, telle que :

$$\|u\|_{W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\{\|L^0(0,t;D_x)u\|_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|B^0_p(0,D_{x'})\gamma u\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W^{m+p-1}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)}\} .$$

La majoration a priori cherchée s'obtient alors en remarquant que les opérateurs $L^0(x,t;D_x) - L^0(0,t,D_x)$ et $B^0_p(x';D_{x'}) - B^0_p(0,D_{x'})$ vérifient des inégalités du type compacité et que l'opérateur $L(x,t,D_x) - L^0(x,t,D_x)$ (resp $B_p(x',D_{x'})-B^0_p(x',D_{x'})$) est linéaire et continu de $W^{m+p-1}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$ (resp $\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$) .

Pour $s = 1$ on utilise la méthode des quotients différentiels tangentiels puis on étudie l'opérateur différentiel ordinaire, dépendant du paramètre x', $\mathcal{L}(x',t,D_t)$ défini par :

$$\mathcal{L}(x',t,D_t)u(x) = \sum_{h=0}^{\min(m,m+k-r)} P^{m-h}_{(0,m-h)}(x',t)D_t^{m-h}\{t^{k+\theta(h)}u(x)\}$$

que l'on écrit :

$$\mathcal{L}(x',t,D_t)u(x) = L_2(x',t;D_t) \circ M(x',t,D_t) + Q(x',t,D_t)$$

où

$$L_2(x',t,D_t) = \sum_{h=0}^{\min(r,k)} P^{r-h}_{(0,r-h)}(x',t)\, D_t^{r-h}\{t^{k-h}\ .\}$$

et

$$M(x',t,D_t) = \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h}_{(0,m-h)}(x',t)/P_{(0,r)}(x',t)\, D_t^{m-r-h}\{t^{q(m-r-h)}\ .\}\ .$$

Ceci a un sens si $(x',t)\in B(0,\varepsilon)$ avec ε assez petit car $P^r_{(0,r)}(0) \neq 0$ et l'on remarque que l'opérateur $M(t,D_t)$ entre dans la classe des opérateurs introduit au chapitre II.

Pour $s \geq 1$ on procède par récurrence, par une méthode analogue.

Estimations duales (théorème III.5).

Supposons $\chi_p > 0$, le cas $\chi_p = 0$ étant analogue. Soit $(f,g_1,\dots,g_{\chi_p})$ appartenant à $[H^p(\mathbb{R}^n_+)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. L'espace $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n_+)]'$ étant canoniquement isomorphe au sous-espace des distributions de $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n)]'$ à support dans $\mathbb{R}^n_+$, on peut considérer $\mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$ comme un élément de $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\mathbb{R}^n)]'$.

Par transposition, à l'aide d'une fonction test $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nous pouvons calculer $\mathcal{P}^*_p(f;g_1,\dots,g_{\chi_p})$. Des lemmes du type compacité nous permettent alors d'obtenir l'estimation a priori duale recherchée.

IV. ÉTUDE SUR Ω.

On reprend les notations du chapitre I.

Pour tout entier $p \geq 0$, on considère l'opérateur $\mathcal{P}_p$ défini sur Ω par :

$$u \longmapsto \mathcal{P}_p\, u = \begin{cases} (Lu,\ B_p\, u) & \text{si } \chi_p > 0 \\ Lu & \text{si } \chi_p = 0 \end{cases}$$

C'est un opérateur linéaire et continu de $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp $H^p(\Omega)$) si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

On désigne par $[H^p(\Omega)]'$ (resp $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)]'$) l'espace dual de $H^p(\Omega)$ (resp $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)$). L'opérateur adjoint $\mathcal{P}^*_p$ de $\mathcal{P}_p$ est un opérateur linéaire et continu de $[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp $[H^p(\Omega)]'$) dans $[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)]'$, considéré comme un sous-espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$ à support dans $\overline{\Omega}$, si $\chi_p > 0$ (resp si $\chi_p = 0$).

On désigne enfin par j_p l'isomorphisme canonique de $[H^p(\Omega)]'$ sur $H_0^{-p}(\Omega)$ espace des distributions de $H^{-p}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$.

Par "cartes locales" et "partition de l'unité" en utilisant la méthode employée dans [5] on obtient les résultats suivants :

THÉORÈME IV.1. Soit p un entier ≥ 0. On suppose que les conditions (C), $H_1(p,\Omega)$, $H_2(p,\Omega)$ et $H_3(p,\Omega)$ sont réalisées. Alors, pour tout entier $s \geq 0$ tel que l'équation $\Phi_{L_2}(x,\rho) = 0$ n'ait pas de racine dans la bande $-(p+s)-r+k-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\rho \leq -p-r+k-\frac{1}{2}$ pour tout x appartenant à Γ, il existe une constante $C_s > 0$ telle que, si u appartient à $W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)$ et si $\mathcal{P}_p u$ appartient à

$$H^{p+s}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+s-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \qquad (\text{resp } H^{p+s}(\Omega)),$$

alors :

(i) u appartient à $W^{m+p+s}_{q,m-r,k}(\Omega)$,

(ii) $$\|u\|_{W^{m+p+s}_{q,m-r,k}(\Omega)} \leq C_s\{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+s}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+s-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W^{m+p+s-1}_{q,m-r,k}(\Omega)}\}$$

$$(\text{resp } \|u\|_{W^{m+p+s}_{q,m-r,k}(\Omega)} \leq C_s\{\|\mathcal{P}_p u\|_{H^{p+s}(\Omega)} + \|u\|_{W^{m+p+s-1}_{q,m-r,k}(\Omega)}\})$$

si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

THÉORÈME IV.2. Soit p un entier ≥ 0. On suppose que les conditions (C), $H_1(p,)$, $H_2(p,)$ et $H_3(p,)$ sont réalisées. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout (f,g) (resp f) appartenant à

$$[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \qquad (\text{resp } [H^p(\Omega)]')$$

on ait :

$$\|(f,g)\|_{[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\{\|\mathcal{P}_p^*(f,g)\|_{|W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)|}$$

$$+ \|j_p f\|_{H^{-p-1}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\}$$

(resp $\|f\|_{|H^p(\Omega)|'} \leq C\{\|\mathcal{P}_p^*(f)\|_{[W^{m+p}_{q,m-r,k}(\Omega)]'} + \|j_p f\|_{H^{-p-1}(R^n)}\}$

si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$).

Démonstration. Par "cartes locales" et "partition de l'unité" on se ramène, par un raisonnement classique, aux théorèmes V.4 et V.5 et aux estimations a priori pour les opérateurs elliptiques. Une étude analogue est faite, de façon détaillée, dans [5].

Il est bien connu qu'à partir des théorèmes IV.1 et IV.2 on obtient les théorèmes I.1 et I.2 ; en fait on a le résultat suivant, concernant l'existence des solutions dans les espaces $W^{\ell}_{q,m-r,k}(\Omega)$ ℓ étant un entier $\geq$ m+p, p étant un entier ≥ 0, du problème :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ B_p \gamma u = g & \text{sur } \Gamma, \text{ si } \chi_p > 0 \end{cases}$$

$$\{ Lu = f \quad \text{dans } \Omega, \text{ si } \chi_p = 0.$$

THÉORÈME IV.3. Avec les notations du chapitre II, on suppose que les conditions (C) $H_1(p,\Omega)$, $H_2(p,\Omega)$ et $H_3(p,\Omega)$ sont réalisées et que pour tout x appartenant à Γ l'équation $\Phi_{L_2}(x,\rho) = 0$ n'a pas de racine ρ dans la bande :

$$-(p+s) - r + k - \frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,\rho \leq -p - r + k - \frac{1}{2}$$

s étant un entier ≥ 0. Alors, pour tout entier ℓ tel que $0 \leq \ell \leq s$ l'opérateur $\mathcal{P}_p$ opérant de $W^{m+p+\ell}_{q,m-r,k}(\Omega)$ dans

$$H^{p+\ell}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+\ell-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

(resp $H^{p+\ell}(\Omega)$) possède les propriétés suivantes :

(i) c'est un opérateur à indice dont l'indice est indépendant de ℓ,

(ii) son noyau est égal à $\{u \in W^{m+p+\ell}_{q,m-r,k}(\Omega) \; ; \; \mathcal{P}_p u = 0\}$,

(iii) son image est composée des éléments (f,g) (resp f) appartenant à

$H^{p+\ell}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p+\ell-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp $H^{p+\ell}(\Omega)$) tels que :

$$\langle f,\bar{v}\rangle_{H^p(\Omega)\times[H^p(\Omega)]'} + \langle g,\emptyset\rangle_{\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{r+p-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times\prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

(resp $\langle f,\bar{v}\rangle_{H^p(\Omega)\times[H^p(\Omega)]'} = 0$) pour tout élément $(v,\emptyset)$ (resp v) appartenant à

$[H^p(\Omega)]' \times \prod_{j=1}^{\chi_p} H^{-r-p+k+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (resp $[H^p(\Omega)]'$) vérifiant $\mathcal{P}_p^*(v,\emptyset) = 0$ (resp $\mathcal{P}_p^* v=0$) si $\chi_p > 0$ (resp $\chi_p = 0$), $\mathcal{P}_p^*$ désignant l'adjoint de $\mathcal{P}_p$ considéré pour $\ell = 0$.

V. APPLICATIONS.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \varphi(x) = 0\} \\ \operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0 \text{ si } x \in \Gamma \end{cases}$$

Dans [2], M.S. Baouendi et C. Goulaouic ont étudié l'opérateur défini sur Ω par

$$Au(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} D^\beta \left(a_{\alpha\beta}(x)\, \varphi(x)\, D^\alpha u(x)\right)$$

Ils ont montré que si la forme définie par

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} a_{\alpha\beta}(x)\, \varphi(x)\, D^\alpha u(x)\, \overline{D^\beta v(x)}\, dx$$

est coercive sur l'espace $V = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \sqrt{\varphi}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq 1\}$ et si les coefficients $a_{\alpha\beta}$ appartiennent à $C^\infty(\bar{\Omega})$, alors :

($*$) A est un isomorphisme de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ sur lui-même.

Nous nous proposons ici de montrer comment l'étude faite dans les chapitres précédents permet de mettre en évidence une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés à la frontière et satisfaisant à la propriété ($*$). Nous nous limiterons essentiellement à deux exemples, le premier d'entre eux mettant en évidence un exemple d'opérateurs elliptiques dégénérés vérifiant la propriété ($*$) et étant hypoelliptique sur R^n, ce qui n'est pas le cas de l'opérateur A étudié par M.S. Baouendi et C. Goulaouic (cf [9]).

La méthode utilisée ici pour obtenir la régularité est inspirée de [7].

V.1. Opérateurs qui dégénèrent sur le bord en l'opérateur identité.

V.1.1. Notations, hypothèses et résultats.

Pour k entier > 2, on désigne par $W^1_{k/2,1}(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^1_{k/2,1}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ ; \varphi^{k/2}\, D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq 1\}$$

et pour $p \in \mathbb{N}$, par $W^{2+p}_{k/2,2}(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids

$$W^{2+p}_{k/2,2}(\Omega) = \{u \in H^p(\Omega) \ ; \ \varphi^k \ u \in H^{p+2}(\Omega)\} \ .$$

Munis de la norme canonique, ces espaces sont des espaces de Hilbert.

Soit $L_1(x,D_x)$ l'opérateur aux dérivées partielles défini sur Ω par

$$L_1(x,D_x) \ u(x) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1 \\ |\beta|\leq 1}} D^\beta \ (a_{\alpha\beta}(x) \varphi^k(x) \ D^\alpha \ u(x)$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ et où k est un entier > 2. Nous supposerons que la forme $a_1(u,v)$ définie par

$$a_1(u,v) = \int_\Omega \ a_{\alpha\beta}(x) \varphi^k \ D^\alpha \ u(x) \ \overline{D^\beta \ v(x)} \ dx$$

est coercive sur l'espace

$$W^1_{k/2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ \varphi^{k/2} \ D^\alpha \ u \in L^2(\Omega), \ |\alpha| \leq 1\},$$

c'est-à-dire qu'il existe deux constantes C et μ avec C > 0 telles que pour tout u $W^1_{k/2}(\Omega)$, on ait :

$$\mathrm{Re} \ a_1(u,u) \geq C\| u\|^2_{W^1_{k/2}(\Omega)} - \mu\|\varphi^{1/2} \ u\|_{L^2(\Omega)} \ .$$

Nous supposerons de plus que les coefficients de $L_1(x,D_x)$ sont tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant :

(C) Pour tout $x_0 \in \Gamma$, tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x_0) \quad \xi^{\alpha+\beta} \ \varphi^k(x) + \lambda \neq 0$$

(H) Il existe C > 0 telle que pour tout $u \in W^1_{k/2,1}(\Omega)$, on ait

$$\mathrm{Re} \ \{a_1(u,u)\} + \mathrm{Re} \ \lambda \ \| u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C\| u\|_{W^1_{k/2,1}(\Omega)}$$

Nous noterons alors $L(x,D_x)$ l'opérateur défini sur Ω par :

$$L(x,D_x)u = L_1(x,D_x) \ u + \lambda \ u.$$

Par exemple, l'opérateur $L(x,D_x) = \sum_{i=1}^{n} D_i(\varphi^k \ D_i \ .) + \lambda$ vérifie ces hypothèses pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} \ \lambda > 0$.

On a alors les résultats suivants :

THÉORÈME V.1. <u>Si l'opérateur</u> $L_1(x,D_x)$ <u>vérifie les hypothèses précédentes alors</u>, <u>pour tout</u> p <u>entier</u> $\geq$ 0, <u>l'opérateur</u> $L(x,D_x)$ <u>est un isomorphisme algébrique et topologique de</u> $W^{2+p}_{k/2,2}(\Omega)$ <u>sur</u> $H^p(\Omega)$.

Corollaire V.1. Sous les hypothèses précédentes, l'opérateur $L(x,D_x)$ est un isomorphisme algébrique et topologique de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sur lui-même.

Remarque. Si l'opérateur $L_1(x,D_x)$ défini sur $\mathbb{R}^n$ et elliptique en tout point de $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ et si de plus il vérifie la condition suivante :

(C') Il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $x_0\in\Gamma$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ on ait

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x_0)\ \xi^{\alpha+\beta}\varphi^k(x) + \lambda \neq 0$$

alors l'opérateur $L(x;D_x) = L_1(x;D_x) + \lambda$ est hypoelliptique.

Par exemple, l'opérateur $L(x,D_x) = \sum_{i=1}^{n} D_i(\varphi^k D_i\ .) + \lambda$ avec λ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ et $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^n$ et réalise un isomorphisme de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

L'hypoellipticité de tels opérateurs a été montrée dans [19] en remarquant que ces opérateurs entrent dans la classe des opérateurs étudiés dans [10]. Cependant ce résultat peut être établi très simplement à partir des résultats de [13].

V.1.2. Démonstration du théorème V.1.

1ère étape. $p = 0$ Le théorème I.2 et un argument de perturbation par des opérateurs compacts montrent que $L(x,D_x)$ est à indice de $W^2_{k/2,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$; l'image $L(x,D_x)\ \{W^2_{k/2,2}(\Omega)\}$ est donc fermée dans $L^2(\Omega)$.

Soit $f\in\mathcal{D}(\Omega)$. Puisque $L(x,D_x)$ est fortement coercif sur $W_{k/2,1}(\Omega)$ il existe $u\in W^1_{k/2,1}(\Omega)$ tel que $Lu = f$.

Par "cartes locales" "partition de l'unité" et en utilisant la "méthode des "quotients différentiels tangentiels" on démontre que u appartient à $W^2_{k/2,2}(\Omega)$ ce qui montre que l'image $L(x,D_x)\ \{W^2_{k/2,2}(\Omega)\}$ est dense dans $L^2(\Omega)$; cet espace étant fermé dans $L^2(\Omega)$ on en déduit que l'opérateur $L(x,D_x)$ est surjectif de $W^2_{k/2,2}(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$.

Soit maintenant $u\in W^2_{k/2,2}(\Omega)$ tel que $L(x,D_x)u = 0$; puisque $L(x,D_x)$ entre dans la classe d'opérateurs étudiée au chapitre I, on a : $u\in W^3_{k/2,2}(\Omega)$. Comme $W^3_{k/2,2}(\Omega)\hookrightarrow W_{k/2,1}(\Omega)$, la forte coercivité de $L(x,D_x)$ sur $W^1_{k/2,1}(\Omega)$ implique que $u = 0$.

Ceci montre que $L(x,D_x)$ est injectif de $W^2_{k/2,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$; le théorème V.1 est donc démontré dans le cas $p = 0$.

2ème étape. $p > 0$. La première étape montre que l'opérateur $L(x,D_x)$ est un opérateur à indice, d'indice nul, de $W^2_{k/2,2}(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$. Le théorème I.2 montre que l'opérateur $L(x,D_x)$ est à indice, d'indice nul, de $W^{2+p}_{k/2,2}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$, pour tout $p \geq 0$.

Puisque, pour tout entier $p > 0$, on a $W^{2+p}_{k/2,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1}_{k/2,1}(\Omega)$ la forte coercivité de $L(x,D_x)$ sur $W^1_{k/2,1}(\Omega)$ montre que

$$\operatorname{Ker} L(x,D_x) \cap W^{2+p}_{k/2,2}(\Omega) = \{0\}.$$

Ceci montre que $L(x,D_x)$ est un isomorphisme algébrique de $W^{2+p}_{k/2,2}(\Omega)$ sur $H^p(\Omega)$; le théorème de Banach permet alors de conclure.

V.2. Opérateurs qui dégénèrent sur le bord en un opérateur du type de Fuchs.

V.2.1. Notations, hypothèses et résultats.

Pour $k > 3$, on désigne par $W_k(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids :

$$W_k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ \varphi^{1/2}(x)\, D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \le 1 \text{ et } \varphi^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \le 2\}$$

et par $V(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids :

$$V(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ \varphi^{1/2}(x)\, D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \le 1\}\ .$$

Pour tout entier $p \ge 0$, on désigne par $W^{4+p}_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^{4+p}_{k-1/2,2,1}(\Omega) = \{u \in H^{1+p}(\Omega) \ ; \varphi u \in H^{2+p}(\Omega) \text{ et } \varphi^k\, u \in H^{4+p}(\Omega)\}$$

et par $W^{2+p}_1(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^{2+p}_1(\Omega) = \{u \in H^{1+p}(\Omega) \ ; \ \varphi u \in H^{2+p}(\Omega)\}$$

Munis de la norme canonique ces espaces sont des espaces de Hilbert.

Soient $L_1(x,D_x)$ et $L_2(x,D_x)$ deux opérateurs aux dérivées partielles définies sur Ω par :

$$L_1(x,D_x)u(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \le 2 \\ |\beta| \le 2}} D^\beta(a_{\alpha\beta}(x)\, \varphi^k(x)\, D^\alpha u(x))$$

$$L_2(x,D_x)u(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \le 1 \\ |\beta| \le 1}} D^\beta(b_{\alpha\beta}(x)\, \varphi(x)\, D^\alpha u(x))$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ sont indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ et où k est un entier > 3.

Nous noterons $L(x,D_x)$ l'opérateur défini sur Ω par :

$$L(x,D_x)\, u(x) = L_1(x,D_x)u(x) + L_2(x,D_x)u(x)$$

et nous supposerons que $L(x,D_x)$ vérifie les conditions suivantes :

(C) Pour tout $x_0 \in \Gamma$, tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$L_0(x_0,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x_0)\ \xi^{\alpha+\beta}\varphi^{k-1}(x) + \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x_0)\ \xi^{\alpha+\beta} \neq 0$$

(H) L'opérateur $L(x,D_x)$ est fortement coercif sur l'espace $W_k(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_k(\Omega)$, on ait

$$\mathrm{Re}\{\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq 2\\ |\beta|\leq 2}} a_{\alpha\beta}(x)\ \varphi^k(x)\ D^\alpha u(x)\overline{D^\beta u(x)}dx + \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ |\beta|\leq 1}} b_{\alpha\beta}(x)\varphi(x)D^\alpha u(x)\ \overline{D^\beta u(x)}dx\} \geq C\|u\|^2_{W_k(\Omega)} \quad (*) .$$

Sur l'opérateur $L_2(x,D_x)$, nous ferons l'hypothèse (H'). L'opérateur $L_2(x,D_x)$ est fortement coercif sur l'espace $V(\Omega)$ c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in V(\Omega)$, on ait :

$$\mathrm{Re}\{\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\ |\beta|\leq 1}} b_{\alpha\beta}(x)\varphi(x)\quad D^\alpha u(x)\ \overline{D^\beta u(x)}\ dx\} \geq C\|u\|^2_{V(\Omega)} .$$

Par exemple, l'opérateur $L(x,D_x) = \sum_{i=1}^n D_i^2(\varphi^k D_i^2\cdot) + \sum_{i=1}^n D_i(\varphi\ D_i\cdot) + 1$ avec k entier > 3, vérifie les hypothèses précédentes.

On a alors :

THÉORÈME V.2.-Si l'opérateur $L(x,D_x) = L_1(x,D_x) + L_2(x,D_x)$ vérifie les hypothèses (C), (H) et (H'), alors pour tout $p \geq 0$ l'opérateur $L(x,D_x)$ est un isomorphisme algébrique et toplogique de $W^{4+p}_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ sur $H^p(\Omega)$.

COROLLAIRE V.2. Sous les hypothèses précédentes, l'opérateur $L(x,D_x)$ est un isomorphisme algébrique et topologique de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sur lui-même.

V.2.2. Démonstration du théorème V.2.

1ère étape. $p = 0$. Les résultats de [2] (cf aussi [7]) montrent que l'opérateur $L_2(x,D_x)$, sous l'hypothèse (H'), est un isomorphisme de $W_1^{2+p}(\Omega)$ sur $H^p(\Omega)$ pour $p \geq 0$. Le théorème I.2 et un argument de perturbation par des opérateurs compacts montrent que $L(x,D_x)$ est à indice de $W^4_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$; l'image $L(x,D_x)\ \{W^4_{k-1/2,2,1}(\Omega)\}$ est donc fermée dans $L^2(\Omega)$.

En utilisant la même méthode que pour la démonstration du théorème V.1. et des lemmes techniques analogues à ceux de [7]. On démontre que cette image est dense dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre que $L(x,D_x)$ est surjectif de $W^4_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$.

Soit maintenant $u \in W^4_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ tel que $L(x,D_x) = 0$; le théorème I.2. montre que $u \in W^5_{k-1/2,2,1}(\Omega)$. Comme $W^5_{k-1/2,2,1}(\Omega) \hookrightarrow W_k(\Omega)$ la forte coercivité de $L(x,D_x)$ sur

$W_k(\Omega)$ implique que $u = 0$.

Le théorème V.2. est donc démontré dans le cas $p = 0$.

2ème étape. $p > 0$. La première étape montre que l'opérateur $L(x,D_x)$ est un opérateur à indice, d'indice nul de $W^4_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$. Le théorème I.2 montre que l'opérateur $L(x,D_x)$ est à indice, d'indice nul, de $W^{4+p}_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$, pour tout entier $p \geq 0$.

Puisque pour $p > 0$ on a $W^{4+p}_{k-1/2,2,1}(\Omega) \hookrightarrow W_k(\Omega)$, la forte coercivité de $L(x,D_x)$ sur $W_k(\Omega)$ montre que

$$\operatorname{Ker} L(x,D_x) \cap W^{4+p}_{k-1/2,2,1}(\Omega) = \{0\}.$$

Ceci montre que $L(x,D_x)$ est un isomorphisme algébrique de $W^{4+p}_{k-1/2,2,1}(\Omega)$ sur $H^p(\Omega)$; le théorème de Banach permet alors de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAOUENDI M.S. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Bull. Soc. France. 95 (1967), p. 45-87.

[2] BAOUENDI M.S. et GOULAOUIC C. - Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. Arch. Rat. Mec. Anal. 34 n° 5, 1969, p. 361-379.

[3] BOERO P. et PAVEC R. - Coercivité des formes sesquilinéaires intégrodifférentielles dans des espaces de Sobolev avec poids. C.R. Acad. Sci. Paris t. 270, 1970, p. 1416-1419.

[4] BOLLEY P. et CAMUS J. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable - J. Math pures et appl., t. 51, 1972, p. 428-436. Etude d'une classe de système d'opérateurs elliptiques et dégénérés. Publications des séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, fasc. II, 1973.

[5] BOLLEY P. et CAMUS J. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables. Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, 1973, p. 55-140.

[6] BOLLEY P. et CAMUS J. - Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. A paraître dans Annalis della Scualla Noramale di Pisa.

[7] BOLLEY P. et CAMUS J. - Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, p. 651-653.

[8] BOLLEY P., CAMUS J. et HANOUZET B. - Etude de l'analyticité et de la régularité de Gervey pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. A paraître au J. Math. pures et appl.

[9] HELLFER B. et ZUILY C. - Non hypoellipticité des opérateurs différentiels du type de Fuchs. Astérisque, n° 19, 1974.

[10] HÖRMANDER L. - Pseudo differential operators and hypoelliptic equations. Proc. Symp Pure Math. 10 (singular Integrals) p. 138-183.

[11] KANNAI Y. - Hypoelliptic ordinary differentials operators. Israel J. of Math. 13 (1972), p. 106-134.

[12] LIONS J.L. et MAGENES E. - Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, Dunod, Paris 1968.

[13] PRÉVOSTO D. - Opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière. Thèse de 3ème cycle, Rennes 1975.

[14] PRÉVOSTO D. et ROLLAND J. - Théorème d'indice et régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 279, Série A, 873-876, (1974).

[15] SHIMAKURA - Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. J. Math. Kyoto Univ., Vol. 9, n° 2, 1969, p. 275-335.

[16] TRIEBEL H. - Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ durch einen elliptishen differential operatoren zweiter ordnung. Math. Anal. 177, 1968, p. 247-264.

[17] VISIK M.I. et GRUSIN V.V. - On a class of higher order degenerate elliptic equations. Math. USSR Sbornik, Vol. 8, 1969, n° 1.

[18] VISIK M.I. et GRUSIN V.V. - Boundary value problems for elliptic equations de degenerate on the boundary of a domain. Math. USSR Sbornik, Vol. 9, 1969, n° 4.

[19] VISIK M.I. et GRUSIN V.V. - Degenerating elliptic differential and pseudo-differential operators. Russian Math. Surveys - Vol. 25 n° 4, 1970, p. 21-50.

Jacques ROLLAND
Mathématiques-Informatique
Université de Rennes I
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX