Journées Équations aux dérivées partielles

Jean-François Nourrigat

Problèmes mixtes pour des systèmes hyperboliques singuliers

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 251-261
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____251_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.251-261

PROBLÈMES MIXTES
POUR DES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES SINGULIERS

par
Jean François NOURRIGAT

Le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques singuliers à partie principale symétrisable a été étudié par Alinhac [1], [2], qui a démontré d'autre part que l'étude d'un opérateur hyperbolique du type de Fuchs peut se ramener à celle d'un tel système.

D'autre part Kreiss [3] et Sakamoto [4] ont démontré des théorèmes d'existence et d'unicité pour les problèmes mixtes dans un demi-espace respectivement pour des systèmes et pour des opérateurs strictement hyperboliques avec des conditions aux limites vérifiant l'hypothèse de Lopatinsky uniforme.

Nous nous proposons ici d'étudier les problèmes mixtes dans un demi-espace pour des systèmes présentant le même type de singularité sur la surface initiale que ceux de [1], [2], mais où la partie principale et les conditions aux limites vérifient les mêmes hypothèses d'hyperbolicité stricte et la même condition de Lopatinsky uniforme qu'en [3], [4].

Plus précisément, en utilisant le symétriseur construit dans [3], nous démontrons pour le problème étudié et le problème adjoint des estimations à priori qui nous fournissent un théorème d'existence et d'unicité dans un espace L^2 avec poids.

I - ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

ℓ, n et p sont des entiers ≥ 1, avec $\ell \leq p$.

n est la dimension de l'espace et p l'ordre du système.

L'ouvert considéré est

$$\Omega = \{(t,y) \mid t > 0 \quad y_1 > 0 \quad y_j \in R \text{ pour } 2 \leq j \leq n\}$$

Nous emploierons la notation $y' = (y_2 \ldots y_n)$ et nous désignerons par Σ la surface $\{y_1 = 0\}$.

1 . Hypothèses sur l'opérateur

On considère dans Ω le système différentiel suivant :

$$L = t \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} tAj(t,y) \frac{\partial}{\partial y_j} + B(t,y) \tag{1.1}$$

où les $A_j(t,y)$ $(1 \leq j \leq n)$ et $B(t,y)$ sont des matrices de type (p,p), indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega}$. On suppose que $A_j(t,y)$ est constant en dehors d'un compact de $\overline{\Omega}$ et que $B(t,y)$ est borné.

On associe à L l'opérateur :

$$L_o = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} A_j(t,y) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Nous supposerons vérifiées les 2 hypothèses suivantes :

H1) L'opérateur L_o est strictement hyperbolique pour $(t,y) \in \overline{\Omega}$.
Autrement dit $\forall (t,y) \in \overline{\Omega}$, $\forall \eta = (\eta_1 \ldots \eta_n) \in R^n - \{o\}$ les valeurs propres de la matrice $\sum_1^n A_j(t,y)\, \eta_j$ sont réelles et distinctes.

H2) Pour $(t,y) \in \overline{\Omega}$, la matrice $A_1(t,y)$ est diagonale, et les éléments $a_j(t,y)$ de la diagonale vérifient :

$$\begin{cases} a_j(t,y) < 0 \text{ pour } j \leq \ell \\ a_j(t,y) \quad 0 \text{ pour } j \geq \ell + 1 \end{cases}$$

L'hypothèse H1) implique que la matrice A_1 est diagonalisable. On ne restreint donc pas la généralité en la supposant diagonale.

2. Hypothèse de Lopatinsky.

Sur la surface Σ on va imposer des conditions de la forme :

$$Pu_o = g$$

où u_o désigne la trace de u sur Σ, $P(t,y')$ est une matrice de type (p,ℓ), indéfiniment dérivable pour $t \geq 0$ et $y' \in R^{n-1}$, constante en dehors d'un compact. Nous ferons l'hypothèse :

H3) Dans un voisinage de Σ, la matrice P satisfait à la condition de Lopatinsky uniforme par rapport à l'opérateur L_o.

Pour la définition de cette condition, voir Kreiss [3]

3. Enoncé des théorèmes

Désignons par V l'espace des distributions $u \in (L^2(\Omega))^p$ telles que

$$t\frac{\partial u}{\partial t} \in (L^2(\Omega))^p \text{ et } t\frac{\partial u}{\partial y_j} \in (L^2(\Omega))^p \quad (1 \leq j \leq n).$$

THÉORÈME 1. - Sous les hypothèses H1, H2, et H3, il existe $c > 0$ et $\sigma_0 > 0$ tels que pour tout $u \in V$ et pour tout $\sigma > \sigma_0$ on ait :

(1.2) $\sigma\|u\|^2 + |t^{1/2}u_0|^2 \leq c(\frac{1}{\sigma}\|(L+\sigma)u\|^2 + |t^{1/2}Pu_0|^2)$.

On adopte les notations suivantes

$\| \ \|$ et $(\ )$ désigne la norme et le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^p$

$| \ |$ et $< \ >$ jouent le même rôle dans $(L^2(\Sigma))^p$.

THÉORÈME 2. - Sous les hypothèses H1, H2, H3, il existe $\sigma_1 > 0$ tel que pour tout $\sigma > \sigma_1$, pour tout f et φ tels que

$$t^{-\sigma}f \in (L^2(\Omega))^p \qquad t^{1/2-\sigma}\varphi \in (L^2(\Sigma))^p,$$

il existe un u tel que

$$\begin{cases} t^{-\sigma}u \in L^2(\Omega)^p \\ Lu = f \\ Pu_0 = \varphi \end{cases}$$

La trace de u sur Σ a bien un sens si u vérifie les conditions précédentes et appartient à $H^{-1/2}_{loc}(\Sigma)$

II - OPÉRATEURS PSEUDO DIFFÉRENTIELS DÉPENDANT DE PARAMÈTRES

n et p sont des entiers ≥ 1.

(x,y') désigne la variable de R^n $(x \in R, y' \in R^{n-1})$.

(ξ, η') désigne la variable duale,

σ est un paramètre ≥ 1, k un paramètre > 0, et m un nombre réel.

DÉFINITION 2.1. - On désigne par $S^m_{k,\sigma}$ l'ensemble des matrices $a(x,y',\xi,\eta')$ de type (p,p) indéfiniment dérivables par rapport à toutes les variables, et ayant les propriétés suivantes :

a) Pour $0 < k < 1$, le support en (x,y) de a est inclus dans une boule de rayon 1 de R^n, et pour tout multi-indice $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ il existe $C > 0$ tel que :

$$|D^\alpha_x D^\beta_y D^\gamma_\xi D^\delta_\eta a(x,y,\xi,\eta)| \leq c\,(\sigma + |\xi| + k\,|\eta|)^{m-\gamma-\delta}k^\delta$$

b) Pour $k \geq 1$, le symbole a est indépendant de y, son support en x est inclus dans un segment de largeur 1, et pour tout multi-indice (α, γ, δ) il existe $C > 0$ tel que:

$$|D^\alpha_x D^\gamma_\xi D^\delta_\eta a(x,\xi,\eta)| \leq c(\sigma + |\xi| + k|\eta|)^{m-\gamma-\delta}\,k^\delta$$

On munit $S^m_{k,\sigma}$ de la famille de semi-normes

$$N^{q,m}_{k,\sigma}(a) = \sup_{\alpha+\beta+\gamma+\delta \leq q} \ \sup_{(x,y,\xi,\eta)} \frac{|D^\alpha_x D^\beta_y D^\gamma_\xi D^\delta_\eta\, a|}{(\sigma+|\xi|+k|\eta|)^{m-\gamma-\delta} k^\delta}$$

qui en fait un espace de Fréchet.

On pose $A = \sigma p(a)$. $a_o b$ désigne le symbole composé de a et b. a^* désigne le symbole de l'opérateur adjoint de A, et a^H la matrice adjointe de a.

DÉFINITION 2.2. - L'espace $H^s_{k,\sigma}$ $(s \in R)$ est l'espace $H^s(R^n)$ muni de la norme

$$\|u\|_{s,k,\sigma} = \|(\sigma+|\xi| + k|\eta|)^s\ \hat{u}(\xi,\eta)\|.$$

On vérifie immédiatement les 4 propositions suivantes

PROPOSITION 2.1. - Si $a \in S^m_{k,\sigma}$, $\sigma p(a) = H^s_{k,\sigma} \to H^{s-m}_{k,\sigma}$. Il existe un entier $q \geq 0$ et $C > 0$ indépendants de k et σ, tels que :

$$\forall u \in H^s_{k,\sigma} \quad \|Au\|_{s-m,\,k,\sigma} \leq c\, N^{q,m}_{k,\sigma}(a)\ \|u\|_{s,k,\sigma}.$$

PROPOSITION 2.2. - Si M_1 et M_2 sont des nombres réels, si a $S^{M_1}_{k,\sigma}$ et $b \in S^{M_2}_{k,\sigma}$, $a_o b - ab \in S^{M_1+M_2-1}_{k,\sigma}$. De plus pour tout entier $q \geq 0$ il existe un entier $q' \geq 0$ et $C > 0$ indépendants de k et σ, tels que

$$N^{q,\,M_1+M_2-1}_{k,\sigma}(a_o b - ab) \leq c\, N^{q',M_1}_{k,\sigma}(a)\, N^{q',M_2}_{k,\sigma}(b).$$

Soit maintenant $\Phi \in \mathcal{D}(R^n)$ (resp. $\Phi \in \mathcal{D}(R)$) à support dans une boule de rayon 1 si $k < 1$ (resp. si $k \geq 1$).

PROPOSITION 2.3. - Si $a \in S^m_{k,\sigma}$, $\Phi(a^* - a^H) \in S^{m-1}_{k,\sigma}$. Pour tout entier $q \geq 0$, il existe $q' \geq 0$ et $C > 0$ indépendants de k et σ, tels que :

$$N^q_{k,\sigma}(\Phi(a^* - a^H)) \leq c\, N^{q'}_{k,\sigma}(a).$$

PROPOSITION 2.4. - Soit $m \geq 0$ et $a \in S^m_{k,\sigma}$ tel que $a(x,y,\xi,\eta)$ soit une matrice hermitienne positive. Il existe $c > 0$ et $q \geq 0$ ne dépendant que de m, k et σ, tels que pour tout $u \in H^m_{k,\sigma}$ on a :

$$\mathrm{Re}(Au,u) \geq -c\, N^{q,m}_{k,\sigma}(a)\ \|u\|^2_{\frac{m-1}{2},\,k,\,\sigma}.$$

III - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

1 . Rappel des résultats de Kreiss.

On a $1 \leq \ell \leq p$.

Soient $A_1\ A_2 \ldots A_n$ des matrices de type (p,p) et P une matrice de type (p,ℓ) vérifiant les 3 hypothèses suivantes :

H1) Pour tout $\eta \in R^n$-{o} les valeurs propres de la matrice $\sum_1^n A_j\eta_j$ sont réelles et distinctes.

H2) La matrice A_1 est de la forme $A_1=\begin{pmatrix} a_1 \ddots & & & 0 \\ & a_\ell & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_p \end{pmatrix}$ avec

$$\begin{cases} a_j < 0 \text{ pour } j \leq \ell \\ a_j > 0 \text{ pour } j \geq \ell + 1 \end{cases}$$

H3) Le système de matrices $(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n,\ P)$ vérifie la condition de Lopatinsky uniforme.

Alors il existe C_1, C_2 et $C_3 > 0$ ne dépendant que de $(A_1,\ldots,A_n,P)$ et une matrice $R(\sigma,\xi,\ \eta_2\ldots\eta_n,\ A_j,\ P)$ de type (p,p), indépendante de η_1, indéfiniment dérivables par rapport à toutes les variables (par rapport à $\sigma > 0$, $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^{n-1}$, et aux coefficients des matrices précédentes) telle que

1) Pour A_j et P fixés la fonction $(\sigma,\xi,\eta) \to R(\sigma,\xi,\eta,\ A_j,\ P)$ est homogène de degré 0 pour $\sigma > 0$.

2) Re $R(\sigma+i\xi - i\ \Sigma\ A_j\eta_j) \geq C_1$.

3) RA_1 est autoadjointe, et il existe C_2 et $C_3 > 0$ tels que

$$RA_1 + C_2P^HP - C_3 \geq 0$$

2. Le changement de variable $t=e^x$.

Tout d'abord il suffit de démontrer l'estimation (1.2) avec $B(t,y)=0$. Considérons le système (1.1) et faisons le changement de variable $t=e^x$, en posant :

$$\tilde{u}(x,y)=e^{x/2}u(e^x,y),\quad \tilde{f}(x,y)=e^xf(e^x,y).$$

Le système (1.1) devient :

$$(3.1)\quad \tilde{L}\tilde{u} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + (\sigma-\frac{1}{2})\tilde{u} - \sum_1^n A_j(e^x,y)e^x\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_j} = \tilde{f}$$

les conditions aux limites,

$$(3.2)\quad P(e^x,y)\ \tilde{u}(x,y) = \tilde{g}(x,y).$$

et l'estimation à démontrer :

$$(3.3)\quad \sigma\,\|u\|^2 + |e^{x/2}\ \tilde{u}_0|^2 \leq c\ (\ \frac{1}{\sigma}\ \|\tilde{f}\|^2 + |e^{x/2}\ \tilde{g}|^2).$$

Le but de la section III est de démontrer cette estimation. Désormais le symbole $\sim$ sera omis.

Le symbole associé au système (3.1) est :

$$\mathcal{L} = \sigma + i\xi - ie^x\ \sum_1^n A_j(e^x,y)\eta_j.$$

Il est donc logique d'introduire le symbole :

$$\mathcal{R}(\sigma,\ x,y,\xi,\eta) = R(\sigma,\xi,e^x\eta,\ A_j(e^x,y)\ ,\ P(e^x,y)).$$

On en déduit qu'il existe C_1, C_2 et $C_3 > 0$ indépendants de x et y, tels que :

$$(3.4)\quad \begin{array}{l} \mathrm{Re}\,\mathcal{R}\mathcal{L} \geq C_1 \\ \mathcal{R}A_1 + C_2\ P^HP - C_3 \geq 0 \end{array}$$

D'autre part, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ il existe $C > 0$ indépendant de σ, tel que

$$(3.5)\qquad |D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma D_\eta^\delta \mathcal{R}(\sigma,x,y,\xi,\eta)| \leq C\,(\sigma+|\xi|+e^x\,|\eta|)^{-\gamma-\delta}\, e^{\delta x},$$

de sorte que $\mathcal{R}$ n'appartient pas à la classe S^0, ce qui motive l'introduction de la partition de l'unité suivante.

3. Partition de l'unité.

D'après les hypothèses sur L, nous pouvons supposer que les matrices $A_j(e^x,y)$ et $P(e^x,y)$ sont constantes pour $x > 0$. Soit (x_j,y_j) la suite des points d'un réseau de R^n.

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(R)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, positives. Posons :

$$\begin{cases} \varphi_j(x,y') = \varphi(x-x_j)\ \psi\ (y-y_j) & \text{si } x_j < 0 \\ \varphi_j(x,y') = \varphi(x-x_j) & \text{si } x_j > 0 \end{cases}$$

On peut choisir ces fonctions de telle sorte que :

$$\sum_j \varphi_j^2 = 1 \qquad \sum_j |D^\alpha \varphi_j|^2 \leq c_\alpha \qquad \text{pour tout multi-indice } \alpha.$$

Si l'on pose $u_j = \varphi_j u$, le système (3.1) s'écrit :

$$(3.6)\qquad \begin{cases} Lu_j = f_j \\ Pu^\circ_j = \varphi_j g = g_j \end{cases}$$

où

$$f_j = \varphi_j f + \left(-\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \sum_1^n A_k(e^x,y)\, e^x \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k}\right) u$$

Le terme entre parenthèses est borné indépendamment de j,x, et y, et l'on a :

$$\sum_j \|f_j\|^2 \leq c\,(\|f\|_0^{\,2} + \|u\|_0^{\,2}) \qquad \Sigma \|u_j\|^2 = \|u\|^2.$$

Dans la suite, on va démontrer qu'il existe $C > 0$ et $\sigma_0 > 0$ indépendants de j et σ, tels que $\sigma > \sigma_0$ entraîne :

$$(3.7)\qquad \sigma\|u_j\|^2 + |e^{x/2}\,u^\circ_j|^2 \leq c\left(\frac{1}{\sigma}\|Lu_j\|^2 + |e^{x/2}\,Pu^\circ_j|^2\right)$$

En ajoutant toutes ces inégalités, on obtient bien (3.3), ce qui démontrera le théorème 1.

Soit maintenant Φ(resp.Ψ)$\in\mathcal{D}$ égale à 1 sur supp φ (resp. supp ψ).

Posons

$$\begin{cases} \Phi_j(x,y) = \Phi(x-x_j)\ \Psi\ (y-y_j) & \text{si } x_j < 0 \\ \Phi_j\ (x,y) = \Phi(x - x_j) & \text{si } x_j > 0 \end{cases}$$

Le système (3.6) peut encore s'écrire :

$$(3.8)\qquad (\Phi_j R)\ _o\ (\Phi_j L)\ u_j = f_j$$

Or nous observons d'après (3.5) que $\Phi_j R \in S^o_{e^{x_j},\sigma}$ et $\Phi_j\, L \in S^1_{e^{x_j},\sigma}$, les semi-normes de ces symboles étant bornées indépendamment de j et σ. Lesxsymboles considérés sont indépendants de η_1.

4 . Intégrations par parties.

On peut écrire :

$$\mathcal{L} = e^x A_1(e^x,y)\,\frac{\partial}{\partial y_1} + L'(\sigma,\, x,\, y,\xi,\eta)$$

Multiplions les deux membres de (3.8) par $\overline{u}_j$ et intégrons. Nous obtenons

$$I + J = 2R_e(f_j,u_j)$$

avec
$$\begin{cases} I = 2\,\mathrm{Re}\,((\Phi_j R)\,o\,(\Phi_j\, L')\, u_j,\, u_j) \\ J = 2\,\mathrm{Re}\,((\Phi_j R)\,o\,(\Phi_j A_1)\, e^x\, \dfrac{\partial u_j}{\partial y_1}\,,\, u_j). \end{cases}$$

Nous allons démontrer qu'il existe $c_1,\, \ldots.,c_\sigma$ tels que :

(3.9) $$I \geq (\, c_1\sigma \;-\; c_2)\;\|u_j\|^2$$

(3.10) $$J + |e^{x/2}Pu_j^o|^2 \geq (c_3 - \frac{c_4}{\sigma})\; |e^{x/2}u_o{}^j|^2 - c_5\,\|u_j\|^2 - \frac{c_6}{\sigma 2}\|\, Lu_j\|^2$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon> o$, il existe c_ε tel que :

(3.11) $$|(RLu_j,\, u_j)| \;\leq \varepsilon\sigma\,\|u_j\|^2 + \frac{c_\varepsilon}{\sigma}\;\;||Lu_j||^{\,2}$$

En choisissant ε assez petit et σ assez grand, on en déduit l'estimation (3.7).

5 . Minoration de I.

$$I = 2R_e\;((\Phi_j R)_o(\Phi_j L')u_j,u_j).$$

D'après la proposition 2.2, il existe $T_o \in S^o_{e^{x_j},\sigma}$, les semi-normes de T_o étant bornées indépendamment de j et σ, tel que :

$$(\Phi_j R)\;_o\;(\Phi_j L') = \Phi_j{}^2(RL') + T_o.$$

(RL') désignant le produit matriciel des symboles R et L'. Donc :

$$I = ([(RL') + (RL')^*]\; u_j,\, u_j) + 2R_e\;(T_o\; u_j,\, u_j)$$

D'après la proposition 2,3

$$\Phi_j\;\;[(RL')^*\;\Phi_j \;-\; (RL')^H\;\Phi_j]$$

est un symbole de $S^o_{e^{x_j},\sigma}$, désigné aussi par T_o. D'où :

$$I = 2R_e\;([(RL') + (RL')^H]\; u_j,u_j) + 2R_e(T_o u_j,u_j).$$

D'après les propriétés du symbole de Kreiss

$$(RL') + (RL')^H - c_1\sigma \;\geq 0$$

D'après la proposition 2,4 il existe $C > 0$, indépendant de j et σ, tel que :

$$R_e([(RL') + (RL')^H - c_1\sigma]\, u_j, u_j) \geq - c\|u_j\|^2$$

Enfin, il existe $C > 0$ indépendant de j et σ, tel que :

$$(T_o\, u_j,\, u_j) \leq c\,\|u_j\|^2,$$

ce qui démontre (3.9).

6 . Minoration de J .

$$J = 2R_e\,(R_o A_1 e^x \frac{\partial u_j}{\partial y_1},\, u_j)$$

Posons $\alpha_j = e^{\frac{x - x_j}{2}}\,\Phi_j \qquad \beta_j = e^{\frac{x_j - x}{2}}\,\Phi_j$ (indépendants de y_1)

d'où $\quad e^x u_j = e^{x_j}\,\alpha_j^2 u_j$

$$J = e^{x_j}\,((\Phi_j R)\,_o\,(\alpha_j^2 A_1)\,\frac{\partial u_j}{\partial y_1},\, u_j)$$

Or : $\quad \Phi_j R \in S^o_{j,\sigma}$ et $\alpha_j A_1 \in S^o_{j,\sigma}$

$$T_{-1} = (\Phi_j R)\,_o\,(\alpha_j A_1) - \Phi_j \alpha_j (RA_1) \in S^{-1}_{j,\sigma}$$

avec des semi-normes bornées indépendamment de j et σ. D'où :

$$J = e^{x_j}\, 2R_e\,((RA_1)\,\frac{\partial}{\partial y_1}(\alpha_j u),\, \alpha_j u) + e^{x_j}\, R_e\,(T_{-1}\,\frac{\partial u_j}{\partial y_1},\, u_j).$$

Intégrons par parties la première intégrale, désignée par J_1.

$$J_1 = ((RA_1)\,\frac{\partial}{\partial y_1}(\alpha_j u),\, \alpha_j u) = -\,((RA_1)_{y_1}\,(\alpha_j u),\, \alpha_j u) - \langle (RA_1)(\alpha_j u_o),\, \alpha_j u_o\rangle -$$

$$-\,(\alpha_j u,\, (RA_1)^*\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,(\alpha_j u))$$

$$\bar{J}_1 = (\alpha_j u,\, (RA_1)\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,(\alpha_j u)).$$

D'où

$$2R_e\, J_1 = -\,((RA_1)_{y_1}\,(\alpha_j u_j),\, (\alpha_j u_j) + (\alpha_j u_j,\, [(RA_1) - (RA_1)^*]\,\frac{\partial}{\partial y_1}\,(\alpha_j u_j))$$

$$-\langle (RA_1)\,\alpha_j u_{jo},\, \alpha_j u_{jo}\rangle\,.$$

Puisque $\Phi_j(RA_1) \in S^o_{j,\sigma}$, le symbole

$$\Phi_j\,[(RA_1)^* - (RA_1)^H]\,\Phi_j,$$

est dans $S^{-1}_{j,\sigma}$. Désignons le aussi par T_{-1}. En tenant compte de

$$(RA_1)^H = (RA_1)$$

on a :

$$J=-e^{xj} 2R_e < (RA_1)\,(\alpha_j u_{oj}),\ \alpha_j u_{oj} > + R_e(u_j,\ T_{-1} e^{xj} \frac{\partial u_j}{\partial y_1})$$

Minorons successivement les deux termes.

a) Terme de traces.

D'après Kreiss, il existe C_2 et C_3 tels que :

$$(RA_1) + C_2 P^H P - C_3 \geq 0$$

Ce symbole, multiplié par Φ_j, étant dans $S^o_{j,\sigma}$, il existe $C > 0$, indépendant de j et σ, tel que

$$\forall v \in L^2\ R_e < \Phi_j[(RA_1) + C_2(P^H P) - C_3]v,v > \ \geq -C|v|^2_{-1/2,\ j,\sigma}$$

Appliqué à $v = \alpha_j u_{oj}$, cela donne :

$$R_e <(RA_1)\,(\alpha_j u_o),\ \alpha_j u_o> + C_2|\alpha_j P u_{oj}|^2 \geq C_3|\alpha_j u_{oj}|^2 - C|\alpha_j u_{oj}|^2_{y_2,j,\sigma}$$

Or :

$$|v|_{-1/2,\ j,\ \sigma} \leq \frac{1}{\sigma^{1/2}}\ |v|_o.$$

En multipliant par $e^{x}j$, on obtient

$$R_e\ e^{xj} < (RA_1)\,(\alpha_j u_o),\ (\alpha_j u_o)> + C_2|e^{x/2} P u_o|^2 \geq$$

$$\geq C_3\ |e^{x/2} u_{oj}|^2 - \frac{C}{\sigma}\ |e^{x/2}\ u_{oj}|^2.$$

b) Second terme

Il est majoré par

$$C\|u_j\|_o\ \|e^{xj}\ \frac{\partial u_j}{\partial y_1}\|_{-1,j,\sigma}$$

(T_{-1} est un opérateur tangentiel indépendant de η_1).

Or :

$$e^{xj}\ \frac{\partial u_j}{\partial y_1} = \beta_j\ A_1^{-1}\ (f_j - L'u_j)$$

Puisque $\beta_j\ A_1^{-1} \in S^o_{j,\sigma}$

$$\|\beta_j A_1^{-1} f_j\|_{-1,j,\sigma} \leq C\|f_j\|_{-1,j,\sigma} \leq \frac{C}{\sigma}\|f_j\|_o .$$

Puisque $\beta_j\ A_1^{-1}\ L' \in S^1_{j,\sigma}$

$$\|\beta_j A_1^{-1} L' u_j\|_{-1,j,\sigma} \leq C\ \|u_j\|_o$$

Le second terme est donc majoré par :

$$C(\|u_j\|_0^2 + \frac{1}{\sigma^2}\|Lu_j\|^2)$$

où C est indépendant de j et σ. Finalement :

$$J+C_2|e^{x/2}Pu_{oj}|^2 \geq C_3|e^{x/2}u_{oj}|^2 - C\|u_j\|^2 - \frac{C}{\sigma^2}\|Lu_j\|^2 - \frac{C}{\sigma}|e^{x/2}u_{jo}|^2.$$

IV - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'EXISTENCE.

Considérons le système :

(4.1) $(L+\sigma)\, u = t\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_1^n tA_j(t,y)\frac{\partial u}{\partial y_j} + (B+\sigma)\, u = f.$

Kreiss a démontré que sous l'hypothèse H3 on peut toujours écrire les conditions aux limites sous la forme :

(4.2) $u_0^I + Su_0^{II} = \varphi$

en posant $u^I = (u_1 \dots u_\ell)$ $u^{II} = (u_{\ell+1} \dots u_p)$. S désigne une matrice de type $(\ell, p-\ell)$.

DÉFINITION 4.1 . - Le problème adjoint formel du problème (4.1), (4.2) est

$$\begin{cases} (L^* + \sigma)\, v = g & (4.3)\\ v_0^{II} - S^H v_0^I = \Psi & (4.4)\end{cases}$$

PROPOSITION 4.1 . - Si le problème (4.1), (4.2) satisfait aux hypothèses H1, H2 et H3, il en est de même du problème (4.3), (4.4).

La seule difficulté réside dans la vérification de l'hypothèse H3. On s'appuie sur le fait que pour tout $\sigma > 0$ et pour tout point $(y,t) \in R^{n+1}$ les déterminants de Lopatinsky de ces problèmes sont imaginaires conjugués.

On en déduit qu'il existe $C > 0$ et $\sigma_1 > 0$ tel que pour tout $\sigma > \sigma_1$ et pour tout $v \in V$ on a :

(4.5) $\sigma\|v\|^2 + |t^{1/2}v_0|^2 \leq C\,[\frac{1}{\sigma}\|(L^* + \sigma)\, v\|^2 + |t^{1/2}(v_0^{II} - S^H v_0^I)|^2].$

Après multiplication par A_1^{-1} on peut écrire l'opérateur (4.1) sous la forme

$$Lu = t\frac{\partial u}{\partial y_1} + \sum_2^n t\, C_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + D\, t\frac{\partial u}{\partial t}).$$

On vérifie alors facilement :

PROPOSITION 4.2 . - On a pour tous u et $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

$$(Lu, v) - (u, L^* v) = -\langle (u_0^I + Su_0^{II}), tv_0^I\rangle - \langle tu_0^{II}, v_0^{II} - S^H v_0^I\rangle.$$

Cette formule de Green s'étend à $v \in V$ et $u \in D(L)$.

On veut résoudre le problème :

$$\begin{cases} (L+\sigma)\,u=f & u\in L^2(\Omega) \\ u_0^{I} + S u_0^{II} = \varphi \end{cases}$$

avec $f\in L^2(\Omega)$ et $t^{1/2}\varphi\in L^2(\Sigma)$.

Posons pour tout $v\in V$:

$$L(v) = (f,v) + \langle t^{1/2} v_0^{I},\ t^{1/2}\varphi\rangle$$

D'après les estimations duales (4.5), si $\sigma > \sigma_1$:

$$|L(v)| \leq C\,(\|(L^* + \sigma)\,v\| + |t^{1/2}(v_0^{II} - S^H v_0^{I})|)$$

En appliquant la formule de Green successivement avec $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ puis avec $v\in\mathcal{D}(\Omega\cup\Sigma)$ on obtient l'existence de u tel que :

$$\begin{cases} u\in L^2 \\ (L+\sigma)\,u=f \\ u_0^{I} + S u_0^{II} = \varphi, \end{cases}$$

ce qui démontre le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALINHAC - Problème de Cauchy pour des opérateurs singuliers.

[2] ALINHAC - Systèmes hyperboliques singuliers (Thèse-Paris 1975)

[3] KREISS - Initial Boundary Value Problems for hyperbolic systems. C.P.A.M. XXIII (1970) p. 277-298

[4] SAKAMOTO - Mixed problems for hyperbolic equations. J. Math. Kyoto Univ. 10-2(1970) p. 349-373

Jean François NOURRIGAT
Mathématiques-Informatique
Université de Rennes I
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX