

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GUY MÉTIVIER

## **Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs elliptiques dégénérés**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1975), p. 215-249

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1975\\_\\_\\_\\_215\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____215_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES  
 D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS.

par

Guy MÉTIVIER

I. INTRODUCTION.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de bord  $\Gamma$ ,  $\bar{\Omega}$  étant une variété à bord  $C^\infty$ .  
 On se donne une fonction  $\varphi$  de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) > 0\} . \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) = 0\} . \\ \forall x \in \Gamma, d\varphi(x) \neq 0 . \end{cases}$$

On définit des opérateurs elliptiques dégénérés, par la méthode variationnelle, en se donnant des formes sesquilineaires continues et coercitives sur des espaces de Sobolev avec poids. On veut envisager ici des espaces du type :

$$(1.1) \quad W = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) / \forall \alpha, |\alpha| \leq m : \varphi^{r_p|\alpha|} \cdot D^\alpha u \in L^2(\Omega)\} .$$

les  $r_p$  pour  $p=0, \dots, m$  étant des réels  $\geq 0$ . On munit un tel espace de la norme hilbertienne évidente.

On peut prouver que l'on peut, sans changer l'espace  $W$ , modifier la suite  $r_p$  de manière à la rendre croissante et convexe. On envisagera donc dans toute la suite le cas typique suivant :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{On se donne des entiers } \ell \leq k \leq m \text{ et des réels } s \text{ et } \delta \text{ avec } 0 \leq \ell-1 < s \leq \ell \\ \text{et } \delta > 1 . \\ \text{On pose } \sigma = (\delta-1)k+s \text{ et on définit : } r_p = \text{Max}(0, p-s, p\delta-\sigma) . \end{cases}$$

de sorte que  $r_p=0$  si  $p \leq \ell-1$ ,  $r_p=p-s$  pour  $\ell \leq p \leq k$  et  $r_p=p\delta-\sigma$  pour  $k \leq p \leq m$ .

On choisit comme espace variationnel  $V$  soit l'espace  $W$  défini en (1.1), soit  $\tilde{W}$ , adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W$ . Soit  $a$  une forme intégral-différentielle du type :

$$(1.3) \quad \begin{cases} a(u,v) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) \cdot \varphi(x)^{r|\alpha|+r|\beta|} D^{\alpha}u(x) \cdot \overline{D^{\beta}v(x)} \cdot dx \\ \text{où les } a_{\alpha\beta} \text{ sont des fonctions continues sur } \overline{\Omega} \text{ et vérifient } a_{\beta\alpha} = \overline{a_{\alpha\beta}}. \end{cases}$$

$a$  est hermitienne et continue sur  $W$  ; on la supposera coercitive sur  $V$  :  
 $\exists c_0 > 0, \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \forall u \in V : a(u,u) \geq c_0 \|u\|_W^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

Par le lemme de Lax Milgram, on associe au triplet variationnel  $(V, L^2(\Omega), a)$  un opérateur  $(A, D(A))$  semi-borné et auto-adjoint dans  $L^2(\Omega)$ . On démontrera la compacité de l'injection de  $W$  dans  $L^2(\Omega)$  et il en résultera que le spectre de  $A$  est constitué d'une suite de valeurs propres  $\lambda_j$ , réelles, tendant vers  $+\infty$ . On se propose d'établir des formules asymptotiques du type :

$$(1.4) \quad N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 \sim c \cdot \lambda^{\omega}$$

ou dans certains cas :

$$(1.4') \quad N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 \sim c \cdot \lambda^{\omega} \cdot \text{Log } \lambda$$

l'exposant  $\omega$  et la constante  $c$  seront précisés au théorème 5.3.

Notons que dans certains cas la constante  $c$  dépend des conditions aux limites (choix de  $V$ ). Remarquons aussi qu'on adapte très facilement les démonstrations (et les résultats) au cas où  $V$  est un espace du type :

$$V = \{u \in W / \gamma_j u = 0, \forall j \in J\}.$$

$J$  étant un ensemble d'entiers  $< s - \frac{1}{2}$ .

La considération de conditions aux limites plus générales pose des problèmes techniques.

Le principal intérêt de ce travail est qu'on y étudie des opérateurs d'ordre supérieur à 2 ; on retrouve ainsi certains résultats obtenus pour l'ordre 2 en ([9], [14], [17]). Le cas des opérateurs d'ordre  $> 2$  a été abordé par une méthode différente par PHAM THE LAI ([15], [16]).

Le plan sera le suivant : dans II on rappelle et on établit quelques propriétés des valeurs propres de problèmes variationnels ; dans III on précise quelques propriétés des espaces de Sobolev avec poids qui nous seront utiles ; dans IV on étudie le cas de modèles en dans  $V$  on établit les résultats pour le problème initial sur  $\Omega$ .

Théorème 5.1 et 5.2 : la coercivité de  $a$  équivaut à l'ellipticité de  $a$ , et à la coercivité de formes à une variable "définies sur le bord" ; elle implique des relations de type ellipticité pour des symboles définis sur le bord  $\Gamma$ .

Théorème 5.3 : on précise (1.4) et (1.4'), les constantes  $c$  trouvées étant finies et non nulles grâce au théorème 5.2.

II. VALEURS PROPRES.

II.1. Précisons d'abord quelques notations : on appellera, dans toute la suite, problème variationnel un triplet  $(V, H, a)$  où  $V$  et  $H$  sont des espaces de Hilbert,  $V$  s'injectant continuellement dans  $H$ , et où  $a$  est une forme hermitienne continue et coercitive sur  $V$  :

$$(2.1) \quad \exists c_0 > 0, \exists t_0, \forall u \in V \quad c_0 \|u\|_V^2 \leq a(u, u) + t_0 \|u\|_H^2.$$

On dira que le problème variationnel est compact si l'injection de  $V$  dans  $H$  est compacte ; dans ce cas, il existe des éléments  $\varphi_j$  de  $V$  ( $j=1, \dots$ ) tels que :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le système des } \varphi_j \text{ est total dans } V, \text{ orthogonal pour } a, \text{ orthonormé pour} \\ (, )_H \text{ et la suite } \lambda_j = a(\varphi_j, \varphi_j) \text{ est croissante et tend vers } +\infty. \end{array} \right.$$

De plus, si pour tout  $t \geq t_0$ , on note :

$$S_{a+t} = \{u \in V / a(u, u) + t \|u\|_H^2 \leq 1\}$$

et  $d_n(S_{a+t})$  ( $n=0, 1, \dots$ ) le  $n$ -ième diamètre de  $S_{a+t}$  dans  $H$ , ([11], [12]), alors on a ([4], [5]) :

$$(2.3) \quad \lambda_{n+1} + t = \{d_n(S_{a+t})\}^{-2} \quad (n=0, 1, \dots)$$

On introduit alors la notation :

$$N(\lambda, V, a, H) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$$

On convient de simplifier cette notation en  $N(\lambda, V, a)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace  $H$ , et d'omettre le  $a$  si celui-ci est le produit scalaire de  $V$ .

Si  $(V, H, a)$  est un problème variationnel compact, et si  $V$  est dense dans  $H$ , on lui associe un opérateur  $A$  auto-adjoint dans  $H$ , semi-borné et à résolvante compacte. Le spectre de  $A$  est constitué d'une suite de valeurs propres qui sont précisément les  $\lambda_j$  de (2.2). Les  $(\varphi_j)$  constituant une base orthonormée de  $H$ , de fonctions propres de  $A$ .

II.2. Pour étudier le comportement asymptotique des fonctions  $N(\lambda, V, a, H)$ , on introduit une classe de "fonctions de comparaison" :

$\mathcal{F}$  est l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , croissantes, tendant vers  $+\infty$  avec  $\lambda$  et telles que :

$$f^*(\mu) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\mu \cdot \lambda) / f(\lambda)$$

existe, pour tout  $\mu$  de  $\mathbb{R}_+$  et soit une fonction continue de  $\mu$ .

On définit donc, pour un problème variationnel compact  $(V, H, a)$  et pour  $f \in \mathcal{F}$ , les nombres de  $[0, \infty]$  :

$$N_f^+(V, a, H) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup N(f, V, a, H) / f(\lambda)$$

$$N_f^-(V, a, H) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \inf N(f, V, a, H) / f(\lambda).$$

II.3. Rappelons d'abord les propriétés suivantes qui découlent immédiatement de (2.3) et des définitions :

$$(2.4) \quad N(\lambda, V, \alpha a + t(\cdot, \cdot)_H) = N((\lambda - t)/\alpha, V, a)$$

$$(2.5) \quad \text{Si } (V_1, H, a_1) \text{ et } (V_2, H, a_2) \text{ sont deux problèmes tels que } V_1 \subset V_2 \text{ et } \forall u \in V_1, a_2(u, u) \leq a_1(u, u) \text{ alors } N(\lambda, V_1, a_1) \leq N(\lambda, V_2, a_2).$$

(2.6) Si  $(V_i, H_i, a_i)_{i=1, \dots, \nu}$  est une famille de problèmes variationnels compacts, on a alors :

$$N(\lambda, \bigoplus_{i=1}^{\nu} V_i, \bigoplus_{i=1}^{\nu} a_i, \bigoplus_{i=1}^{\nu} H_i) = \sum_{i=1}^{\nu} N(\lambda, V_i, a_i, H_i)$$

où  $\bigoplus_{i=1}^{\nu} a_i$  est la forme définie par :

$$(\bigoplus_{i=1}^{\nu} a_i) (\bigoplus_{i=1}^{\nu} u_i, \bigoplus_{i=1}^{\nu} v_i) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i(u_i, v_i).$$

(2.7) Si  $V_0$  est un sous-espace fermé de  $V$  de codimension finie  $\nu$  dans  $V$  alors :

$$0 \leq N(\lambda, V, a) - N(\lambda, V_0, a) \leq \nu.$$

(2.8) Si l'inégalité  $a(u, u) \leq \lambda \|u\|_H^2$  a lieu pour tout élément  $u$  d'un sous-espace  $E$  de  $V$  alors :

$$\dim E \leq N(\lambda, V, a, H).$$

Nous utiliserons par la suite les deux propositions suivantes :

**PROPOSITION 2.1.** - Soient  $V \hookrightarrow V_1 \hookrightarrow H$  trois espaces de Hilbert, l'injection de  $V$  dans  $V_1$  étant compacte. Soit  $a$  une forme hermitienne continue coercitive sur  $V$  et soit  $b$  une forme hermitienne sur  $V$  vérifiant :

$$\exists C, \forall u \in V \quad |b(u, u)| \leq C \|u\|_V \cdot \|u\|_{V_1}$$

Alors,  $a+b$  est coercitive sur  $V$  et pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$  on a :

$$N_f^\pm(V, a+b, H) = N_f^\pm(V, a, H).$$

**Démonstration.** - On déduit de la compacité de l'injection de  $V$  dans  $V_1$ , et de la coercivité de  $a$  que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une constante  $C_\varepsilon$  telle que :

$$\forall u \in V : |b(u, u)| \leq \varepsilon a(u, u) + C_\varepsilon \|u\|_H^2,$$

d'où l'on déduit la coercivité de  $a+b$  et grâce à (2.4) et (2.5) que :

$$N(\lambda, V, a) \leq N(\lambda(1+\varepsilon) + C_\varepsilon, V, a+b)$$

$$N(\lambda, V, a) \geq N(\lambda(1-\varepsilon) - C_\varepsilon, V, a+b)$$

d'où, en écrivant que pour  $\lambda$  grand  $C_\varepsilon < \varepsilon \lambda$  ;

$$f^*(1-2\varepsilon) N_f^\pm(V, a+b) \leq N_f^\pm(V, a) \leq f^*(1+2\varepsilon) N_f^\pm(V, a+b)$$

et la proposition suit en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

**PROPOSITION 2.2.** - Soit  $(V_\varepsilon, H, a_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une famille de problèmes variationnels

tels que :

1. -  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$  est une famille décroissante, et l'injection de  $V_0$  dans  $H$  est compacte.

2. - Il existe  $c_0 > 0$ , telle que :

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \forall u \in V_\varepsilon : a_\varepsilon(u, u) \geq c_0 \|u\|_{V_0}^2 .$$

On suppose que  $a_\varepsilon$  converge vers  $a_0$  au sens suivant : il existe un sous-espace  $\mathfrak{D}$  de  $\bigcup_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon$ , dense dans  $V_0$  tel que :

3. -  $\forall u \in \mathfrak{D} \quad a_\varepsilon(u, u) \longrightarrow a_0(u, u) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$

4. - Pour toute famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ , pour laquelle  $a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$  reste borné, et pour tout  $u$  de  $\mathfrak{D}$ .

$$a_0(u, u_\varepsilon) - a_\varepsilon(u, u_\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

Alors, pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$  point de continuité de  $N(\lambda, V_0, a_0, H)$  :

$$N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon, H) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} N(\lambda, V_0, a_0, H)$$

Remarque. - Ce résultat est à rapprocher de résultats de [10] et suivant la méthode qui y est utilisée, on peut démontrer sous les mêmes hypothèses, la convergence forte et avec la proposition, en norme des projecteurs spectraux.

Démonstration. - Remarquons d'abord que :

$$\exists c_1, \forall \varepsilon > 0, \forall u \in V_\varepsilon \quad a_\varepsilon(u, u) \geq c_1 a_0(u, u) \quad \text{et on a donc :}$$

$$(2.9) \quad N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon) \leq N(\lambda/c_1, V_0, a_0) < +\infty .$$

Notons  $(\varphi_i)$  et  $(\lambda_i)$  ( $i=1, \dots$ ) les éléments associés au problème  $(V_0, H, a_0)$  par (2.2), et  $(\psi_j^\varepsilon)$ ,  $(\mu_j^\varepsilon)$  ( $j=1, \dots$ ) ceux associés au problèmes  $(V_\varepsilon, H, a_\varepsilon)$ . Fixons maintenant  $\lambda \in \mathbb{R}$ , distincts de tous les  $\lambda_i$ .

Il existe alors  $\delta > 0$  tel que :

$$v_0 = N(\lambda, V_0, a_0) = N(\lambda - \delta, V_0, a_0)$$

et approchant les  $\varphi_i$  ( $i=1, \dots, v_0$ ) par des éléments de  $\mathfrak{D}$ , on voit qu'il existe un sous-espace  $G$  de  $\mathfrak{D}$  de dimension  $v_0$  tel que :

$$\forall u \in G, a_0(u, u) \leq (\lambda - \delta/2) \|u\|_H^2 .$$

$G$  étant de dimension finie, on a pour  $\varepsilon$  assez petit  $G \in V_\varepsilon$  et grâce à l'hypothèse 3 :

$$\forall u \in G \quad a_\varepsilon(u, u) \leq \lambda \|u\|_H^2 .$$

On en déduit alors, par (2.8), que pour  $\varepsilon$  assez petit, on a :

$$N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon) \geq N(\lambda, V_0, a_0) .$$

Soit d'autre part :  $v = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon)$

Par (2.9), on a :  $v < +\infty$ , et quitte à restreindre  $\varepsilon$  aux valeurs d'une suite tendant vers 0, on peut supposer que :  $v = N(\lambda, V_\varepsilon, a_\varepsilon)$ .

On a donc :  $a_\varepsilon(\psi_j^\varepsilon, \psi_j^\varepsilon) = \mu_j^\varepsilon \leq \lambda$  pour  $j=1, \dots, \nu$ , et on en déduit, par l'hypothèse 4, que pour  $u \in \mathcal{D}$  :

$$(2.10) \quad (a_\varepsilon - a_0)(u, \psi_j^\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{ou :} \\ \mu_j^\varepsilon(u, \psi_j^\varepsilon)_H - a_0(u, \psi_j^\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Par l'hypothèse 2,  $\psi_j^\varepsilon$  reste borné dans  $V_0$ , et comme  $\mu_j^\varepsilon \leq \lambda$ , on en déduit que (2.10) reste vrai pour tout  $u$  de  $V_0$ . En particulier, prenant  $u = \varphi_i$  on a :

$$(2.11) \quad \forall i \geq 1, \quad \forall j \geq \nu \quad (\mu_j^\varepsilon - \lambda_i)(\varphi_i, \psi_j^\varepsilon)_H \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Si l'on suppose que  $\nu > \nu_0 = N(\lambda, V_0, a_0)$ , il existe alors des éléments  $v_\varepsilon$  de

$$(2.12) \quad v_\varepsilon = \sum_{j=1}^{\nu} v_{\varepsilon, j} \cdot \psi_j^\varepsilon \quad \text{avec} \\ \begin{cases} \|v_\varepsilon\|_H^2 = 1 \text{ et} \\ (v_\varepsilon, \varphi_i) = 0, \quad i=1, \dots, \nu_0. \end{cases}$$

Les  $v_{\varepsilon, j}$  étant bornés et  $\lambda_i > \lambda \geq \mu_j^\varepsilon$  pour  $j \leq \nu$  et  $i > \nu_0$ , on déduit que (2.11) que :

$$(2.13) \quad \begin{cases} (v_\varepsilon, \varphi_i) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 & \text{si } i > \nu_0 \\ (v_\varepsilon, \varphi_i) = 0 & \text{si } i \leq \nu_0. \end{cases}$$

Or, on a :

$$a_0(v_\varepsilon) \leq \frac{1}{c_1} a_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \lambda_{c_1} \|v_\varepsilon\|_H^2$$

ce qui implique, en décomposant  $v_\varepsilon$  sur les  $\varphi_i$  :

$$\sum_{\lambda_i > \lambda_{c_1}} |(v_\varepsilon, \varphi_i)|^2 \leq c_{te} \sum_{\lambda_i \leq \lambda_{c_1}} |(v_\varepsilon, \varphi_i)|^2$$

ce qui avec (2.13) implique que  $\|v_\varepsilon\|_H^2 \longrightarrow 0$  contredisant l'hypothèse  $\|v_\varepsilon\|_H^2 = 1$ , et cette contradiction achève la démonstration de la proposition.

### III. ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS.

III.1. Soient  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varphi$  comme au I. Pour  $m$  entier et  $r$  réel  $\geq 0$ , on définit l'espace :

$$W_r^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) / \forall \alpha, |\alpha| \leq m : \varphi^r D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme hilbertienne évidente. Pour l'étude au voisinage de  $\Gamma$  on introduit des espaces modèles :

$$\text{On note } \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times ]0, \infty[ , \text{ et } x = (x', t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$$

la variable générique de  $\mathbb{R}_+^n$ . On définit alors :

$$W_r^m(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n) / \forall \alpha, |\alpha| \leq m : t^r D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)\} .$$

De plus, si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $U = U' \times ]0, T[$ ,  $U'$  ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  on définit :

$$W_r^m(U) = \{u \in W_r^m(\mathbb{R}_+^n) / u(x) = 0, \text{ pp } x \in \mathbb{R}_+^n \setminus U\}.$$

On utilisera aussi les espaces suivants, où  $\Pi^{n-1}$  désigne le tore de dimension (n-1) :

$$W_r^m(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+) / \forall \alpha, |\alpha| \leq m : t^r D^\alpha u \in L^2(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+)\}$$

et

$$W_r^m(\Pi^{n-1} \times ]0, T[) = \{u \in W_r^m(\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+) / \text{supp } u \subset \Pi^{n-1} \times ]0, T[\}.$$

On désignera dans ce paragraphe par  $X$  une des variétés,  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}_+^n$ ,  $U = U' \times ]0, T[$ ,  $\Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  ou  $\Pi^{n-1} \times ]0, T[$ .

On notera  $\hat{W}(X)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(X)$  dans  $W(X)$ .

On rappelle que : (cf. [3], [8], [13]).

$$(3.1) \quad W_r^m(X) \hookrightarrow W_{r-j}^{m-j}(X) \text{ si } 0 \leq j \leq m \text{ et } j \leq r$$

$$(3.2) \quad \mathcal{D}(\bar{X}) \text{ est dense dans } W_r^m(X) \text{ si } X = \Omega, \mathbb{R}_+^n, \Pi^{n-1} \times \mathbb{R}_+.$$

**PROPOSITION 3.1.** - Si  $X$  est borné, alors  $W_r^m(X)$  s'injecte avec injection compacte dans  $W_{r'}^{m'}$ (X) pourvu que :

$$m' \leq m-1 \text{ et } r' - m' > r - m.$$

Démonstration. - On suppose que  $m' = m-1$ . Le cas général suit des injections suivantes (cf. (3.1)) :

$$W_r^m(X) \hookrightarrow W_{r''}^{m-1}(X) \hookrightarrow W_{r'}^{m'}(X)$$

avec  $r'' = r' + (m-1-m')$

Puisque  $W_r^m(\Omega) \hookrightarrow H_{loc}^m(\Omega)$ , par partition de l'unité et cartes locales, on ramène le cas  $X = \Omega$  au cas  $X = U' \times ]0, T[$ , et dans ce dernier cas, en prolongeant par 0, on se ramène au cas où  $U'$  est un pavé. Nous supposons donc maintenant que  $X = X' \times ]0, T[$ ,  $X'$  étant soit un pavé de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , soit le tore  $\Pi^{n-1}$ .

On définit alors les opérateurs  $\tau_h$  ( $h > 0$ ) :

$$(\tau_h u)(x', t) = u(x', t+h)$$

$\tau_h$  opère de  $W_r^m(X)$  dans  $W_r^m(X) \cap H^m(X)$ . On obtiendra alors la compacité (cf. [1]) à partir de l'estimation :

$$(3.3) \quad \|u - \tau_h u\|_{W_{r'}^{m-1}(X)} \leq C \cdot h^\epsilon \|u\|_{W_r^m(X)}$$

où  $\epsilon = \text{Min}(1, 1+r'-r) > 0$ .

En effet, si  $u_j$  est une suite bornée dans  $W_r^m(X)$ , prenant une suite  $h_n \searrow 0$  on extrait de  $u_j$ , par le procédé diagonal, une sous-suite  $u_{j_k}$  telle que pour tout  $n$ ,  $\tau_{h_n} u_{j_k}$  converge dans  $H^{m-1}(X)$ , et donc dans  $W_{r'}^{m-1}(X)$  et par (3.3), on en déduit que la suite  $u_{j_k}$  converge elle-même dans  $W_{r'}^{m-1}(X)$ .

L'estimation (3.3) résulte directement du lemme :

LEMME 3.2. - Il existe une constante C telle que pour toute fonction u de  $W_{r'}^1(0,T)$  on ait :

$$\int_0^T t^{2r'} |u(t+h) - u(t)|^2 dt \leq C h^{2\epsilon} \int_0^T t^{2r} |u'(t)|^2 dt.$$

avec  $\epsilon = \text{Min}(1, 1+r'-r) > 0$ .

Démonstration. - On écrit que pour u dans  $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$  on a :

$$u(t+h) - u(t) = \int_t^{t+h} u'(s) ds$$

et on écrit les majorations :

$$|u(t+h) - u(t)|^2 \leq \frac{(2h)^{2\epsilon}}{2\epsilon} \int_t^{t+h} s^{1-2\epsilon} |u'(s)|^2 ds \quad \text{si } t \leq h$$

$$|u(t+h) - u(t)|^2 \leq h \int_t^{t+h} |u'(s)|^2 ds \quad \text{si } t \geq h$$

et le lemme suit par intégration.

### III.2. Espaces W.

Si  $r_p$  est la suite de réels définis en (1.2), on définit les espaces :

$$W(X) = \bigcap_{p=0}^m W_{r_p}^p(X)$$

$\overset{\circ}{W}(X)$  est l'adhérence de  $\mathcal{D}(X)$  dans  $W(X)$ .

Il résulte alors de la proposition (3.1) :

PROPOSITION 3.3. - Si X est borné,  $W(X)$  s'injecte avec injection compacte dans  $L^2(X)$ .

### III.3. Espaces à une variable.

On utilisera par la suite les espaces  $W_{r,\rho}^m(0,T)$  et  $W(0,T)$ , munis d'une famille de normes dépendant d'un paramètre  $\rho > 0$  :

$$\|u\|_{W_{r,\rho}^m(0,T)}^2 = \sum_{k=0}^m \rho^{2(m-k)} \|t^r D_t^k u\|_{L^2(0,T)}^2$$

$$\|u\|_{W(0,T)}^2 = \sum_{p=0}^m \|u\|_{W_{r,\rho}^p(0,T)}^2.$$

On précisera  $W_{r,\rho}^m(0,T)$  ou  $W_\rho(0,T)$  pour spécifier que les espaces sont munis des normes indicées par  $\rho$ .

Dans le cas des espaces à une variable ( $n=1$ ), nous précisons la proposition (3.1) de la manière suivante :

PROPOSITION 3.4. -

i) Pour  $r < m$ , il existe une constante C, ne dépendant que de r et m, telle que pour tout  $T > 0$  et tout réel  $\lambda$  positif, on ait :

$$N(\lambda, W_r^m(o, T), L^2(o, T)) \leq C [\lambda^{1/2m} T^{1-r/m} + 1]$$

ii) Pour  $0 < r < m$ , il existe  $\lambda_0 > 0$ , tel que :

$$N(\lambda, W_r^m(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda < \lambda_0 .$$

$$N(\lambda, W_r^m(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)) = O(\lambda^{1/2r}) \quad \lambda \geq \lambda_0 .$$

Démonstration. - On suit une méthode très voisine de celle utilisée en [6].

Soit  $\varepsilon = 1 - \frac{r}{m}$ . Pour  $h > 0$ , on définit la suite  $t_j = h j^{1/\varepsilon}$ ,  $j=1, \dots, \nu$  où  $\nu$  sera fixé par la suite. On note  $h_j = t_{j+1} - t_j \leq 1/\varepsilon \cdot h \cdot (j+1)^{1/\varepsilon - 1}$ .

On approche  $u$  de  $W_r^m(o, T)$  sur  $]t_j, t_{j+1}[$  par un polynôme de degré  $(m-1)$ ,  $P_j(u)$ , de sorte que :

$$\|u - P_j u\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2 \leq C \cdot h_j^{2m} \|D^m u\|_{L^2(t_j, t_{j+1})}^2$$

On approche donc  $u$  sur  $]t_1, t_\nu[$  par une fonction  $v$  polynomiale par morceaux variant dans espace de dimension  $\nu \cdot m$ , telle que :

$$\|u - v\|_{L^2(t_1, t_\nu)}^2 \leq C (\sup_j h_j^{2m} t_j^{-2r}) \|t^{2r} D^m u\|_{L^2(t_1, t_\nu)}^2 ,$$

et il vient alors :

$$(3.4) \quad \|u - v\|_{L^2(t_1, t_\nu)}^2 \leq C_1 h^{2(m-r)} \|t^{2r} D^m u\|_{L^2(t_1, t_\nu)}^2 .$$

On considère d'autre part l'opérateur  $\Delta_h$  :

$$\Delta_h u(t) = u(t) - u(t+h).$$

On vérifie, comme au lemme 3.2, l'estimation :

$$(3.5) \quad \|t^\rho \Delta_h u\|_{L^2(o, ph)}^2 \leq \frac{[(p+1)h]^{2\varepsilon}}{2\varepsilon (2\rho+1)} \|t^{\rho+1-\varepsilon} D_t u\|_{L^2(o, (p+1)h)}^2 .$$

Or on a :  $\Delta_h^m u(t) = u(t) - \sum_{p=1}^m (-1)^p \binom{m}{p} u(t+ph)$  que l'on note  $\Delta_h^m u = u - \tau_h^m u$ , et l'on déduit de (3.5) :

$$(3.6) \quad \|u - \tau_h^m u\|_{L^2(o, h)}^2 \leq C_2 h^{2m\varepsilon} \|t^r D_t^m u\|_{L^2(o, (m+1)h)}^2 .$$

On a d'autre part de manière évidente :

$$(3.7) \quad \|\tau_h^m u - \tau_h^m v\|_{L^2(o, h)}^2 \leq C_3 \|u - v\|_{L^2(h, (m+1)h)}^2$$

et en regroupant (3.4), (3.6) et (3.7) on voit que si l'on pose :

$$w(t) = v(t) \quad \text{pour} \quad t \geq h$$

$$w(t) = (\tau_h^m v)(t) \quad \text{pour} \quad t \leq h.$$

On a :

$$(3.8) \quad \|u - w\|_{L^2(o, t_\nu)}^2 \leq C_4 h^{2(m-r)} \|D^m u\|_{L^2(o, t_\nu)}^2$$

pourvu que  $(m+1)h \leq t_\nu$ ,  $w$  variant dans un espace de dimension  $m \cdot \nu$ .

Pour démontrer i), on choisit alors  $\nu$  de sorte que  $h\nu^{1/\varepsilon} \geq T$  et on déduit de (3.8) :

$$N \left( \frac{1}{C_4} h^{r-m} \right) \leq m\nu \leq m (T^\varepsilon h^{-\varepsilon} + 1)$$

pourvu que  $(m+1)h \leq T$ .

Pour démontrer ii), on choisit  $\nu$  de sorte que  $t_\nu^{-2r} \leq C_4 h^{2(m-r)}$ , i.e.  $\nu \geq C_4^{-\frac{\varepsilon}{2r}} h^{-\frac{m\varepsilon}{r}}$ .

En prolongeant  $W$  par 0 sur  $]t_\nu, \infty[$ , et en tenant compte de la majoration :

$$\|u\|_{L^2(t_\nu, \infty)}^2 \leq t_\nu^{-2r} \|t^r u\|_{L^2(t_\nu, \infty)}^2$$

on obtient alors de (3.8) :

$$\|u-w\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C_4 t^{2(m-r)} \|u\|_{W_r^m(\mathbb{R}_+)}^2$$

et

$$N\left(\frac{1}{C_4} h^{r-m}, W_r^m(\mathbb{R}_+)\right) \leq m \cdot \nu \leq m [C_5 h^{-\frac{m\varepsilon}{r}} + 1]$$

pourvu que

$$C_4 h^{2m} \geq (m+1)^{2r}$$

ce qui démontre la seconde estimation de ii), la première résultant seulement de la continuité de l'injection de  $W_r^m(\mathbb{R}_+)$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$ .

#### IV. MODÈLES.

IV.1. Soit  $J' = (]0, h[)^{n-1}$ , pavé de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , que l'on identifie à un ouvert du tore  $X' = \mathbb{R}^{n-1} / h \cdot \mathbb{Z}^{n-1}$ . On considère alors les variétés  $J = J' \times ]0, T[$  et  $X = X' \times ]0, T[$

Etant donnée la suite  $(r_p)$  (1.2), on définit les espaces  $W(J)$  et  $W(X)$ . Pour ne pas énoncer deux fois des résultats semblables, on convient de désigner par  $V$  l'un des symboles  $W$  ou  $\hat{W}$ , toujours le même à l'intérieur d'un énoncé.

On décompose la variable  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $x = (y, t)$   $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  et la variable duale  $\xi$  en  $(\eta, \tau)$ .

Soit  $b$  la forme hermitienne sur  $W(\mathbb{R}^n)$  :

$$(4.1) \quad b(u, v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} b_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}_+^n} t^{r|\alpha|+r|\beta|} \cdot D_t^\alpha u \cdot \overline{D_t^\beta v} \, dx$$

avec  $b_{\alpha\beta} = \overline{b_{\beta\alpha}} \in \mathbb{C}$ .

On introduit aussi des formes à une variable sur  $W(\mathbb{R}_+)$  : pour  $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$  on pose :

$$b_\eta(u, v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} b_{\alpha\beta} \cdot \eta^{\alpha'+\beta'} \cdot \int_0^\infty t^{r|\alpha|+r|\beta|} \cdot D_t^\alpha u \cdot \overline{D_t^\beta v} \cdot dt$$

où l'on a écrit  $\alpha = (\alpha', \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}$

Nous commençons par étudier la coercivité de  $b$  et on a tout d'abord :

LEMME 4.1. - b est coercitive sur V(J) si et seulement si b est coercitive sur V(R<sup>n-1</sup> x ]o,T[).

Démonstration. - La condition est suffisante puisque : V(J) ↪ V(R<sup>n-1</sup> x ]o,T[).

Prouvons sa nécessité.

On considère les pavés J'\_v = h/2 . v + J' (v ∈ Z<sup>n-1</sup>) et J\_v = J'\_v x ]o,T[. b est alors coercitive sur V(J\_v) et :

$$(4.3) \quad \exists c_0 > 0, \exists \lambda_0, \forall v \in \mathbb{Z}^{n-1}, \forall u \in V(J_v) \quad b(u,u) + \lambda_0 \|u\|_{L^2(J_v)}^2 \geq c_0 \|u\|_{W(J_v)}^2.$$

D'autre part, il existe des fonctions ζ\_v ∈ D(J'\_v) telles que ∑ ζ\_v^2 = 1 sur R<sup>n-1</sup> et que :

$$(4.4) \quad \forall \alpha' \in \mathbb{N}^{n-1} \quad \exists C_{\alpha'}, \quad \forall v \in \mathbb{Z}^{n-1} \quad \|D^{\alpha'} \zeta_v\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha'}$$

On déduit alors de (4.4) qu'il existe une constante C, telle que pour tout u de V(R<sup>n-1</sup> x ]o,T[) on ait :

$$|b(u,u) - \sum_v b(\zeta_v u, \zeta_v u)| \leq C \sum_{\substack{0 < p \leq m \\ 0 \leq q \leq m}} \|u\|_{W_{r_p}^{p-1}(J_v)} \cdot \|u\|_{W_{r_q}^q(J_v)}.$$

Il résulte alors de la compacité de l'injection de W\_{r\_p}^{p-1}(J\_v) dans W\_{r\_p}^p(J\_v), en remarquant que tout point x est dans au plus 2^{n-1} pavés J\_v, que :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon, \forall u \in V(\mathbb{R}^{n-1} \times ]o,T[) : \\ |b(u,u) - \sum_v b(\zeta_v u, \zeta_v u)| \leq \varepsilon \|u\|_W^2 + C_\varepsilon \|u\|_2^2 \end{cases}$$

De même, on a :

$$\begin{cases} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times ]o,T[)}^2 = \sum_v \|\zeta_v u\|_{L^2(J_v)}^2 \\ \|u\|_{W(\mathbb{R}^{n-1} \times ]o,T[)}^2 \leq Cte \sum_v \|\zeta_v u\|_{W(J_v)}^2. \end{cases}$$

Ecrivant (4.3) pour chaque fonction (ζ\_v u) on obtient compte-tenu de (4.5) et (4.6) la coercivité de b sur V(R<sup>n-1</sup> x ]o,T[).

PROPOSITION 4.2. - b est coercitive sur V(J) si et seulement si les formes b\_η (η ∈ R<sup>n-1</sup>) sont coercitives sur V|η|(o,T) uniformément en η, i.e. :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \exists c_0 > 0, \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \forall u \in V(o,T) \\ b_\eta(u,u) + \lambda_0 \|u\|_{L^2(o,T)}^2 \geq c_0 \|u\|_{W|η|(o,T)}^2. \end{cases}$$

Démonstration. - Pour u ∈ L^2(R<sup>n-1</sup> x ]o,T[), on note û(η,t) sa transformée de Fourier partielle. Il est clair que si (4.7) a lieu, en écrivant l'inégalité pour la fonction t → û(η,t), et en l'intégrant en η on obtient la coercivité de b sur V(R<sup>n-1</sup> x ]o,T[).

Inversement, si b est coercitive sur V(J) donc sur V(R<sup>n-1</sup> x ]o,T[), on écrit l'inégalité correspondante pour des fonctions de la forme u(y,t) = ζ(y) . v(t)

pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\hat{\zeta}(\eta)|^2 \left[ b_\eta(v, v) + \lambda_0 \|v\|_{L^2(0, T)}^2 - c_0 \|v\|_{W^{|\eta|}(0, T)}^2 \right] d\eta \geq 0$$

et l'inégalité ayant lieu pour toute fonction  $\zeta \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$  on en déduit (4.7).

Nous aurons besoin par la suite de résultats d'ellipticité. On introduit ici les symboles suivant qui apparaîtront par la suite :

pour  $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  avec  $\xi = (\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . On pose :

$$(4.8) \quad \begin{cases} b_\eta(t, \tau) = b(t, \xi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} b_{\alpha\beta} \cdot t^{r|\alpha| + r|\beta|} \xi^{\alpha+\beta} \\ b^1(t, \xi) = \sum_{\substack{k \leq |\alpha| \leq m \\ k \leq |\beta| \leq \mu}} b_{\alpha\beta} \cdot t^{r|\alpha| + r|\beta|} \cdot \xi^{\alpha+\beta} \\ b^k(\xi) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = k} b_{\alpha\beta} \cdot \xi^{\alpha+\beta} \\ b^m(\xi) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} b_{\alpha\beta} \cdot \xi^{\alpha+\beta} \end{cases}$$

Avec ces notations on a :

PROPOSITION 4.3. Si b est coercitive sur  $\overset{\circ}{W}(J)$  alors :

i) Il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour  $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  on ait :

$$b^1(t, \xi) \geq C_1 [t^{2r_k} |\xi|^{2k} + t^{2r_m} |\xi|^{2m}]$$

$$b^k(\xi) \geq C_1 |\xi|^{2k}$$

$$b^m(\xi) \geq C_1 |\xi|^{2m}$$

ii) Il existe deux constantes  $C_2 > 0$  et  $\lambda_1$  telles que pour  $(t, \xi) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n$  on ait :

$$b(t, \xi) \geq C_2 [t^{2r_k} |\xi|^{2k} + t^{2r_m} |\xi|^{2m}] - \lambda_1 t^{-2s}$$

Démonstration. - Soit  $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ . On se donne  $\gamma > 1$  et on applique (4.7) pour  $\eta = \rho^\gamma \cdot \eta_0$  à la fonction  $u(t) = \zeta(\rho t) \exp(i\rho^\gamma \tau_0 t)$ , où  $\xi_0 = (\eta_0, \tau_0)$  est fixé et où  $\rho$  est assez grand pour que  $u \in \mathcal{D}(]0, T[)$ . Prenant la partie principale quand  $\rho \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$(4.9) \quad \sum_{\substack{|\alpha| \in \Delta \\ |\beta| \in \Delta}} b_{\alpha\beta} \cdot \xi_0^{\alpha+\beta} \int_0^\infty t^{r|\alpha| + r|\beta|} |\zeta(t)|^2 dt > c_0 \sum_{|\alpha| \in \Delta} \xi_0^{2\alpha} \int_0^\infty t^{2r|\alpha|} |\zeta(t)|^2 dt$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad \Delta &= \{k, \dots, m\} & \text{si } \gamma &= \delta \\ \Delta &= \{k\} & \text{si } 1 < \gamma < \delta \\ \Delta &= \{m\} & \text{si } \delta < \gamma \end{aligned}$$

Puisque (4.9) a lieu pour tout  $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$  on en déduit le i)

Pour démontrer ii) il suffit alors de vérifier que :

$$(4.10) \quad \begin{aligned} &\text{si } p \notin \{k, \dots, m\} \text{ ou si } q \notin \{k, \dots, m\} \text{ alors :} \\ &\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_\varepsilon, \forall (t, \xi) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n : \\ &\quad t^{p+r} q |\xi|^{p+q} \leq \varepsilon [t^{2r} k |\xi|^{2k} + t^{2r} m |\xi|^{2m}] + \lambda_\varepsilon t^{-2s} \end{aligned}$$

- si  $p + q < 2k$ . On a pour  $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  :

$$t^{p+q-2s} |\xi|^{p+q} \leq \varepsilon \cdot t^{2r} k |\xi|^{2k} + \varepsilon^{-(p+q)/(2k-p-q)} t^{-2s}$$

et (4.10) suit puisque  $r_p \geq p-s$ ,  $r_q \geq q-s$  et puisque pour (4.10) on restreint  $t$  à  $]0, T[$

- si  $2k \leq p+q < 2m$ ,  $p < k$ . On a :

$$t^{(p+q)\delta - \sigma} |\xi|^{p+q} \leq t^{2r} k |\xi|^{2k} + t^{2r} m |\xi|^{2m}.$$

Comme  $r_p > p\delta - \sigma$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t_\varepsilon$  tel que (4.10) ait lieu sur  $]0, t_\varepsilon[ \times \mathbb{R}^n$  avec  $\lambda_\varepsilon = 0$ . Mais alors puisque  $p + q < 2m$ , on peut choisir  $\lambda_\varepsilon$  de sorte que (4.10) ait lieu sur  $]t_\varepsilon, T[ \times \mathbb{R}^n$ .

On achève ainsi la démonstration de la proposition 4.3.

IV.2. - On suppose maintenant pour toute la suite que  $b$  est coercitive sur  $V(J)$  et donc que (4.7) a lieu.

On a alors :

PROPOSITION 4.4. -  $b$  est coercitive sur  $V(X)$  et on a :

$$N(\lambda, V(X), b, L^2(X)) = \sum_{\nu \in h^* \mathbb{Z}^{n-1}} N(\lambda, V(0, T), b_\nu, L^2(0, T))$$

$$\text{avec } h^* = 2\pi/h.$$

Démonstration. - On effectue un développement partiel en séries de Fourier : pour

$$u(y, t) = \sum_{\nu \in h^* \mathbb{Z}^{n-1}} u_\nu(t) \cdot h^{(1-n)/2} \cdot \exp(i\nu y)$$

on a

$$\|u\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{\nu} \|u_\nu\|_{L^2(0, T)}^2$$

$$b(u, u) = \sum_{\nu} b_\nu(u_\nu, u_\nu)$$

$$\|u\|_{W(X)}^2 \leq \text{Cte.} \sum_{\nu} \|u_{\nu}\|_{W_{|\nu|}(0,T)}^2 .$$

On en déduit alors la coercitivité de b. D'autre part si on note  $\varphi_{\nu,j}$  ( $j=1,\dots$ ) une base orthonormée de fonctions propres pour les valeurs propres  $\lambda_{\nu,j}$ , de l'opérateur associé au problème variationnel  $(V(0,T), L^2(0,T), b_{\nu})$ , les fonctions  $\tilde{\varphi}_{\nu,j}(y,t) = \varphi_{\nu,j}(t) \cdot h^{(1-n)/2} \exp(i\nu \cdot y)$  forment une base orthonormée de  $L^2(X)$  de fonctions propres pour les valeurs propres  $\lambda_{\nu,j}$  de l'opérateur associé au problème  $(V(X), L^2(X), b)$ , et la proposition suit.

Notons :

$$(4.11) \quad m_1 = \text{Sup} \{p \in \{1, \dots, m\} / p - r_p > 0\} .$$

De l'injection  $W(0,T) \hookrightarrow W_{r_{p_1}}^{m_1}(0,T)$  on tire, grâce à la proposition 3.4 :

$$(4.12) \quad N(\lambda, V(0,T), b_{|\eta|}) = O(\lambda^{1/2 m_1})$$

uniformément pour  $|\eta|$  borné.

On introduit alors les fonctions suivantes :

pour  $R > 0$  on note :

$$\Phi_R(\lambda) = \int_{|\eta| > R} N(\lambda, V(0,T), b_{\eta}) \, d\eta .$$

On modifie la proposition 4.4 en la :

**PROPOSITION 4.5.** - Les fonctions  $N(\lambda, V(X), b, L^2(X))$  et  $(h/2\pi)^{n-1} \cdot \Phi_R(\lambda)$  sont équivalentes au sens suivant :

Pour toute fonction f de  $\mathcal{C}$  vérifiant  $\lambda^{1/2 m_1} = O(f(\lambda))$  on a :

$$N_f^+(V(X), b, L^2(X)) = (h/2\pi)^{n-1} \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi_R(\lambda) / f(\lambda)$$

$$N_f^-(V(X), b, L^2(X)) = (h/2\pi)^{n-1} \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi_R(\lambda) / f(\lambda)$$

**Démonstration.** - Pour  $|\nu| \geq R > (2\pi)/h$  et pour  $\eta$  dans le pavé de centre  $\nu$  de côté  $(2\eta)/h$  on a :

$$|\eta^{\alpha'+\beta'} - \nu^{\alpha'+\beta'}| \leq C \cdot |\eta|^{|\alpha'+\beta'|-1}$$

d'où l'on tire :

$$\forall u \in V(0,T) \quad |b_{\eta}(u,u) - b_{\nu}(u,u)| \leq C_{|\eta|} \|u\|_{W_{|\eta|}(0,T)}^2$$

Notant  $C_0$  et  $\lambda_0$  les constantes de (4.7), on voit alors que  $\varepsilon > 0$  étant donné, on a pour  $|\eta| > C/\varepsilon C_0$

$$\forall u \in V(0,T) \quad |b_\eta(u,u) - b_\nu(u,u)| \leq \varepsilon [b_\eta(u,u) + \lambda_0 \|u\|_{L^2}^2]$$

d'où l'on déduit les encadrements :

$$\begin{aligned} N(\lambda(1-\varepsilon) - \varepsilon\lambda_0, V(0,T), b_\nu) &\leq N(\lambda, V(0,T), b_\eta) \leq \\ &\leq N(\lambda(1+\varepsilon) + \varepsilon\lambda_0, V(0,T), b_\nu). \end{aligned}$$

et compte tenu de (4.12) on obtient :

$$\begin{aligned} N(\lambda(1-\varepsilon) - \varepsilon\lambda_0, V(X), b) &\leq (h/2\pi)^{n-1} \Phi_R(\lambda) + O(\lambda^{1/2m_1}) \\ N(\lambda(1+\varepsilon) + \varepsilon\lambda_0, V(X), b) &\geq (h/2\pi)^{n-1} \cdot \Phi_R(\lambda) + O(\lambda^{1/2m_1}) \end{aligned}$$

La proposition suit alors en passant à la limite d'abord en  $\lambda$ , puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

IV.3. - Nous étudions donc maintenant les fonctions  $N(\lambda, V(0,T), b_\eta)$  et tout d'abord leur comportement par homogénéité.

Pour  $u$  dans  $V(0,T)$  et  $\rho > 0$  on pose  $v(t) = u(t/\rho)$  et on a :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \|u\|_{L^2(0,T)}^2 = \rho^{-1} \|v\|_{L^2(0,\rho T)}^2 \\ b_\eta(u,u) = \rho^{2s-1} b_{\eta/\rho,\rho}(v,v). \end{cases}$$

où les formes  $b_{\eta,\rho}$  sont définies par :

$$b_{\eta,\rho}(v,v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} b_{\alpha,\beta} \cdot \rho^{-s} |\alpha|^{-s} |\beta| \eta^{\alpha'+\beta'} \int_0^{\rho T} t^{r|\alpha|+r|\beta|} D^\alpha n_u \cdot \overline{D^\beta n_v} dt$$

avec  $s_p = -p + r_p + s \geq 0$  pour  $p = 0, \dots, m$ .

Notons que  $s_p = 0$  si et seulement si  $p \in \{\ell, \dots, k\}$ , ( $\ell$  et  $k$  sont définis en (1,2)). On définit alors :

$$(4.14) \quad b_\eta^0(v,v) = \sum_{\substack{\ell \leq |\alpha| \leq k \\ \ell \leq |\beta| \leq k}} b_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha'+\beta'} \int_0^\infty t^{r|\alpha|+r|\beta|} D^\alpha n_v \cdot \overline{D^\beta n_v} dt.$$

qui est définie et continue (cf(3.1)) sur  $W_{r,k}^k(\mathbb{R}_+)$

Il résulte maintenant de (4.13) que :

$$(4.15) \quad N(\lambda, V(0,T), b_\eta, L^2(0,T)) = N(\lambda \rho^{-2s}; V(0,\rho T), b_{\eta/\rho,\rho}, L^2(0,\rho T))$$

On énonce alors :

PROPOSITION 4.6. - Soit b une forme (4.1) vérifiant (4.7). Alors  $b_\eta^0$  est fortement coercitive sur  $V_{r_k, |\eta|}^k(\mathbb{R}_+)$  uniformément en  $\eta \neq 0$ , ie :

$$\exists c'_0 > 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0. \quad \forall u \in V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+).$$

$$b_\eta^0(u, u) \geq c'_0 \|u\|_{W_{r_k, |\eta|}^k(\mathbb{R}_+)}^2$$

Si de plus  $r_k > 0$ . Alors pour tout réel  $\lambda$  :

$$N(\lambda, V(0, \rho T), b_{\eta, \rho}, L^2(0, \rho T)) \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_\eta^0, L^2(\mathbb{R}_+)) \quad \text{p.p. } \eta.$$

Démonstration. - On déduit de (4.7) par le changement de fonction  $v(t) = u(t/\rho)$  que pour  $v \in V(0, \rho T)$  :

$$(4.16) \quad b_{\eta, \rho}(v, v) \geq c'_0 \sum_{p=0}^m \rho^{-2s_p} \|v\|_{W_{r_p, |\eta|}^p(\mathbb{R}_+)}^2 - \lambda \rho^{-2s_0} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2$$

et la coercitivité suit en remarquant que les fonctions à support compact sont denses dans  $V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+)$ , et en faisant tendre  $\rho$  vers  $+\infty$ .

Nous allons maintenant vérifier quand  $r_k > 0$  les hypothèses de la proposition 2.2. pour les problèmes variationnels,  $(V(0, \rho T), L^2(\mathbb{R}_+), b_{\eta, \rho})$  et  $(V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+), b_\eta^0)$   $\eta \neq 0$  étant fixé.

Tout d'abord puisque  $r_k > 0$ , l'injection de  $V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+)$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  est compacte. Ensuite puisque  $|\eta| \neq 0$ . On a  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \text{cte} \|\cdot\|_{W_{r_k, |\eta|}^k(\mathbb{R}_+)}$  et on déduit alors de (4.16) que pour  $\rho$  assez grand on a :

$$(4.17) \quad b_{\eta, \rho}(v, v) \geq c'_0/2 \sum_{p=0}^m \rho^{-2s_p} \|v\|_{W_{r_p, |\eta|}^p(\mathbb{R}_+)}^2$$

On choisit maintenant comme espace  $\mathfrak{D}$  de la proposition 2.2,  $\mathfrak{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$  ou  $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_+)$  suivant que  $V = W$  ou  $\dot{W}$ . Il est clair d'après la définition de  $b_\eta^0$  que :

$$\forall u \in \mathfrak{D} \quad b_{\eta, \rho}(u, u) \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} b_\eta^0(u, u)$$

Soit maintenant  $(u_\rho)$  ( $\rho > \rho_0$ ) une famille de fonctions telles que :

$$\begin{cases} u_\rho \in V(0, \rho T) \text{ et} \\ \sup_\rho b_{\eta, \rho}(u_\rho, u_\rho) < +\infty. \end{cases}$$

On a alors par (4.17) que pour  $p = 0, \dots, m$

$$(4.18) \quad \sup_\rho \rho^{-s_p} \|u_\rho\|_{W_{r_p, |\eta|}^p(\mathbb{R}_+)} < +\infty$$

Soit  $u \in \mathfrak{D}$ . Notons  $T_0$  un réel tel que  $\text{supp } u \subset [0, T_0[$ . Alors  $(b_{\eta, \rho} - b_\eta^0)(u, u_\rho)$  est une somme de termes de la forme :

$$L_{\alpha\beta} = \rho^{-s|\alpha| - s|\beta|} \int_0^T t^{r|\alpha| + r|\beta|} D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} u_{\rho}} \cdot dt$$

avec  $s|\alpha| + s|\beta| > 0$ .

Si  $s|\alpha| > 0$  il est clair par (4.18) que  $L_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ . De même si  $\beta_n \leq k$ , par (4.18)  $t^{r\beta_n} \cdot D^{\beta_n} u_{\rho}$  reste borné dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  et puisque  $u$  est à support compact  $L_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ . Il suffit donc d'étudier maintenant le cas  $|\alpha| \leq k$  et  $\beta_n > k$ . Des intégrations par parties montrent alors que  $L_{\alpha\beta}$  est somme de termes de la forme :

$$\rho^{-s|\alpha| - s|\beta|} \int_0^T t^{\omega} \cdot \overline{D_t^j u} \cdot D_t^k u_{\rho} \cdot dt$$

avec  $\omega > r_k > 0$ , et comme précédemment on conclut que  $L_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ , ce qui achève de vérifier les hypothèses de la proposition 2.2. On en déduit alors que :

$$N(\lambda, V(0, \rho T), b_{n, \rho}, L^2(\mathbb{R}_+)) = N(\lambda, V(0, \rho T), b_{n, \rho}, L^2(0, \rho T)) \\ \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_n^0, L^2(\mathbb{R}_+)).$$

pourvu que  $\lambda$  soit point de continuité de  $N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_n^0)$ .

Remarquons maintenant que l'homogénéité de  $b_n^0$  permet d'obtenir comme (4.15) que :

$$(4.19) \quad N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_n^0) = N(\lambda \rho^{-2s}, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_{n/\rho}^0).$$

D'où l'on déduit en prenant  $\rho = |\eta|$  que  $\lambda$  étant fixé, l'ensemble des  $\eta$  pour lesquels  $\lambda$  n'est pas point de continuité de  $N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_n^0)$  est dans chaque direction dénombrable, et donc négligeable, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.6.

On déduit maintenant de (4.19), de la coercitivité des formes  $b_n^0$  et de la proposition 3.4 le

LEMME. 4.7. - On suppose que  $r_k > 0$ . Il existe alors une constante  $\mu_1 > 0$ , et une constante  $C$  telles que, pour tout  $\lambda > 0$ , et tout  $\eta \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$  on a :

$$N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_n^0) \leq C \cdot \lambda^{1/2 r_k} |\eta|^{-s/r_k} \\ N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_n^0) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda |\eta|^{-2s} < \mu_1$$

On aura de même :

LEMME 4.8. i) Il existe deux constantes  $\mu_0$  et  $R_0$  telles que pour  $|\lambda|^{-2s} < \mu_0$  et  $|\eta| > R_0$  on ait :

$$N(\lambda, V(0, T), b_\eta) = 0$$

ii) Il existe une constante  $C$  telles que pour tous  $\lambda \geq 0, \eta \neq 0,$  et  $T_1 \leq T$  on ait :

$$N(\lambda, V(0, T_1), b_\eta) \leq C [1 + \lambda^{1/2k} \cdot T_1^{s/k}] .$$

Démonstration. - Il résulte de (4.15) et (4.16) que :

$$N(\lambda, V(0, T_1), b_\eta) \leq N((\lambda + \lambda_0)|\eta|^{-2s} / c'_0, w_{r_k}^k(0, |\eta| T_1)).$$

et ii) résulte de la proposition 3.4.

Si  $r_k > 0$ . On majore  $N(\lambda', w_{r_k}^k(0, |\eta| T))$  par  $N(\lambda' w_{r_k}^k(\mathbb{R}_+))$  et on obtient i) comme au lemme 4.7. par la proposition 3.4.

Si  $r_k = 0$ ,  $w_0^k(0, |\eta| T)$  est l'espace de Sobolev usuel  $H^k(0, |\eta| T)$  et de  $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^k}$  on déduit que  $N(\mu, H^k(0, |\eta| T)) = 0$  si  $\mu < 1$ .

D'où encore i).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

THÉORÈME 4.9. - Soit  $b$  une forme (4.1) vérifiant (4.7). Alors si  $n \cdot r_k > k$  on a :

$$N(\lambda, V(X), b, L^2(X)) \sim \{(2\pi)^{1-n} \int_{T^*X'} N(\lambda, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), b_\eta^0) \cdot dy \cdot d\eta\} \lambda^{\frac{n-1}{2s}} .$$

Remarque. - La convergence de l'intégrale résulte du lemme 4.7 et de l'hypothèse  $n \cdot r_k > k$ .

Démonstration. - En utilisant (4.15) on a :

$$(4.20) \quad \Phi_R(\lambda^{2s}) = \lambda^{(n-1)} \int_{|\eta| > R} N(1, V(0, \lambda T), b_{\eta, \lambda}) d\eta .$$

Par le lemme (4.8) on a, si  $R > R_0$ ,  $N(1, V(0, \lambda T), b_{\eta, \lambda}) = 0$  si  $|\eta|^{-2s} < \mu_0$ .

On déduit de (4.16) la majoration :

$$N(1, V(0, \lambda T), b_{\eta, \lambda}) \leq N((1 + \lambda_0/\lambda)|\eta|^{-2s} c'_0{}^{-1}, w_{r_k}^k(\mathbb{R}_+)) .$$

et

$$N(1, V(0, \lambda T), b_{\eta, \lambda}) = 0 (|\eta|^{-s/r_k}) .$$

Le théorème résulte alors d'une application du théorème de la convergence dominée pour le passage à la limite de l'intégrale intervenant en (4.20).

IV.4. - Nous étudions maintenant le cas  $n r_k \leq k$ . Pour cela nous utiliserons des estimations plus précises de  $N(\lambda, V(0, T), b_\eta)$ .

Pour des raisons techniques nous supposerons maintenant, quitte à changer  $b$  en  $b + \lambda_0(\cdot, \cdot)_{L^2(X)}$ , que l'on peut prendre  $\lambda_0 = 0$  dans (4.7). On a alors :

LEMME 4.10. - Il existe une constante  $L$ , telle que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ , tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , et tous réels  $t_1$  et  $t_2$  vérifiant  $0 < t_1 < t_2 \leq T$  et  $|t_2 - t_1| < \varepsilon t_1$ , on ait :

$$N(\lambda, H_0^m(t_1, t_2), b_\eta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{b_\eta(t, \tau) \leq \lambda(1+L\varepsilon)} d\tau + 2m$$

$$N(\lambda, H_0^m(t_1, t_2), b_\eta) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{b_\eta(t, \tau) \leq \lambda(1-L\varepsilon)} d\tau - 3m.$$

Démonstration. - Soit  $\theta \in ]t_1, t_2]$ . Notons  $\tilde{b}$  la forme obtenue en figeant les coefficients de  $b_\eta$  en  $\theta$ . On a alors pour  $u$  dans  $H_0^m(t_1, t_2)$  :

$$(4.21) \quad |b_\eta(u, u) - \tilde{b}(u, u)| \leq Cte. \quad \varepsilon \|u\|_{W_{|\eta|}(0, T)}^2 \leq L \cdot \varepsilon b_\eta(u, u).$$

où  $L$  ne dépend que des  $b_{\alpha\beta}$ , de la suite  $r_p$ , et de la constante  $c_0$  de (4.7). On tire de (4.21) :

$$(4.22) \quad N(\lambda(1-L\varepsilon), H_0^m(t_1, t_2), \tilde{b}) \leq N(\lambda, H_0^m(t_1, t_2), b_\eta) \leq N(\lambda(1+L\varepsilon), H_0^m(t_1, t_2), \tilde{b}).$$

Notant  $H_{\#}^m(t_1, t_2)$  l'espace des fonctions périodiques de  $H^m(t_1, t_2)$ . On a puisque  $H_0^m(t_1, t_2)$  est de codimension  $m$  dans  $H^m(t_1, t_2)$  :

$$(4.23) \quad 0 \leq N(\lambda, H_{\#}^m(t_1, t_2), \tilde{b}) - N(\lambda, H_0^m(t_1, t_2), \tilde{b}) \leq m.$$

Or on sait que :

$$N(\lambda, H_{\#}^m(t_1, t_2), \tilde{b}) = \text{Card} \{ p \in \mathbb{Z} / b_\eta(\theta, \frac{2\pi p}{t_2 - t_1}) \leq \lambda \}.$$

D'où l'on tire en utilisant que  $b_\eta(\theta, \tau)$  est un polynôme de degré  $2m$  en  $\tau$  :

$$|N(\lambda; H_{\#}^m(t_1, t_2), \tilde{b}) - \frac{t_2 - t_1}{2\pi} \int_{b_\eta(\theta, \tau) \leq \lambda} d\tau| \leq 2m$$

et le lemme suit en reportant cette estimation dans (4.23) et (4.22) et en intégrant ensuite en  $\theta$ .

On utilisera aussi.

LEMME 4.11. - Si  $c_0$  est la constante de (4.7), alors pour tous  $t_1 \leq T$ ,  $\lambda \geq 0$  et  $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$  tels que  $c_0 t_1 \cdot 2^k r_k |\eta|^{2k} > \lambda$ , on a :

$$N(\lambda, H_0^m(t_1, T), b_\eta) = 0.$$

Démonstration. - Pour  $u$  dans  $V(0, T)$  on a :

$$b_\eta(u, u) \geq c_0 \|u\|_{W_{|\eta|}}^2(0, T) \geq c_0 |\eta|^{2k} \cdot \|t^{r_k} u\|_{L^2(0, T)}^2$$

d'où pour  $u$  dans  $H_0^m(t_1, T)$  :

$$\|u\|_{L^2(t_1, T)}^2 \leq \frac{1}{c_0} t_1^{-2r_k} |\eta|^{-2k} b_\eta(u, u)$$

et le lemme suit.

On introduit maintenant les notations suivantes :

pour  $\rho > 0$ ,  $\lambda > 0$  et  $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$  on note :

$$(4.24) \quad \begin{aligned} \theta_\rho(\lambda, \eta) &= \text{Inf}(T|\eta|, (\rho\lambda|\eta|^{-2s})^{1/2r_k}) \quad \text{si } r_k > 0 \\ \theta_\rho(\lambda, \eta) &= T|\eta| \quad \text{si } r_k = 0 \end{aligned}$$

et

$$(4.25) \quad \Psi_\rho(\lambda, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{b_\eta(t, \tau) \leq \lambda \\ 1 < t|\eta| < \theta_\rho(\lambda, \eta)}} dt.d\tau$$

On a alors le :

LEMME. 4.12. - Il existe des constantes  $\varepsilon_0$ ,  $\rho_0$ ,  $L$  et  $R_1$  telles que pour tous  $\varepsilon < \varepsilon_0$   $\rho > \rho_0$   $\lambda > 0$  et tout  $\eta$  vérifiant  $R_1 < |\eta| < (1/2 \rho, \lambda)^{1/2s}$ , on a :

$$\begin{aligned} N(\lambda, V(0, T), b_\eta) &\leq \Psi_\rho(\lambda(1+\varepsilon), \eta) + O(1 + \lambda^{1/2k} |\eta|^{-s/k}) + O(1 + \text{Log } \theta_\rho(\lambda, \eta)). \\ N(\lambda, V(0, T), b_\eta) &\geq \Psi_\rho(\lambda(1-\varepsilon), \eta) + O(1 + \text{Log } \theta_\rho(\lambda, \eta)). \end{aligned}$$

Démonstration. - Etant donnée une partition de  $]0, T[$  en intervalles  $]0, t_0[$ , et  $]t_j, t_{j+1}[$  pour  $j = 0, \dots, \nu$ , avec  $t_{\nu+1} = T$ , l'espace  $V(0, t_0) \oplus \left[ \bigoplus_{j=0}^{\nu} H_0^m(t_j, t_{j+1}) \right]$  est inclus  $V(0, T)$  et est de codimension  $m(\nu+1)$  dans  $V(0, T)$  ; on en déduit :

$$(4.26) \quad 0 \leq N(\lambda, V(0, T), b_\eta) - \sum_{j=0}^{\nu} N(\lambda, H_0^m(t_j, t_{j+1}), b_\eta) \leq N(\lambda, V(0, t_0), b_\eta) + m(\nu+1)$$

On choisit  $t_0 = 1/|\eta|$ , et par le lemme 4.8 on a :

$$(4.27) \quad N(\lambda, V(0, t_0), b_\eta) = O(1 + \lambda^{1/2k} \cdot |\eta|^{-s/k}).$$

Etablissons la minoration du lemme, la majoration s'obtenant de manière similaire en utilisant en outre (4.27).

Soit  $L$  la constante garantie par le lemme 4.10.

Soit  $\varepsilon < \text{Log } 2$ . tel que  $4L\varepsilon < 1$ ; notons  $\lambda' = \lambda(1)2L\varepsilon > \frac{\lambda}{2}$ .

Soit  $\rho > 0$ , et soit  $\eta$  tel que  $2|\eta|^{2s} < \rho \cdot \lambda$ .

Si  $\theta_\rho(\lambda', \eta) = T|\eta|$  on choisit les  $t_j$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} t_j = 1/|\eta| \cdot e^{\varepsilon j} & j = 0, \dots, \nu \\ t_{\nu+1} = T \leq 1/|\eta| e^{\varepsilon(\nu+1)} \end{cases}$$

de sorte que  $|t_{j+1} - t_j| < 2\varepsilon t_j$  et  $\nu \leq \frac{1}{\varepsilon} \text{Log } T|\eta|$ . Ce choix est possible pourvu que  $T|\eta| > 1$ , c'est à dire  $|\eta|$  assez grand. On applique le lemme 4.10 sur les intervalles  $]t_j, t_{j+1}[$  et on obtient la minoration.

Si  $\theta_\rho(\lambda', \eta) < T|\eta|$  on choisit les  $t_j$  :

$$\begin{cases} t_j = 1/|\eta| e^{\varepsilon j} & j = 0, \dots, \nu-1, \\ t_\nu = 1/|\eta| \theta_\rho(\lambda', \eta) \leq 1/|\eta| e^{\varepsilon \nu} \\ t_{\nu+1} = T. \end{cases}$$

Ce choix est possible puisque  $2|\eta|^{2s} < \rho \lambda$  implique  $|\eta|^{2s} < \rho \lambda'$  et  $\theta_\rho(\lambda', \eta) > 1$ .

On applique le lemme (4.10) sur les intervalles  $t_j, t_{j+1}$  pour  $j = 0, \dots, \nu-1$  et le lemme (4.11) sur l'intervalle  $]t_\nu, T[$  : pour cela il suffit que

$c_0 t_\nu^{2r_k} \cdot |\eta|^{2k} > \lambda$ , ce qui, compte tenu du choix de  $t_\nu$ , est satisfait dès que  $\rho$  est assez grand.

On introduit maintenant les fonctions :

$$\Psi_{R,\rho}(\lambda) = \int_{A_{R,\rho}(\lambda)} dt \cdot d\xi.$$

où  $A_{R,\rho}(\lambda)$  est l'ensemble des  $(t, \xi) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n$  qui vérifient, en notant  $\xi = (\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  :

$$(4.28) \quad \begin{cases} R < |\eta| < (\rho \lambda)^{1/2s} \\ 1 < t \cdot |\eta| \\ b(t, \xi) < \lambda \end{cases}$$

On a alors :

PROPOSITION. 4.13. - Pour  $R$  et  $\rho$  assez grands les fonctions  $N(\lambda, V(X), b, L^2(X))$  et  $(2\pi)^{-n} h^{(n-1)} \Psi_{R,\rho}(\lambda)$  sont équivalentes au sens suivant :

$$N_f^\pm(V(X), b, L^2(X)) = \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \cdot \lim_{\inf} \sup \Psi_{R,\rho}(\lambda) / f(\lambda)$$

pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \lambda^{(n-1)2s} &= O(f(\lambda)) & \text{si } r_k > 0 \\ \lambda^{(n-1)2s} \text{Log}\lambda &= O(f(\lambda)) & \text{si } r_k = 0 \end{aligned}$$

Démonstration : Soient  $\mu_0$  et  $R_0$  les constantes du lemme 4.8 i).

Fixons  $\rho > \frac{1}{\mu_0}$  et  $R > R_0$ , de sorte que pour  $|\eta| > (\rho\lambda)^{1/2s} > R$  on ait :

$$N(\lambda, V(0, T), b_\eta) = 0.$$

On choisit maintenant  $\rho_1 > \text{Sup}(2\rho, \rho_0)$  et on déduit du lemme 4.12 :

$$(4.29) \quad \begin{cases} \Phi_R(\lambda) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{R < |\eta| < (\rho\lambda)^{1/2s}} \Psi_{\rho_1}(\lambda(1+\varepsilon), \eta) d\eta + O(\chi_1(\lambda) + \chi_2(\lambda)). \\ \Phi_R(\lambda) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{R < |\eta| < (\rho\lambda)^{1/2s}} \Psi_{\rho_1}(\lambda(1-\varepsilon), \eta) d\eta + O(\chi_2(\lambda)) \end{cases}$$

avec

$$\chi_1(\lambda) = \int_{R < |\eta| < (\rho\lambda)^{1/2s}} [1 + (\lambda|\eta|^{-2s})^{1/2k}] d\eta$$

et

$$\chi_2(\lambda) = \int_{R < |\eta| < (\rho\lambda)^{1/2s}} [1 + \text{Log} \theta_{\rho_1}(\lambda, \eta)] d\eta.$$

On a les estimations :

$$\begin{cases} \chi_1(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s}) & \text{en général} \\ \chi_1(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s} \text{Log}\lambda) & \text{si } n = 2 \text{ et } r_k = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_2(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s}) & \text{si } r_k > 0. \\ \chi_2(\lambda) = O(\lambda^{(n-1)/2s} \text{Log}\lambda) & \text{si } r_k = 0 \end{cases}$$

On déduit alors de 4.29 que  $N(\lambda, V(X), b)$  est équivalente au sens indiqué dans la proposition 4.13 à la fonction  $(2\pi)^{-n} \cdot h^{(n-1)} \int_{A_{R, \rho, \rho_1}(\lambda)} dt \cdot d\xi$ .

avec :

$$A_{R, \rho, \rho_1}(\lambda) = \{(t, \xi) \in A_{R, \rho}(\lambda) / t|\eta| < \theta_{\rho_1}(\lambda, \eta)\}$$

Remarquons alors que pour  $(t, \xi) \in A_{R, \rho}(\lambda)$  on a  $1 < t|\eta| < t(\rho\lambda)^{1/2s}$

et d'après la proposition 4.3 ii)

$$(4.30) \quad C_2 [t^{2r_k} |\xi|^{2k} + t^{2r_m} |\xi|^{2m}] \leq \lambda (1 + \rho\lambda_1).$$

d'où :

$$t^{2r_k} |\eta|^{2k} \leq \lambda (1 + \rho\lambda_1) / C_2$$

et finalement :

$$t|\eta| < \theta_{\rho, (\lambda, n)} \text{ si } \rho' > (1 + \rho\lambda_1)/C_2 .$$

On voit donc que  $A_{R, \rho, \rho_1}(\lambda) = A_{R, \rho}(\lambda)$  si  $\rho_1$  est choisi assez grand devant  $\rho$  et ceci achève la démonstration de la proposition.

IV. - 5. Il nous reste maintenant à étudier le comportement asymptotique des fonctions  $\Psi_{R, \rho}(\lambda)$  et on démontrera le

THÉORÈME 4.14. - Soit b une forme (4.1) vérifiant (4.7). Avec les notations (4.8).

on a :

i) si  $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$  alors :

$$N(\lambda, V(X), b) \sim \lambda^{(n\delta-1)/2\sigma} \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dt \cdot \int_{b^1(t, \xi) < 1} d\xi \right\}$$

ii) si  $\frac{r_m}{m} < \frac{1}{n}$

$$N(\lambda, V(X), b) \sim \lambda^{n/2m} \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \int_0^T dt \cdot \int_{b^m(\xi) < t^{-2r_m}} d\xi \right\}$$

iii) si  $\frac{r_k}{k} = \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda, V(X), b) \sim \lambda^{n/2k} \text{Log} \lambda \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma} \right) \int_{b^k(\xi) < 1} d\xi \right\}$$

iv) si  $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} = \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda, V(X), b) \sim \lambda^{n/2m} \text{Log} \lambda \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{1}{2\sigma} \int_{b^m(\xi) < 1} d\xi \right\}$$

v) si  $\frac{r_k}{k} = \frac{1}{n} = \frac{r_m}{m}$  (et alors  $k = m$ ).

$$N(\lambda, V(X), b) \sim \lambda^{n/2m} \text{Log} \lambda \cdot \left\{ \frac{h^{n-1}}{(2\pi)^n} \cdot \frac{1}{2s} \int_{b^m(\xi) < 1} d\xi \right\}$$

Démonstration. -

i) Par le changement de variables  $(t, \xi) \rightarrow (t\lambda^{1/2\sigma}, \xi \cdot \lambda^{-\delta/2\sigma})$  on obtient :

$$\Psi_{R, \rho}(\lambda) = \lambda^{(n\delta-1)/2\sigma} \int_{A'_{R, \rho}(\lambda)} dt d\xi .$$

où  $A'_{R, \rho}(\lambda)$  est l'ensemble des  $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\begin{cases} R \cdot \lambda^{-\delta/2\sigma} < |\eta| < \rho^{1/2s} \lambda^{1/2s - \delta/2\sigma} \\ \lambda^{-(\delta-1)/2\sigma} < t|\eta| < T \lambda^{1/2\sigma} \\ b_\lambda(t, \xi) < 1 \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$b_\lambda(t, \xi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} b_{\alpha\beta} \cdot \lambda^{-\sigma|\alpha| - \sigma|\beta|} t^{r|\alpha| + r|\beta|} \xi^{\alpha+\beta}$$

avec  $\sigma_p = (\sigma + r_p - \delta.p)/2\sigma$  ( $p = 0, \dots, m$ ).

On a donc :  $b_\lambda(t, \xi) \rightarrow b^1(t, \xi)$  ( $\lambda \rightarrow +\infty$ ).

D'autre part par (4.30) on a :

$$A'_{R,\rho}(\lambda) \subset \{(t, \xi) / t^{2r_k} |\xi|^{2k} + t^{2r_m} |\xi|^{2m} \leq \text{cte}\}$$

et l'hypothèse  $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$  implique que ce dernier ensemble est de mesure finie dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ . On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée. Si

$r_k > 0$  on a  $\frac{1}{2s} - \delta/2\sigma > 0$  et alors :

$$(4.31) \int_{A'_{R,\rho}(\lambda)} dt.d\xi \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \int b^1(t, \xi) < 1$$

Si  $r_k = 0$ ,  $\frac{1}{2s} - \delta/2\sigma = 0$  et :

$$(4.32) \int_{A'_{R,\rho}(\lambda)} dt.d\xi \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \int \frac{b^1(t, \xi) < 1}{|n| < \rho^{2s}}$$

Remarquons alors que par la proposition (4.3)  $b^1(t, \xi) < 1$  implique  $|n| < |\xi| < \text{cte}$  et donc si  $\rho$  est assez grand (4.32) est la même chose que (4.31).

Il reste à vérifier, pour appliquer la proposition 12, que  $(n-1)/2s < (n\delta-1)2\sigma$ ; or cette inégalité équivaut à  $nr_k < k$ .

ii) On procède comme dans i) avec le changement de variable  $(t, \xi) \rightarrow (t, \xi \cdot \lambda^{-1/2m})$ . On vérifie aussi que  $(n-1)/2s < n/2m$  ce qui est impliqué par :

$$n(m-s) \leq nr_m < m$$

iii) Soit  $\varepsilon > 0$ . On a les majorations :

$$(4.33) \int_{A_{R,\rho}(\lambda) \cap [|\xi|t^\delta > \varepsilon]} dt.d\xi = 0 \ (\lambda^{n/2k}).$$

$$(4.34) \int_{A_{R,\rho}(\lambda) \cap [t|\xi| < 1/\varepsilon]} dt.d\xi = 0 \ (\lambda^{n/2k}).$$

On utilise en effet (4.30) pour majorer les intégrales par :

$$\int_{\substack{\varepsilon < |\xi|t^\delta \\ (t^\delta|\xi|)^{2m} < \text{cte} \cdot t^{2\sigma\lambda}}} dt d\xi \quad \text{et} \quad \int_{\substack{(t|\xi|)^{2k} \leq \text{cte} \lambda t^{2s} \\ 1 \leq t|\xi| < 1/\varepsilon}} dt d\xi$$

On remarque maintenant que pour  $(\varepsilon t)^{-1} < |\xi| < \varepsilon t^{-\delta}$  on a :

$$t^{r_p} |\xi|^p < \varepsilon^{|p-k|} t^{r_k} |\xi|^k$$

et en utilisant la proposition 4.3 on en déduit :

$$|b(t, \xi) - t^{2r_k} b^k(\xi)| \leq L \varepsilon t^{2r_k} b^k(\xi)$$

avec une certaine constante L ne dépendant que des  $b_{\alpha\beta}$  et de la suite  $r_p$ .

Notons  $B_\varepsilon(\lambda)$  l'ensemble des  $(t, \xi) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\begin{cases} R < |\eta| < (\rho^\lambda)^{1/2s} \\ 1 < t |\eta| \\ t|\xi| > 1/\varepsilon & t^\delta |\xi| < \varepsilon \\ t^{2r_k} b^k(\xi) < \lambda \end{cases}$$

et on pose  $\theta_\varepsilon(\lambda) = \int_{B_\varepsilon(\lambda)} dt. d\xi$ .

Il résulte alors de (4.33) et (4.34) que :

$$(4.35) \quad \begin{cases} \Psi_{R,\rho}(\lambda) \leq \theta_\varepsilon(\lambda(1+L\varepsilon)) + O(\lambda^{n/2k}) \\ \Psi_{R,\rho}(\lambda) \geq \theta_\varepsilon(\lambda(1-L\varepsilon)) + O(\lambda^{n/2k}) \end{cases}$$

On évalue  $\theta_\varepsilon(\lambda)$  par le changement de variable  $(t, \xi) \rightarrow (t, \lambda^{-1/2k} t^{r_k/k} \xi)$ , et on obtient en tenant compte de ce que  $nr_k = k$  :

$$\theta_\varepsilon(\lambda) = \lambda^{n/2k} \int_{b^k(\xi) < 1} d\xi \int_{B_\varepsilon(\lambda, \xi)} t^{-1} dt$$

où  $B_\varepsilon(\lambda, \xi)$  est l'ensemble des  $t \in ]0, T[$  vérifiant :

$$\begin{cases} R^{2k} t^{2r} \leq |\eta|^{2k} \lambda & ; & t^{2r} > \rho^{-k/s} |\eta|^{2k} \lambda^{-r/s} \\ t^{2s} |\eta|^{2k} \lambda \geq 1 \\ t^{2s} |\xi|^{2k} \lambda \geq \varepsilon^{-2k} & ; & t^{2\sigma} |\xi|^{2k} \lambda < \varepsilon^{2k} \end{cases}$$

On obtient alors que :

$$(4.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{B_\varepsilon(\lambda, \xi)} t^{-1} dt \sim \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma} \right) \text{Log } \lambda \\ \int_{B_\varepsilon(\lambda, \xi)} t^{-1} dt \leq \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma} \right) \text{Log } \lambda + O[|\text{Log } |\xi|| + 1] \end{array} \right.$$

Par la proposition (4.3) l'ensemble des  $\xi$  vérifiant  $b^k(\xi) < 1$  est borné et on déduit de (4.36) par le théorème de la convergence dominée que :

$$\theta_\varepsilon(\lambda) \sim \lambda^{n/2k} \text{Log } \lambda \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma} \right)$$

On obtient alors iii) en reportant cette estimation dans (4.35), en passant à

la limite en  $\lambda$  puis en  $\epsilon$ , et en remarquant, pour appliquer la proposition 4.13, que  $(n-1)/2s = n/2k$  mais que  $r_k = k/n > 0$ .

iv) On procède comme pour iii). En utilisant (4.30) on prouve que :

$$(4.37) \quad \int_{A_{R,\rho}(\lambda) \cap [|\xi| < 1/\epsilon, t^{-\delta}] dt \cdot d\xi} = 0 \quad (\lambda^{n/2m})$$

Pour  $t^\delta |\xi| > 1/\epsilon$  on a de même

$$|b(t,\xi) - t^{2r_m} b^m(\xi)| < L \cdot \epsilon \cdot t^{2r_m} b^m(\xi).$$

On se ramène alors à étudier les fonctions :

$$\theta_\epsilon(\lambda) = \int_{B_\epsilon(\lambda)} dt \cdot d\xi.$$

où  $B_\epsilon(\lambda)$  est l'ensemble des  $(t,\xi) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\begin{cases} R < |\eta| < (\rho\lambda)^{1/2s} \\ 1 < t |\eta|, \quad t^\delta |\xi| \geq 1/\epsilon \\ t^{2r_m} b^m(\xi) < \lambda. \end{cases}$$

On conclut alors par le changement de variables  $(t,\xi) \rightarrow (t, \lambda^{-1/2m} \cdot t^{r_m/m} \cdot \xi)$

v) On reprend la démonstration de IV) mais en utilisant (4.34) à la place de (4.37)

## V. ÉTUDE SUR $\Omega$ .

V.1 Notations. On se donne comme au I l'ouvert  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , la fonction  $\varphi$ , la suite  $r_p$  définie en (1,2) et l'espace  $W(\Omega)$  associé. On choisit comme espace variationnel l'un des deux espaces  $W(\Omega)$  ou  $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ ; on le note  $V(\Omega)$  et on convient comme au IV de noter  $V$ , en général, le symbole  $W$  ou  $\overset{\circ}{W}$  choisi.

Soit  $a$  une forme hermitienne (1.3); on note  $a^m(x,\xi)$  la fonction définie sur  $T^* \Omega$  par :

$$a^m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \cdot \varphi(x)^{r|\alpha|+r|\beta|} \xi^{\alpha+\beta}$$

Nous allons introduire maintenant quelques notations. Précisons d'abord que pour  $x \in \Gamma$ ,  $T_x^* \Gamma$  est plongé dans  $T_x^* \mathbb{R}^n$  en identifiant  $T_x^* \Gamma$  aux covecteurs de  $\mathbb{R}^n$  nuls sur la normale en  $x$  à  $\Gamma$ , ou ce qui revient de même, en identifiant les espaces euclidiens à leur dual. On définit donc pour  $(x,\xi) \in T^* \Gamma$  les formes à une variable.

$$a_{x,\xi}(u,v) = \int_0^1 \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x \cdot t^{r|\alpha|+r|\beta|} (\xi + d\varphi(x)D_t)^\alpha u(t) \cdot \overline{(\xi + d\varphi(x)D_t)^\beta v(t)} dt.$$

$$a_{x,\xi}^0(u,v) = \int_0^\infty \sum_{\substack{\ell \leq |\alpha| \leq k \\ \ell \leq |\beta| \leq k}} a_{\alpha\beta}(x) \cdot t^{r|\alpha|+r|\beta|} \frac{(\xi+d\varphi(x)D_t)^\alpha u(t)}{(\xi+d\varphi(x)D_t)^\beta v dt}.$$

On note  $\tilde{\Omega} = \Gamma \times \mathbb{R}_+$ ,  $\tilde{x} = (x,t)$  la variable de  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\xi} = (\xi,\tau)$  la variable duale dans  $T_x \Gamma \times \mathbb{R}_+$ .

On définit alors :

$$a^1(\tilde{x},\tilde{\xi}) = \sum_{\substack{k \leq |\alpha| \leq m \\ k \leq |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) t^{r|\alpha|+r|\beta|} (\xi + \tau d\varphi(x))^{\alpha+\beta}$$

$$a^k(x,\tilde{\xi}) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x) \cdot (\xi + \tau d\varphi(x))^{\alpha+\beta}$$

$$a^m(x,\tilde{\xi}) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \cdot (\xi + \tau d\varphi(x))^{\alpha+\beta}$$

V.2. Les résultats. Nous pouvons maintenant énoncer :

THÉORÈME 5.1. - Soit a une forme hermitienne (1.3). Pour que a soit coercitive sur  $V(\Omega)$ , il faut et il suffit que :

i) a soit elliptique i.e :  $\forall (x,\xi) \in T^* \Omega, a^m(x,\xi) > 0$

ii) Il existe  $T > 0, c_0 > 0$  et  $\lambda_0$  tels que :

$\forall (x,\xi) \in T^* \Gamma, \forall u \in V(0,T) :$

$$a_{x,\xi}^0(u,u) \geq c_0 \|u\|_{W_{|\xi|}(0,T)}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2(0,T)}^2$$

THÉORÈME 5.2. - Soit a une forme hermitienne (1.3) coercitive sur  $V(\Omega)$ . Alors :

i) Il existe  $c_1 > 0$  telle que :

$\forall (x,\xi) \in T^* \Gamma \setminus 0, \forall u \in V_{r,k}^k(\mathbb{R}_+).$

$$a_{x,\xi}^0(u,u) \geq c_1 \|u\|_{W_{r_k,|\xi|}^k(\mathbb{R}_+)}^2$$

ii) Il existe  $c_2 > 0$  telle que pour  $(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in T^* \tilde{\Omega}$  avec  $\tilde{x} = (x,t)$ , on ait :

$$a^1(\tilde{x},\tilde{\xi}) \geq c_1 [ t^{2r_k} |\tilde{\xi}|^{2k} + t^{2r_m} |\tilde{\xi}|^{2m} ]$$

$$a^k(x,\tilde{\xi}) \geq c_1 |\tilde{\xi}|^{2k}$$

$$a^m(x,\tilde{\xi}) \geq c_1 |\tilde{\xi}|^{2m}.$$

THÉORÈME 5.3. - Soit a une forme (1.3) coercitive sur  $V(\Omega)$  : On a en notant

$$N(\lambda) = N(\lambda, V(\Omega), a, L^2(\Omega)) :$$

1. Si  $\frac{r_k}{k} > 1/n$  alors :

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{1-n} \int_{\Gamma^*} N(1, V_{r_k}^k(\mathbb{R}_+), a_{x,\xi}^0, L^2(\mathbb{R}_+)) dx d\xi\} \lambda^{(n-1)/2s}$$

2. Si  $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$  alors

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n} \int_{a^1(x,\xi) < 1} dx d\xi\} \lambda^{(n\delta-1)/2\sigma}$$

3. Si  $\frac{r_m}{m} < \frac{1}{n}$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n} \int_{a^m(x,\xi) < 1} dx d\xi\} \lambda^{n/2m}$$

4. Si  $\frac{r_k}{k} = \frac{1}{n} < \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n} (\frac{1}{2s} - \frac{1}{2\sigma}) \int_{a^k(x,\xi) < 1} dx d\xi\} \lambda^{n/2k} \text{Log } \lambda$$

5. Si  $\frac{r_k}{k} < \frac{1}{n} = \frac{r_m}{m}$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n} \frac{1}{2\sigma} \int_{a^1(x,\xi) < 1} dx d\xi\} \lambda^{n/2m} \text{Log } \lambda$$

6. Si  $k = m$  et  $\frac{r_m}{m} = 1/n$

$$N(\lambda) \sim \{(2\pi)^{-n} \cdot \frac{1}{2s} \int_{a^m(x,\xi) < 1} dx d\xi\} \lambda^{n/2m} \text{Log } \lambda$$

Remarque 1. Toutes les intégrales écrites sont finies grâce au théorème 5.2. et pour la première, grâce aussi à la proposition 3.4.

Remarque 2. D'après (1.2) la suite  $\frac{r_p}{p}$  est strictement croissante pour  $p \geq 2$ ; on a donc envisagé tous les cas possibles.

Nous entreprenons simultanément la démonstration des trois théorèmes, le but étant après un certain nombre d'étapes intermédiaires de se ramener aux cas examinés en IV.

Une condition nécessaire, que nous supposons désormais satisfaite, de coercivité de  $a$  est l'ellipticité qui équivaut à la coercivité de  $a$  sur les espaces  $H_0^m(\Omega_0)$ ,  $\Omega_0$  ouvert tel que  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$  (cf p.exple [1])

V.3. Localisation. On notera pour  $0$  ouvert l'inclus dans  $\Omega$  :

$$V(0) = \{u \in V(\Omega) / \text{supp } u \subset \bar{0}\}$$

LEMME 5.4. Soit  $a$  une forme (1.3) elliptique. Alors  $a$  est coercitive sur  $V(\Omega)$ , si et seulement si pour tout  $x$  de  $\Gamma$  il existe un voisinage  $0_x$  de  $x$  tel que  $a$  soit

coercitive sur  $(\Omega \cap O_x)$

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Prouvons qu'elle est suffisante.

Soit  $O_i (i = 1, \dots, \nu)$  un recouvrement de  $\Gamma$  tel que  $a$  soit coercitive sur  $V(\Omega \cap O_i)$ . Soit  $O_0 \subset \bar{O}_0 \subset \Omega$  : tel que  $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{\nu} O_i$  ;  $a$  est coercitive sur  $V(O_0) = H_0^m(O_0)$ .

Soient  $\zeta_i \in \mathcal{D}(O_i)$  pour  $i = 0, \dots, \nu$ , telles que  $\sum_{i=0}^{\nu} \zeta_i^2 = 1$  sur  $\Omega$ .

On a alors :

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{i=0}^{\nu} \|\zeta_i u\|_{L^2(\Omega \cap O_i)}^2 \\ a(u, u) &= \sum_{i=0}^{\nu} a(\zeta_i u, \zeta_i u) + R(u, u) \end{aligned}$$

avec

$$(5.2) \quad |R(u, u)| \leq cte \cdot \sum_{\substack{\alpha < p < m \\ 0 < q < m}} \|u\|_{W_{r_p}^{p-1}(\Omega)} \cdot \|u\|_{W_{r_q}^q(\Omega)}$$

Donc d'après la proposition 3.1, pour tout  $\varepsilon$  il existe  $C_\varepsilon$  telle que :

$$\forall u \in V(\Omega) \quad |R(u, u)| \leq \varepsilon \|u\|_{W(\Omega)}^2 + C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Le lemme en résulte en remarquant que pour  $u$  dans  $V(\Omega)$ ,  $\zeta_i u$  est dans  $V(\Omega \cap O_i)$  et que :

$$\|u\|_{W(\Omega)}^2 \leq cte \sum_{i=0}^{\nu} \|\zeta_i u\|_{W(\Omega)}^2$$

Nous avons de même :

PROPOSITION 5.5. Soit une forme (1.3) coercitive sur  $V(\Omega)$ . Alors pour tout recouvrement de  $\bar{\Omega}$  par des ouverts  $O_i (i = 0, \dots, \nu)$  et pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$ , on a :

$$N_f^+(V(\Omega), a) \leq \sum_{i=0}^{\nu} N_f^+(V(\Omega \cap O_i), a)$$

Démonstration. Soient  $\zeta_i \in \mathcal{D}(O_i)$  ( $i = 0, \dots, \nu$ ) telles que  $\sum_{i=0}^{\nu} \zeta_i^2 = 1$  sur  $\Omega$ . On considère l'isométrie  $\mathcal{J}$  de  $L^2(\Omega)$  dans  $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=0}^{\nu} L^2(\Omega \cap O_i)$ , qui  $i=0$  envoie  $V(\Omega)$  dans  $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=0}^{\nu} V(\Omega \cap O_i)$ , définie par :

$$u = \bigoplus_{i=0}^{\nu} \zeta_i u$$

On définit sur  $\mathcal{V}$  la forme  $\tilde{a}$  par :

$$\tilde{a}(\bigoplus u_i, \bigoplus v_i) = \sum_{i=0}^{\nu} a(u_i, v_i)$$

puis sur  $V(\Omega)$  la forme  $a_1(u, v) = \tilde{a}(\mathcal{J}u, \mathcal{J}v)$ .

On a alors :

$$N(\lambda, V(\Omega), a_1) = N(\lambda, \mathcal{J}(V(\Omega)), \tilde{a}, \mathcal{H}) \leq N(\lambda, \mathcal{V}, \tilde{a}, \mathcal{H})$$

et

$$N(\lambda, \mathcal{V}, \tilde{a}, \mathcal{H}) = \sum_{i=0}^{\nu} N(\lambda, V(\Omega \cap O_i), a, L^2(\Omega \cap O_i)).$$

Mais (5.1) et (5.2) sont encore valables, et on conclut en appliquant la proposition 2.1 qui prouve que :

$$N_f^+(V(\Omega), a_1) = N_f^+(V(\Omega), a).$$

Inversement on a :

PROPOSITION 5.6. Soit a une forme (1.3) coercitive sur  $V(\Omega)$ . Alors si les  $\Omega_i$  ( $i = 0, \dots, \nu$ ) sont des ouverts disjoints inclus dans  $\Omega$ , on a pour toute fonction f de  $\mathcal{F}$

$$N_f^-(V(\Omega), a) \geq \sum_{i=0}^{\nu} N_f^-(V(\Omega_i), a).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que  $\bigoplus_{i=0}^{\nu} V(\Omega_i) \subset V(\Omega)$ .

Nous allons maintenant transformer le problème par carte locale. Pour cela on notera, pour  $x \in \Gamma$ ,  $\nu_x$  le vecteur normal à  $\Gamma$  en  $x$  tel que :

$$(5.3) \quad \langle d\varphi(x), \nu_x \rangle = 1.$$

Soit  $\chi$  un  $C^\infty$ -difféomorphisme jusqu'au bord d'un ouvert  $U'$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sur un ouvert  $O'$  de  $\Gamma$ . On définit pour  $T_0$  assez petit, un difféomorphisme  $\theta$  de  $U' \times ]-T_0, T_0[$  sur un ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}^n$ , et de  $U = U' \times ]0, T_0[$  sur  $O \cap \Omega$ , par :

$$\theta(y, t) = \chi(y) + t \nu_{\chi(y)}$$

On déduit de (5.3) que :

$$(5.4) \quad \varphi \circ \theta(y, t) = t + O(t^2).$$

On notera  $\tilde{y} = (y, t)$  l'élément générique de  $U$ .

On pose  $\Delta(\tilde{y}) = |\det d\theta(\tilde{y})|^{1/2}$ .

Pour  $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  avec  $\text{supp } u \subset \bar{\Omega} \cap O$  on pose  $v(\tilde{y}) = \Delta(\tilde{y})^{-1} u \circ \theta(\tilde{y}) \in \mathcal{D}(\tilde{U})$  on a :

$$(D^\alpha u) \circ \theta = \Delta^{-1} \cdot [P_\alpha(\tilde{y}, D_{\tilde{y}}) v]$$

où  $P_\alpha$  est un polynôme différentiel de partie principale :

$$P_\alpha(\tilde{y}, \tilde{\eta}) = ({}^t d\theta(\tilde{y})^{-1} \cdot \tilde{\eta})^\alpha$$

Avec ces notations on a :

$$(5.5) \quad \begin{cases} \|u\|_{L^2(\cdot)}^2 = \|v\|_{L^2(U)}^2 \\ a(u, u) = b(v, v) + R(v, v) \end{cases}$$

où l'on a défini la forme  $b$  par :

$$(5.6) \quad b(v, v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta} \circ \theta (\varphi \circ \theta)^{r|\alpha|+r|\beta|} \cdot (P'_\alpha v) \cdot (P'_\beta v) \tilde{d}y$$

et où  $R$  vérifie :

$$(5.7) \quad |R(v, v)| \leq \text{cte} \sum_{0 < p \leq m} \sum_{0 \leq q \leq m} \|v\|_{W_r^{p-1}(U)} \|v\|_{W_r^q(U)}$$

On déduit alors de (5.5) (5.7) et des propositions 2.1 et 3.1 :

LEMME 5.7. Pour que  $a$  soit coercitive sur  $V(\Omega \cap 0)$  il faut et il suffit que  $b$  le soit sur  $V(U)$ ; et alors pour tout ouvert  $U_1 \subset U$  et toute fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$  on a :

$$N_f^\pm(V(U_1), b) = N_f^\pm(V(\theta(U_1)), a).$$

On "fige" les coefficients de  $b$  pour définir pour  $y_0 \in U'$  les formes du type (4.1) suivantes :

$$(5.8) \quad b_{y_0}(v, v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta} \circ \theta(y_0) \cdot \int_U t^{r|\alpha|+r|\beta|} \frac{P'_\alpha(y_0, D_y^\nu) v}{P'_\beta(y_0, D_y^\nu) v} \tilde{d}y$$

On déduit de la continuité des  $a_{\alpha\beta}$  et de (5.4) que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h > 0$ , tel que pour tout  $y_0$  de  $U'$  et tout ouvert  $U_1 = U'_1 \times ]0, T[ \subset U$  pour lequel  $y_0 \in U'_1$  et  $\text{diam}(U_1) < h$ , on ait :

$$\forall u \in V(U_1) \quad |b(u, u) - b_{y_0}(u, u)| < \varepsilon \|u\|_{W(U)}^2$$

Il résulte de cette remarque les deux lemmes :

LEMME 5.9.

i) Si  $a$  est coercitive sur  $V(\Omega)$  il existe des constantes  $h_0 > 0$ ,  $c_0 > 0$  et  $\lambda_0$  telles que pour tout  $U_1 = U'_1 \times ]0, T[ \subset U$  avec  $\text{diam } U_1 < h_0$  et pour tout  $y_0 \in U'_1$  on ait :

$$\forall u \in V(U_1) \quad b_{y_0}(u, u) \geq c_0 \|u\|_{W(U)}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2(U)}^2.$$

ii) Si pour  $y_0 \in U'$ , la forme  $b_{y_0}$  est coercitive sur un espace  $V(U_1)$  avec  $U_1 = U'_1 \times ]0, T[$  et  $y_0 \in U'_1$ , il existe un voisinage  $O_1$  de  $\chi(y_0)$  tel que  $a$  soit coercitive sur  $V(\Omega \cap O_1)$ .

LEMME 5.10. Si  $a$  est coercitive sur  $V(\Omega)$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h > 0$  tel que pour tout  $U_1 = U'_1 \times ]0, T[ \subset U$  avec  $\text{diam } U_1 < h$  et pour tout  $y_0 \in U'_1$ , on ait pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{F}$ :

$$N_f^+(V(\theta(U_1)), a) \leq f^*(1+\varepsilon) N_f^+(V(U_1), b_{y_0})$$

$$N_f^-(V(\theta(U_1)), a) \geq f^*(1-\varepsilon) N_f^-(V(U_1), b_{y_0})$$

$b_{y_0}$  étant une forme du type (4.1) on lui associe par (4.2) les formes  $b_{y_0}$  et  $b_{y_0, \eta}^0$  pour  $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$  et par (4.8) les fonctions  $b_{y_0}^1$ ,  $b_{y_0}^{1,k}$  et  $b_{y_0}^{1,m}$ .

Notant  $x_0 = \chi(y_0)$ ,  $\tilde{x} = (x_0, t) \in \tilde{\Omega}$ , et pour  $\tilde{\eta} = (\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ,  $\xi = ({}^t d\chi(y_0))^{-1} \cdot \eta \in T_{x_0}^* \Gamma$  et  $\tilde{\xi} = (\xi, \tau) \in T_{\tilde{x}}^* \tilde{\Omega}$  on a avec les notations du § V-1 :

$$(5.9) \quad \begin{cases} b_{y_0, \eta}^0 = a_{x_0, \xi}^0 ; & b_{y_0, \eta}^0 = a_{x_0, \xi}^0 \\ b_{y_0}^1(t, \tilde{\eta}) = a^1(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \\ b_{y_0}^{1,k}(\tilde{\eta}) = a^{1,k}(x_0, \tilde{\xi}) \\ b_{y_0}^{1,m}(\tilde{\eta}) = a^{1,m}(x_0, \tilde{\xi}) \end{cases}$$

Compte tenu des lemmes 5.4 et 5.9 les théorèmes 5.1 et 5.2 résultent alors des propositions 4.2, 4.3 et 4.6.

#### V.4. Démonstration du théorème 5.3.

Oubliant un instant notre problème sur  $\Omega$ , on énonce :

PROPOSITION.5.11. Soit  $J' = ]0, h[ ]^{n-1}$  pavé de  $\mathbb{R}^{n-1}$  qu'on identifie à un ouvert du tore  $X' = \mathbb{R}^{n-1} / h \cdot \mathbb{Z}^{n-1}$  ; Soient  $J = J' \times ]0, T[$  et  $X = X' \times ]0, T[$  ; soit enfin  $b$  une forme (4.1) vérifiant (4.7). Alors pour  $f \in \mathcal{F}$  on a :

$$N_f^\pm(V(J), b) = N_f^\pm(V(X), b)$$

où  $N_f^\pm(V(X), b)$  est donné par les théorèmes 4.9 et 4.14.

Démonstration. Notons  $f_0$  la fonction  $\lambda^\omega$  où  $\lambda^\omega \text{ Log } \lambda$  telle que

$$\bullet \quad N(\lambda, V(X), b) \sim \text{Cte. } f_0(\lambda).$$

On déduit de l'inclusion  $V(J) \subset V(X)$  que

$$N_{f_0}^\pm(V(J), b) \leq N_{f_0}^\pm(V(X), b)$$

et de manière générale que, si  $J'_1$  est un pavé de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de côté  $h_1$ , on a :

$$(5.10) \quad N_{f_0}^\pm(V(J'_1 \times ]0, T[)) \leq \text{Cte. } h_1^{n-1}.$$

Remarquons alors que la proposition 5.5 reste vraie si on y remplace  $\Omega$  par  $X$  et  $a$  par  $b$  ; la démonstration étant dans ce cas parfaitement identique.

On recouvre alors  $X'/J'$  par des pavés dont la somme des mesures est arbitrairement petite, et on conclut par (5.10) que  $N_{f_0}^\pm(V(X), b) - N_{f_0}^\pm(V(J), b)$  est arbitrairement petit, donc nul.

Revenons à notre problème sur  $\Omega$ , pour démontrer le théorème 5.3 d'abord dans le cas où  $r_m/m \geq 1/n$

Notons  $f_0$  la fonction  $\lambda^\omega$  ou  $\lambda^\omega \text{Log} \lambda$  à laquelle on veut comparer  $N(\lambda, V(\Omega), a)$ , et mettons la formule à démontrer sous la forme :

$$N_{f_0}^+(V(\Omega), a) = N_{f_0}^-(V(\Omega), a) = \int_{T^* \Gamma} c(x, \xi) \cdot dx \, d\xi$$

Remarquons tout d'abord que pour  $0_0 \in \overline{0_0} \subset \Omega$  on a (cf [2], [7])

$$N(\lambda, H_0^m(0_0), a) = O(\lambda^{n/2^m})$$

et

$$(5.11) \quad N_{f_0}^\pm(V(0_0), a) = 0.$$

On considère des difféomorphismes  $\chi_i$  pour  $i = 1, \dots, \nu$ , d'ouverts  $U'_i$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sur des ouverts  $0'_i$  de  $\Gamma$ , recouvrant  $\Gamma$ . On définit comme plus haut les  $\theta_i$  difféomorphismes de  $U'_i \times ]-T_0, T_0[$  sur  $0'_i$  et de  $U_i = U'_i \times ]0, T_0[$  sur  $\Omega \cap 0'_i$ .

On considérera aussi des ouverts  $U''_i \subset \overline{U''_i} \subset U'_i$  tels que les  $\chi_i(U''_i)$  recouvrent  $\Gamma$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $h_i$  ( $i = 1, \dots, \nu$ ) les réels dont l'existence est assurée par le lemme 5.10. Soit enfin  $T < 1/2 \inf_i h_i$ .

Si  $J'$  est un pavé de côté  $< h_i/2$  inclus dans  $U'_i$ , on note

$J = J' \times ]0, T[$ ,  $\Sigma = \theta(J)$  et  $\Delta = \chi(J')$ . On déduit du lemme 5.10 que pour tout  $y_0$  de  $J'$  on a :

$$(5.12) \quad \begin{cases} N_{f_0}^+(V(\Sigma), a) \leq f_0^*(1+\varepsilon) N_{f_0}^+(V(J), b_{y_0}) \\ N_{f_0}^-(V(\Sigma), a) \geq f_0^*(1-\varepsilon) N_{f_0}^-(V(J), b_{y_0}). \end{cases}$$

où  $b$  est la forme déduite de  $a$  par  $\theta_i$  comme en (5.6) et  $b_{y_0}$  comme en 5.8.  $b_{y_0}$  est une forme du type (4.1) et la coercitivité de  $a$  implique  $b_{y_0}$  vérifie (4.7) (Théorème 5.1).

Il résulte de la proposition 5.11 que :

$$(5.13) \quad N_{f_0}^\pm(V(J), b_{y_0}) = \int_{T^* J} d(y_0, \eta) dy \, d\eta$$

La fonction  $d(y, \eta)$  étant donnée par les théorèmes 4.9 ou 4.14. Or il résulte directement de (5.9) que :

$$(5.14) \quad d(y, \eta) = c(\chi(y), {}^t d\chi(y)^{-1} \cdot \eta)$$

Reportant l'estimation (5.13) dans (5.12), intégrant par rapport à  $y_0$ , et effectuant le changement de variable  $(y, \eta) \rightarrow (\chi(y), {}^t d\chi(y)^{-1} \cdot \eta)$  on obtient compte tenu de (5.14) :

$$(5.15) \quad \begin{cases} N_{f_0}^+(V(\Sigma), a) \leq f_0^*(1+\varepsilon) \int_{T^* \Delta} c(x, \xi) dx \, d\xi \\ N_{f_0}^-(V(\Sigma), a) \geq f_0^*(1-\varepsilon) \int_{T^* \Delta} c(x, \xi) dx \, d\xi \end{cases}$$

On recouvre alors les  $U_i^+$  par des pavés  $J'_{i,p}$  de côté  $h_{i/2}$ . Exhayant de  $\{\chi_i(J'_{i,p})\}_{i,p}$  un sous recouvrement noté  $\{\Gamma_j\}_{j \in J}$ , de  $\Gamma$ , on déduit, par la proposition 5.5, de (5.11) et de (5.15) :

$$N_{f_0}^+(V, (\Omega), a) \leq f_0^*(1+\varepsilon) \cdot \sum_j \int_{\Gamma_j^*} c(x, \xi) dx d\xi$$

et finalement :

$$(5.16) \quad N_{f_0}^+(V(\Omega), a) \leq f_0^*(1+\varepsilon) \int_{\Gamma^*} c(x, \xi) dx d\xi.$$

De même, en utilisant des partitions à la place des recouvrements, on obtient :

$$(5.17) \quad N_{f_0}^-(V(\Omega), a) \geq f_0^*(1-\varepsilon) \int_{\Gamma^*} c(x, \xi) dx d\xi.$$

et le théorème découle immédiatement de (5.16) et (5.17)

Il nous reste à étudier le cas  $n r_m < m$ .

On sait que pour  $\Omega_0$  assez régulier, relativement compact dans  $\Omega$  on a ([2], [7])

$$N(\lambda, V(\Omega_0), a) \sim \lambda^{n/2m} \left\{ (2\pi)^{-n} \int_{\Omega_0} dx \cdot \int_{a^m(x, \xi) < 1} d\xi \right\}$$

Il résulte maintenant du § V.3 et du théorème 4.14 que si  $\omega_\varepsilon$  désigne l'ouvert

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega / \varphi(x) < \varepsilon\}$$

on a :

$$N(\lambda, V(\omega_\varepsilon), a) = O(\varepsilon^{1-n r_m/m} \cdot \lambda^{n/2m})$$

et on conclut en appliquant la proposition 5.5.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGMON. - Elliptic boundary value problems ; Van Nostrand.
- [2] BEALS. - Asymptotic behaviour of the Green's function and spectral function of an elliptic operator ; J of Func. Anal. 5 (1970) p.483.
- [3] BOLLEY-CAMUS. - Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids ; Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes (1968-69).
- [4] BOUTET DE MONVEL-GRISVARD. - Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur ; C.R.Ac.Sc t 272 (1971) p.23.
- [5] COURANT-HILBERT. - Methods of Mathematical Physics ; New York Interscience.
- [6] EL KOLLI. - n-ième épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids ; C.R.Ac.Sc. 272 (1971) p.537.
- [7] FLECKINGER-MÉTIVIER. - Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers ; C.R.Ac.Sc. t 276 (1973) p.913.
- [8] GEYMONAT-GRISVARD - Problemi ai limiti lineari ellitici negli spazi di Sobolev con peso ; Le Matematiche vol XXII, Fasc.2 (1967).
- [9] GUILLEMOT-TESSIER. - Propriétés spectrales de certains opérateurs elliptiques dégénérés ; C.R.Ac.Sc. t 278 (1974) p.137.
- [10] KATO. - Perturbation Theory for linear operators ; Springer Verlaq (1966).

- [11] KOLMOGOROV. - Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. Ann of Math 37 (1936) p.107
- [12] LORENTZ. - Approximation of functions; Holt and Rinehart and Winston.
- [13] NECÁŠ. - Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique voisine de la variationnelle ; Ann Scuola Norm. Sup Pisa. 16 (1962) p 305.
- [14] NORDIN. - The asymptotic distribution of the eigenvalues of a degenerate elliptic operator ; Arkiv für Mat 10 (1972) p.9.
- [15] PHAM THE LAÏ. - Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés non nécessairement autoadjoints ;
- [16] PHAM THE LAÏ. - Noyaux d'Agmon, Séminaire Jean Leray; Collège de France (1973).
- [17] SOLOM JACK-VULIS. - Spectral asymptotics of degenerate elliptic operators ; Soviet Math Dokl vol. 13 (1972) p.1484.

Guy MÉTIVIER  
Département de Mathématiques  
Université de Nice  
Parc Valrose  
06034 NICE CEDEX