

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOHAMED SALAH BAOUENDI

CHARLES GOULAOUIC

Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 27-41

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____27_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES de CAUCHY PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ANALYTIQUES

par M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Il s'agit d'une extension des théorèmes classiques de Cauchy-Kovalevsky et Holmgren pour des problèmes de Cauchy pseudo-différentiels en les variables d'espace et différentiels en temps.

Soient Γ une variété analytique réelle compacte de dimension n , $T > 0$, P une fonction C^∞ sur $[T, T]$ à valeurs dans les opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre 1 sur Γ ; on note $A(\Gamma)$ l'espace des fonctions analytiques sur Γ ; on a :

Théorème 1. Pour tous $u_0 \in A(\Gamma)$ et $f \in C^0([-T, T], A(\Gamma))$, il existe $\varepsilon > 0$ et une unique fonction $u \in C^1([- \varepsilon, \varepsilon], A(\Gamma))$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - P(t, x, D_x) u(t, x) = f(t, x) \text{ pour } |t| < \varepsilon \\ u(0, x) = u_0(x). \end{array} \right.$$

De plus, pour $f \in C^\infty([-T, T], A(\Gamma))$ (resp. analytique en t), u est dans $C^\infty([- \varepsilon, \varepsilon], A(\Gamma))$ (resp. analytique sur $[- \varepsilon, \varepsilon] \times \Gamma$).

Théorème 2. Soit u une distribution sur $]-T, T[\times \Gamma$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - Pu = 0 \text{ pour } |t| < T \\ u = 0 \text{ pour } t < 0, \end{array} \right.$$

alors $u = 0$ dans $]-T, T[\times \Gamma$.

La méthode consiste essentiellement à trouver une chaîne décroissante $(E_s)_{s>0}$ d'espaces de Banach telle que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } A(\Gamma) = \bigcup_{s>0} E_s, \\ \text{ü) } \text{ Tout opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 1 est singulier de type 1 dans cette chaîne,} \\ \text{et à utiliser alors les résultats sur le problème de Cauchy abstrait dans une chaîne d'espaces (cf [10] [13]...). Pour certaines démonstrations, on renvoie à [2].} \end{array} \right.$$

On traite ainsi plus généralement des systèmes linéaires du 1^{er} ordre ou d'ordre supérieur, des problèmes de Cauchy caractéristiques du type de Fuchs (cf [1] pour le résultat abstrait et le cas différentiel). Le résultat de [9] et l'utilisation d'une chaîne d'algèbres de Banach $(E_s)_{s>0}$ permettent de résoudre des problèmes non linéaires, tels que l'existence et l'unicité d'une solution analytique pour le problème d'Euler (cf [3] pour une étude détaillée).

Certains problèmes de Cauchy non locaux ont été résolus dans [11] [12] et leurs références, mais sans résultats généraux.

I - Chaîne d'espaces de Banach de fonctions analytiques.

Soient X_1, \dots, X_r des champs de vecteurs réels analytiques sur Γ et qui engendrent l'espace tangent en chaque point de Γ ; l'existence de tels champs résulte du plongement analytique de Γ dans un espace \mathbf{R}^r (cf [8]).

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ avec $\alpha_j \in \{1, \dots, r\}$, on note $|\alpha| = 1$ et $X^\alpha = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_1}$; on note J l'ensemble de tels indices α .

On choisit sur Γ une mesure de Lebesgue μ à densité analytique; pour $s > 0$, on note

$$E_s = \left\{ u \in C^\infty(\Gamma) ; \|u\|_s = \sup_{\alpha \in J} \frac{\|X^\alpha u\|_{L^2(\Gamma)} s^{|\alpha|}}{|\alpha|!} < \infty \right\} .$$

Les espaces E_s , munis de la norme $\|\cdot\|_s$ constituent évidemment une chaîne décroissante d'espaces de Banach; on a le résultat :

Proposition 1. L'espace $A(\Gamma) = \bigcup_{s>0} E_s$.

D'abord, pour $u \in E_s$ on a

$$(1) \quad \left\| \left(\sum_{i=1}^r X_i^2 \right)^k u \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq r^k \|u\|_s s^{-2k} 2k! \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

et donc u est analytique d'après [6].

Inversement, soit $u \in A(\Gamma)$; en utilisant des cartes locales, on montre que u est dans un espace E_s grâce au lemme suivant :

Lemme 1. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $u \in A(\Omega)$, Y_1, \dots, Y_r des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 à coefficients analytiques sur Ω ; pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ tel que

$$\| Y^\alpha u \|_{L^2(K)} \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in J.$$

La preuve du lemme est un simple calcul consistant à montrer, par récurrence sur α , qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que, pour $\alpha \in J$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$(2) \quad \| D^\beta Y^\alpha u \|_{L^2(K)} \leq C_1^{|\alpha|+1} C_2^{|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)!$$

(D^β désigne $D_1^{\beta_1} \dots D_n^{\beta_n}$ et $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$).

II - Les opérateurs pseudo-différentiels analytiques sont singuliers dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$.

On montre le résultat :

Proposition 2. Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d sur Γ ($d \in \mathbf{N}$); alors P est un opérateur singulier de type d dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$, c'est-à-dire qu'il existe $s_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour $0 < s' < s \leq s_0$, $P \in \mathcal{L}(E_s, E_{s'})$ et

$$\| P \|_{\mathcal{L}(E_s, E_{s'})} \leq \frac{C}{(s - s')^d} .$$

Démonstration.

1° Réduction au cas $d = 0$. Admettons provisoirement la proposition 2 dans le cas $d = 0$. La multiplication par une fonction analytique est un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0, donc borné dans la chaîne $(E_s)_{0 < s \leq s_1}$ pour s_1 convenable. Chaque X_j est un opérateur singulier de type 1 dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$; en effet, pour $0 < s' < s$, $u \in E_s$ et $\alpha \in J$, on a :

$$\| X_j^\alpha u \|_{L^2(\Gamma)} \leq \| u \|_s s^{-|\alpha|-1} (|\alpha| + 1) !$$

et donc

$$\| X_j u \|_{s'} \leq \| u \|_s \sup_{\alpha \in J} s^{-|\alpha|-1} s^{|\alpha|} (|\alpha| + 1)$$

$$\| X_j u \|_{s'} \leq \frac{e^{-1}}{s - s'} \| u \|_s .$$

Le système X_1, \dots, X_r étant elliptique, on en déduit que tout opérateur différentiel d'ordre d à coefficients analytiques sur Γ est singulier de type d dans $(E_s)_{s>0}$.

Il existe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques Q et R d'ordre -2 et -1 respectivement, tels que :

$$(3) \quad \left(\sum_{j=1}^r X_j^2 \right) Q = I + R .$$

Si P est d'ordre 1 , les opérateurs $P_j = X_j Q P$ sont d'ordre 0 , donc bornés dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$; il en résulte qu'alors

$$(4) \quad P = \sum_{j=1}^r X_j P_j - R P$$

est singulier de type 1 dans $(E_s)_{s>0}$.

Si P est d'ordre $d > 1$ on peut encore terminer la démonstration en utilisant une parametrix de l'opérateur elliptique $\sum_{j=1}^r X_j^{2d}$.

2° Démonstration de la proposition 2 pour $d = 0$. Soit donc P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ .

Soit $u \in E_s$; on veut estimer $X^\alpha P u$ pour $\alpha \in J$; pour α, β dans J , on note $\beta \leq \alpha$ lorsque β est une sous-suite de α ; on a

$$(5) \quad X^\alpha P u = \sum_{\beta \leq \alpha} K_{\alpha\beta} X^\beta u, \quad (1)$$

où $K_{\alpha\beta}$ est un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 de la forme

$$(6) \quad K_{\alpha\beta} = [X_{\gamma_1}, [X_{\gamma_2}, \dots [X_{\gamma_1}, P] \dots]] \text{ pour } 1 = |\alpha| - |\beta| > 0$$

$$\text{et } K_{\alpha\alpha} = P.$$

Un simple calcul de majorations montre que la proposition 2 pour $d = 0$ résulte alors du lemme suivant :

Lemme 2. Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ . Il existe $M > 0$ tel que l'on ait pour tout $\gamma \in J$

$$\| K_\gamma \|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Gamma))} \leq M^{|\gamma|+1} |\gamma| !$$

$$\text{où } K_\gamma = [X_{\gamma_1}, [X_{\gamma_2}, \dots [X_{\gamma_{|\gamma|}}, P] \dots]] .$$

Pour démontrer ce lemme, on doit décrire plus précisément les opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur Γ (cf [4] [5] [7]) :

a) Le noyau \tilde{p} de P est analytique sur $\Gamma \times \Gamma$ sauf sur la diagonale.

(1) Dans cette somme, chaque terme est répété le nombre de fois que β peut être extrait de α .

b) Localement dans un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$, le noyau est de la forme

$$(7) \quad p(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,x-y) + r(x) \delta_{(x-y)} + q(x,y)$$

où : r, q sont analytiques, chaque $p_k(x,z)$ est pseudo-homogène de degré $-n+k$ en z , $\int_{S_{n-1}} p_0(x,z) dz = 0$ (S_{n-1} désignant la sphère unité dans \mathbf{R}^n) et, pour tout compact $K \subset U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que chaque p_k est analytique dans le domaine

$$(8) \quad \{(x,z) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n, \text{dist}(x,K) < \varepsilon \text{ et } |\text{Im}z| < \varepsilon |\text{Re}z| \leq \varepsilon^2\}$$

et la série converge uniformément dans ce domaine.

Soient $\tilde{\Omega}_1 \subset \tilde{\Omega}$ des ouverts de Γ et $v \in L^2(\Gamma)$; pour obtenir le lemme 2 il suffit de montrer qu'il existe une constante $M_1 > 0$ telle que :

$$(9) \quad \|K_\gamma v\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)} \leq M_1^{|\gamma|+1} |\gamma|! \text{ pour tout } \gamma \in J.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_1)$ valant 1 sur un voisinage de $\tilde{\Omega}_1$;

on note ω le support de $1 - \varphi$; on a :

$$(10) \quad \|K_\gamma(1-\varphi)v\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)} \leq \|v\|_{L^2(\Gamma)} \left(\int_{\tilde{\Omega}_1 \times \omega} |\tilde{k}_\gamma(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \right)^{1/2}$$

où \tilde{k}_γ est le noyau de K_γ et est donné par

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_\gamma(x, y) = \left(X_{\gamma_1}(x) + X_{\gamma_1}^*(y) \right) \dots \left(X_{\gamma_{|\gamma|}}(x) + X_{\gamma_{|\gamma|}}^*(y) \right) \tilde{p}(x, y) \\ \text{avec } \int_{\Gamma} X_j u \cdot v \, d\mu = - \int_{\Gamma} u \cdot X_j^* v \, d\mu . \end{array} \right.$$

Le lemme 1 (avec n remplacé par $2n$), (10)(11) et l'analyticité de \tilde{p} sur $\tilde{\Omega}_1 \times \omega$ impliquent l'existence de $M_2 > 0$ telle que

$$\|K_{\gamma} (1-\varphi) v\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)} \leq \|v\|_{L^2(\Gamma)} M_2^{|\gamma|+1} |\gamma| ! \text{ pour tout } \gamma \in J.$$

Pour démontrer (9) il suffit donc d'obtenir de bonnes estimations de $K_{\gamma} \varphi v$ et, par cartes locales, le problème peut s'étudier dans un ouvert U de \mathbb{R}^n où la description du noyau de P est donnée par (7) ; on peut supposer que U contient la boule de centre 0 et rayon 1 et prendre $K = \{0\}$; pour $\varepsilon > 0$ correspondant à ce K , on note $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| < \varepsilon/8\}$; il suffit alors de montrer le lemme :

Lemme 3 : Il existe $M_3 > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\gamma \in J$ et pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\left(\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} k_{\gamma}(x, y) u(y) \, dy \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M_3^{|\gamma|+1} |\gamma| ! \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

où k_{γ} désigne dans la carte locale le noyau de l'opérateur K_{γ} .

La fonction k_{γ} est de la forme

$$(12) \quad k_{\gamma}(x, y) = (Y_{\gamma_1}(x) + Y_{\gamma_1}^*(y)) \dots (Y_{\gamma_{|\gamma|}}(x) + Y_{\gamma_{|\gamma|}}^*(y)) p(x, y)$$

où Y_j est le champ de vecteur associé à X_j dans U et Y_j^* est défini par

$$\int_U Y_j u \cdot v \, dx = - \int u \cdot Y_j^* v \, dx \quad \text{pour } u, v \text{ dans } C_0^{\infty}(U).$$

La contribution de q et $r(x)\delta_{(x-y)}$ (dans 7) à k_{γ} donné par (12) fournit, grâce au lemme 1, une estimation conforme à celle annoncée dans le lemme 3; on peut donc supposer

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, x-y) \text{ et alors}$$

$$k_{\gamma}(x, y) = B_{\gamma_1} \dots B_{\gamma_{|\gamma|}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, z) \right), \text{ où } z = x - y \text{ et}$$

$B_j = B_j(x, z, D_x, D_z)$ est, pour $1 \leq j \leq r$, un opérateur du premier ordre en D_x et $z_k D_{z_1}$ pour $1 \leq k, 1 \leq n$, à coefficients analytiques.

Une démonstration assez technique, pour laquelle nous renvoyons à [2] conduit à l'existence d'une constante M_4 telle que l'on ait pour $\gamma \in J$

$$\int_{|z| < \frac{\varepsilon}{4}} \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} B^{\gamma} p_k(x, z) \right| dz \leq M_4^{|\gamma|+1} |\gamma| !$$

ce qui ramène la démonstration du lemme 3 à l'étude de la contribution de p_0 ; pour celle-là on écrit

$$B_i(x, z, D_x, D_z) = \mathfrak{B}_i(x, D_x, zD_z) + \sum_{j=1}^n \mathfrak{B}_{i,j}(x, z, D_x, D_z) z_j$$

où: \mathfrak{B}_i est un opérateur du premier ordre en D_x et $z_k D_{z_k}$ pour $1 \leq k, l \leq n$ à coefficients analytiques en x et indépendants de z ; $\mathfrak{B}_{i,j}$ est un opérateur du premier ordre en $D_x, z_k D_{z_k}$ pour $1 \leq k, l \leq n$ à coefficients analytiques.

On a alors :

$$B^\gamma p_0 = \mathfrak{B}_{\gamma_1} \dots \mathfrak{B}_{\gamma_{|\gamma|}} p_0 + \mathfrak{R}_\gamma p_0 = \mathfrak{B}^\gamma p_0 + \mathfrak{R}_\gamma p_0$$

et on montre que la contribution de $\mathfrak{R}_\gamma p_0$ se majore comme précédemment celle de $\sum_{k=1}^{\infty} B^\gamma p_k$ (cf [2]).

Pour $\mathfrak{B}^\gamma p_0$ on obtient aisément le résultat :

Lemme 4. Pour tout $\gamma \in J$, $\mathfrak{B}^\gamma p_0(x, z)$ est une fonction analytique dans $\bar{\Omega} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, homogène de degré $-n$ en z et vérifiant :

$$\int_{S_{n-1}} \mathfrak{B}^\gamma p_0(x, z) dz = 0 \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

De plus, il existe $M_5 > 0$ tel que l'on ait pour tout $\gamma \in J$ et α, β dans \mathbb{N}^n ,

$$\sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ z \in S_{n-1}}} \left| D_x^\alpha D_z^\beta \mathfrak{B}^\gamma p_0(x, z) \right| \leq M_5^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+1} (|\alpha|+|\beta|+|\gamma|) !$$

ce qui, grâce aux résultats bien connus sur les intégrales singulières, permet de majorer la contribution de $\mathfrak{B}^Y p_0$ et termine l'esquisse de démonstration du lemme 3 et donc de la proposition 2.

III - Application au problème de Cauchy

Pour déduire le théorème 1 des propositions 1 et 2, il suffit d'appliquer le résultat abstrait suivant (cf. [10] [13] pour sa démonstration) :

Soient $(E_s)_{0 < s \leq s_0}$ une chaîne décroissante d'espaces de Banach, $T > 0$ et, pour tout $t \in [-T, T]$, $P(t)$ un opérateur linéaire dans $U E_s$ vérifiant :

$$0 < s \leq s_0$$

Il existe $C > 0$ tel que pour $0 < s' < s \leq s_0$, $P \in C^0([-T, T], \mathcal{L}(E_s, E_{s'}))$

$$\text{et } \sup_{|t| \leq T} \|P(t)\|_{\mathcal{L}(E_s, E_{s'})} \leq \frac{C}{s-s'}$$

Alors pour tout $s \in]0, s_0]$, il existe $\varepsilon \in]0, T[$ tel que, pour tout $f \in C^0([-T, T], E_{s_0})$ et tout $u_0 \in E_{s_0}$, il existe une unique fonction $u \in C^1([- \varepsilon, \varepsilon], E_s)$ vérifiant

$$\begin{cases} u' - P u = f & \text{dans }]-\varepsilon, \varepsilon[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus, si f et P sont holomorphes dans $\{t \in \mathbb{C}; |t| < T\}$, alors u est holomorphe dans $\{t \in \mathbb{C}; |t| < \varepsilon\}$.

La régularité C^∞ (dans le théorème 1) se démontre de façon classique sur l'équation différentielle.

Pour le théorème 2 (résultat d'unicité) on résoud le problème transposé dans des espaces de fonctionnelles analytiques sur Γ , en utilisant la densité de E_s (pour $s > 0$) dans $A(\Gamma)$.

Remarque (cas non linéaire). Pour traiter des problèmes de Cauchy non linéaires pseudodifférentiels analytiques (cf [3]), on utilise aussi un théorème abstrait de [9] mais avec une chaîne $(E_s)_{0 < s}$ constituée d'algèbres de Banach. Avec les notations du paragraphe I, en notant $\|\cdot\|_\rho$ une norme holdérienne d'exposant $\rho \in]0, 1[$, on note pour $s > 0$

$$E_s = \left\{ u \in C^\infty(\Gamma) ; \sum_{\alpha \in J} \frac{\|X^\alpha u\|_\rho s^{|\alpha|}}{|\alpha|!} < \infty \right\}$$

et on vérifie que les propositions 1 et 2 sont encore vraies avec ces espaces E_s , qui sont des algèbres de Banach.

M.S. BAOUENDI

Université de Paris VI

C. GOULAOUIC

Université de Paris XI

Bibliographie.

- [1] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC ;
Cauchy problems with multiple characteristic initial hypersurface;
Comm. Pure Appl. Math 26 (1973) 455-475.
- [2] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC;
Cauchy problems for analytic pseudo-differential operators ;
Comm. in P.D.E. (1976).
- [3] M.S. BAOUENDI and C. GOULAOUIC;
Nonlinear Cauchy problems (to appear)
- [4] L. BOUTET de MOUVEL;
Operateurs pseudo-differentiels analytiques et problèmes aux limites
elliptiques;
Ann. Inst. Fourier 19 (1970) 169-268.
- [5] L. BOUTET de MOUVEL and P. KREE;
Pseudo-differential operators and Gevrey classes;
Ann. Inst. Fourier 17 (1967) 295-323.
- [6] T. KOTAKE and N.S. NARASIMHAN;
Fractional powers of a linear elliptic operator;
Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 449-471.

- [7] W. MARGULIES;
Analytic singular integral operators;
Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 391-393.
- [8] C.B. MORREY;
The analytic embedding of abstract real analytic manifolds;
Annals of Math. 68 (1958) 159-201.
- [9] L. NIRENBERG;
An abstract form of the non linear Cauchy-Kovalewsky theorem.
J. Differential Geometry 6 (1972) 561-576.
- [10] L.V. OVYANNIKOV ;
A singular operator in a scale of Banach spaces;
Dokl. Akad. Nauk SSSR 263.4 (1965) 819-822 =
Soviet Math Dokl. 6 (1965) 1025.
- [11] L.V. OVYANNIKOV;
Non local Cauchy problem in fluid dynamics;
Actes Congres Intern. Math. Nice 3 (1970) 137-142.
- [12] L.V. OVYANNIKOV;
A non linear Cauchy problem in a scale of Banach spaces.
Dokl. Akad. Nauk. SSSR 200.4 (1971) =
Soviet Math. Dokl. 12 .5 (1971) 1497-1502.
- [13] F. TREVES;
Ovyannikov theorem and hyperdifferential operators ;
Notas de Matematica 46. IMPA, Rio-de-Janeiro, Brazil (1968).