Journées Équations aux dérivées partielles

Louis Boutet de Monvel
Johannes Sjöstrand

Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 123-164
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____123_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.123-164

SUR LA SINGULARITÉ DES NOYAUX DE BERGMAN ET DE SZEGÖ

par L.Boutet de Monvel et J.Sjöstrand

Introduction.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, de frontière C^∞ $X = \partial\Omega$ strictement pseudo-convexe . Les fonctions holomorphes dans Ω sont les fonctions qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann , ie. telles que $d''f = 0$. Si f est continue dans $\bar{\Omega}$, holomorphe dans Ω , la trace $f|X$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann induites : $\bar{\partial}_b f|X = 0$; inversemsnt on sait (cf. [14]) que toute fonction g sur X telle que $\bar{\partial}_b g = 0$ est la trace d'une fonction holomorphe dans Ω .

Le projecteur de Bergman B est le projecteur orthogonal sur l'espace des fonctions holomorphes de carré sommable,dans $L^2(\Omega)$. Le projecteur de Szegö est le projecteur orthogonal S

sur le sous-espace des traces de fonctions holomorphes , de carré sommable dans X (ie. Ker $\bar{\partial}_b \cap L^2(X)$), dans $L^2(X)$.

Dans cet article , nous allons donner une description très précise des singularités des noyaux de B et de S (qui sont au moins des distributions sur $\bar{\Omega}^2$ (resp. X^2) , C^∞ en dehors de la diagonale de X dans $\bar{\Omega}^2$ d'après [10]) . Celle ci est décrite au §1 . Nous retrouvons en particulier le résultat de C. Fefferman [6] (qui décrit complètement la singularité au bord de Ω de la restriction du noyau B(x,y) de B à la diagonale x = y) .

L'idée de la démonstration est la suivante : nous commençons par fabriquer un projecteur orthogonal approximatif sur Ker $\bar{\partial}_b$ (ie. un projecteur mod. les opérateurs à noyau C^∞) , ou sur le sous espace des fonctions annulées par un système d'opérateurs pseudo-différentiels simulant $\bar{\partial}_b$ (§2) . Il se trouve que dans tous les cas , il existe un tel projecteur approximatif , qui est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe , au sens de [15] . Pour $\bar{\partial}_b$, on peut choisir une phase particulièrement simple (§1.a et §2.c)

On passe de là au noyau de Bergman en exploitant le fait qu'une fonction holomorphe est harmonique , donc s'exprime en fonction de sa trace sur le bord au moyen du noyau de Poisson (§3.b).

Il reste encore à prouver que le projecteur approximatif diffère du vrai projecteur par un opérateur à noyau C^∞ . Ceci est fait au §3.c et §3.d pour le noyau de Bergman , et au §3.e pour le noyau de Szegö . A ce point nous devons utiliser des résultats plus précis de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes - ici , les inégalités de J.J.Kohn [11] , [12] , [13] . (Le résultat analogue pour un système d'opérateurs pseudo-différentiels simulant $\bar{\partial}_b$ est en général faux - du moins si la dimension est n = 2 , ie. la dimension réelle du bord X est 3 , et $\bar{\partial}_b$ se réduit à une équation , comme le montre un contre-exemple de L. Nirenberg [16]).

Enfin au §4 nous montrons comment le développement asymptotique de la méthode de la phase stationnaire de [15] permet de retrouver simplement le terme dominant dans la singularité de B ou de S ; il permet théoriquement de trouver un développement asymptotique complet pour cette singularité .

Notre travail a évidemment été inspiré par celui de C. Fefferman [6] : le développement asymptotique de C. Fefferman ressemble de façon frappante à ceux qu'on obtient dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels , et nous éspérons que ce travail contribuera à clarifier cette ressemblance . Comme on verra , l'article s'appuie de façon essentielle sur la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe de A.Melin et J.Sjöstrand [15] . Il utilise aussi des résultats de [3] ou [17] (ou de [5] dans le cas $n = 2$) sur les opérateurs à caractéristiques doubles et ceux qui s'y ramènent (ici $\bar{\partial}_b$ et $\Box_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b$).

Ce travail a été commencé lors d'un séjour des auteurs à l'Institut Mittag-Leffler , et nous tenons à remercier les organisateurs pour l'accueil chaleureux et l'ambiance inspiratrice que nous y avons trouvés . Nous remercions tout particulièrement L.Hörmander dont le manuscrit [8] nous a beaucoup aidé au début de cette recherche ; nous lui devons en particulier l'idée de la phase ψ du §1 . Nous remercions aussi N. Øvrelid pour les discussions qu'il a eues avec l'un de nous .

§1. Description du résultat : singularité des noyaux de Bergman et de Szegö .

a. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, de frontière C^∞ $X = \partial\Omega$ strictement pseudo-convexe . Ω est donc défini par une inéquation $\rho < 0$, où ρ est une fonction réelle C^∞ sur $\mathbb{C}^n$, strictement pseudo-convexe (ie. la matrice de Levi $\partial^2\rho/\partial z_j\partial\bar{z}_k$ est hermitienne positive , non dégénérée) et $d\rho \neq 0$ si $\rho = 0$. Le bord X est la variété d'équation $\rho = 0$.

(1.1)<u>Proposition</u>.- <u>Il existe une fonction</u> $\psi(x,y) \in C^\infty(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ <u>telle que</u>

(i) $\psi(x,x) = \frac{1}{i}\rho(x)$, <u>et</u> $d''_x\psi$, $d'_y\psi$ <u>sont nulles d'ordre infini pour</u> $x = y$.

(ii) $\psi(x,y) = -\overline{\psi(y,x)}$

(deux telles fonctions diffèrent par une fonction nulle d'ordre infini pour $x = y$)

Ce résultat est bien connu ; la condition (i) détermine complètement le développement de Taylor de ψ le long de la diagonale $x = y$:

$$\psi(x+h,x) \sim \frac{1}{i}\sum \frac{\partial^\alpha\rho}{\partial z^\alpha}(x) \quad h^\alpha/\alpha!$$

qui implique , comme on voit aussitôt

$$\psi(x+h,x+k) \sim \frac{1}{i}\sum \frac{\partial^{\alpha+\beta}\rho}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}(x) \; \frac{h^\alpha}{\alpha!} \; \frac{\bar{k}^\beta}{\beta!}$$

et on sait qu'on peut choisir $\psi \in C^\infty(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ admettant le développement de Taylor ci-dessus le long de la diagonale $x=y$.

D'autre part si ψ satisfait à (i) , il en est de même de la fonction $-\overline{\psi(y,x)}$, donc aussi de $\frac{1}{2}(\psi(x,y) - \overline{\psi(y,x)})$, qui satisfait à (ii) , parceque ρ est réelle .

Dans la suite ψ désigne une fonction C^∞ qui satisfait aux conditions (i) et (ii) de la proposition(1.1)

(1.2)<u>Proposition</u>.- <u>On a</u>

$$\frac{1}{i}\left[\psi(x,y)+\psi(y,x)-\psi(x,x)-\psi(y,y)\right] = L_\rho(x-y) + O(|x-y|^3)$$

<u>où</u> $L_\rho(z) = \sum \frac{\partial^2\rho}{\partial\bar{z}_j\partial z_k} z_j \bar{z}_k$ <u>est la forme hermitienne associée à la matrice de Levi de</u> ρ .

On le voit aussitôt en faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 à partir du point (x,x) : si $\Phi(x,y)$ désigne le membre de gauche de la proposition (1.2) , on a , pour $y = x$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha \left(\frac{1}{i}\psi(y,x) + \rho(y)\right) = 0 \quad (\text{pour } x = y)$$

(puisque $d'_y(x,y)$ est nul d'ordre infini pour $x = y$) , et de même $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\right)^\alpha \Phi = 0$ pour $x = y$. Enfin

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial \bar{y}_k}\Phi = \frac{\partial^2\rho}{\partial y_j \partial \bar{y}_k}(x) \quad \text{pour } x = y$$ (les dérivées mixtes des autres termes sont toutes nulles pour $x = y$).

(1.3)<u>Corollaire</u>.- <u>Il existe un nombre</u> $C > 0$ <u>tel qu'on ait</u>

$$\operatorname{Im}\psi(x,y) \geqslant C\,(d(x,X) + d(y,X) + |x-y|^2) + O(|x-y|^3)$$

<u>pour</u> $x, y \in \bar{\Omega}$.

($d(x,X)$ désigne la distance de x à X , ou à $\complement\Omega$)

En effet on a $\operatorname{Im}\psi(x,y) = \frac{1}{2i}(\psi(x,y) - \overline{\psi(y,x)})$, et comme $\rho < 0$ dans Ω , et $d\rho \neq 0$ sur X , il existe un nombre $C' > 0$ tel que $\frac{1}{i}\psi(x,x) = -\rho(x) \geqslant C'\, d(x,X)$ pour $x \in \bar{\Omega}$ (donc aussi $\frac{1}{i}\psi(y,y) \geqslant C'\, d(y,X)$ pour $y \in \bar{\Omega}$).

Quitte à ajouter à ψ une fonction nulle au voisinage de la diagonale , de partie imaginaire $\geqslant 0$ et assez grande hors d'un petit voisinage de la diagonale , on peut alors supposer que ψ satisfait à l'inégalité

(1.4) $\quad \operatorname{Im}\psi(x,y) \geqslant C\,(d(x,X) + d(y,X) + |x-y|^2)$ pour $x,y \in \bar{\Omega}$

C étant une constante > 0 convenable .

Dans toute la suite , ψ désigne une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, satisfaisant aux conditions (i) et (ii) de la proposition(1.1) , et à (1.4) . Notre but est de prouver le résultat suivant :

(1.5)<u>Théorème</u>.- <u>Il existe un symbole</u> $s \in S^{n-1}(X \times X \times \mathbb{R}_+)$, <u>admettant un développement asymptotique</u>

$$s(x,y,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{n-1-k} s_k(x,y)$$

<u>tel que le noyau de Szegö</u> $S(x,y)$ <u>diffère par une fonction</u> C^∞ <u>de la distribution définie par l'intégrale oscillante</u>

$$\int_0^\infty e^{it\psi(x,y)} s(x,y,t)\, dt$$

<u>Il existe un symbole</u> $b \in S^n(\bar\Omega \times \bar\Omega \times \mathbb{R}_+)$, <u>de développement asymptotique</u>

$$b(x,y,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{n-k} b_k(x,y)$$

<u>tel que le noyau de Bergman</u> $B(x,y)$ <u>diffère par une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> $\bar\Omega \times \bar\Omega$ <u>de l'intégrale</u>

$$\int_0^\infty e^{it\psi(x,y)} b(x,y,t)\, dt$$

Des formules classiques (valables si $p \neq 0$, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$)

$$(1.6) \qquad \operatorname{pf} \int_0^\infty e^{-tp} t^m\, dt = \begin{cases} m!\, p^{-m-1} & \text{si } m \text{ est entier} \geqslant 0 \\ \dfrac{(-1)^m}{(-m-1)!}\, p^{-m-1} \left(\operatorname{Log} p + \gamma - \sum_0^{-m-1} 1/j\right) & \\ \qquad \text{si } m \text{ est entier} < 0 & \end{cases}$$

(où γ désigne la constante d'Euler : $\gamma = \lim_{m\to\infty} \sum_1^m \frac{1}{j} - \operatorname{Log} m$) on déduit alors aussitôt

(1.7) Corollaire.- Il existe des fonctions C^∞ F, G sur $X \times X$ (resp. F', G' sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$) telles que

$$S = F\ (-i\psi)^{-n} + G \operatorname{Log}(-i\psi)$$

$$B = F'\ (-i\psi)^{-n-1} + G' \operatorname{Log}(-i\psi)$$

(sur X^2, on a noté, un peu abusivement, par $(-i\psi)^{-n}$, la distribution limite pour $\varepsilon \to +0$ des fonctions $(-i\psi+\varepsilon)^{-n}$)

Les formules (1.6) fournissent en fait des fonctions F, G, F', G' telles que

$$(1.8)\quad F = \sum_0^{n-1} (n-1-k)!\ s_k\ (-i\psi)^k \quad \text{mod. } \psi^n$$

$$F' = \sum_0^{n} (n-k)!\ b_k\ (-i\psi)^k \quad \text{mod. } \psi^{n+1}$$

$$G \sim \sum_0^{\infty} (-1)^{k+1}/k!\ s_{n+k}\ (-i\psi)^k$$

$$G' \sim \sum_0^{\infty} (-1)^{k+1}/k!\ b_{n+k+1}\ (-i\psi)^k$$

où dans les deux derniéres relations, le signe $\sim$ signifie que les deux membres ont même série de Taylor le long de la diagonale de X dans X^2 ou $\bar{\Omega}^2$.

On retrouve le résultat de C. Fefferman [6] en faisant $x = y$. Nous verrons au n°4 comment la méthode de la phase stationnaire de [15] permet de retrouver le terme dominant, c'est à dire la restriction de $F(x,y)$ ou de $F'(x,y)$ à la diagonale de X.

b. Faisons pour terminer quelques remarques sur les développements asymptotiques qui interviennent dans les énoncés (1.6) (1.7) et (1.8).

Remarquons d'abord qu'il résulte de (1.4) que, dans $\bar{\Omega}$ toute dérivée de ψ^{-1} est majorée (à une constante près) par une puissance de $1/d$, si d désigne la distance du point (x,y) à la diagonale de X. Par suite

(1.9) Pour qu'une fonction f, C^∞ sur X^2 ou sur $\bar{\Omega}^2$ soit divisible par ψ, il faut et il suffit que la série de Taylor de f soit divisible par celle de ψ en tout point de $\mathrm{diag}(X)$. En particulier si f est nulle d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(X)$, $f\,\psi^{-m}$ et $f\,\mathrm{Log}(-i\psi)$ sont C^∞.

(1.10) Remarque.- Soit $a(x,y,t) \sim \sum a_k(x,y)\, t^{m-k}$ un symbole (sur $X^2 \times \mathbb{R}_+$, ou sur $\bar{\Omega}^2 \times \mathbb{R}_+$), et soit T la distribution $\int_0^\infty e^{it\psi}\, a\, dt$ (sur X^2 ou $\bar{\Omega}^2$). Alors la classe de T mod. les fonctions C^∞ ne dépend que des séries de Taylor de ψ et des a_k le long de $\mathrm{diag}(X)$.

On a en effet comme ci-dessus

$$T = \sum_0^m k!\; a_k\; (-i\psi)^{-k-1} + G\,\mathrm{Log}(-i\psi) \quad \mathrm{mod.}\ C^\infty$$

où la série de Taylor de G le long de $\mathrm{diag}(X)$ est donnée par

$$G \sim \sum_{k<0} (-1)^k/(1-k)!\, a_k (-i\psi)^{1-k}$$

Il est clair que la série de Taylor de G le long de $\mathrm{diag}(X)$ ne dépend que de celles de ψ et des a_k. D'autre part si $\psi - \psi'$ est nulle d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(X)$, $1 - \psi'/\psi = (\psi - \psi')/\psi$ est C^∞, nulle d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(X)$, donc aussi $\mathrm{Log}(\psi'/\psi)$, et $\psi'^{-k} - \psi^{-k}$, pour tout k.

(Il est d'ailleurs aisé de vérifier que si $a \sim \sum_{k\leq m} t^k a_k$ et $b \sim \sum_{k\leq m} t^k b_k$ sont deux symboles, et si $\psi'-\psi$ et tous les $a_k - b_k$ sont nuls d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(X)$,

$$e^{it\psi} a - e^{it\psi'} b$$

est un symbole de degré $-\infty$ sur $X^2 \times \mathbb{R}_+$ ou $\bar{\Omega}^2 \times \mathbb{R}_+$)

(1.11)<u>Proposition</u>.- <u>Si</u> $T = F\,\psi^{-m-1} + G\,\mathrm{Log}(-i\psi)$ <u>est une fonction</u> C^∞ (<u>sur</u> X^2 <u>ou</u> $\bar{\Omega}^2$), <u>alors</u> F <u>est divisible par</u> ψ^{m+1}, <u>et</u> G <u>est nulle d'ordre infini sur</u> $\mathrm{diag}(X)$.

preuve: commençons par la remarque élémentaire suivante : si $f(u)$ et $h(u)$ sont deux fonctions C^∞ sur la demi-droite $u \geqslant 0$, avec $\mathrm{Re}\, h \geqslant 0$ et $h'(0) \neq 0$, et si $f\,\mathrm{Log}\, h$ est C^∞ pour $u \geqslant 0$, alors f est nulle d'ordre infini pour $u = 0$. En effet on a $h(u) = u\, h_1(u)$, avec $\mathrm{Re}\, h_1 \geqslant 0$ et $h_1(0) \neq 0$, donc $\mathrm{Log}\, h - \mathrm{Log}\, u$ est C^∞ ; d'autre part si f n'est pas nulle d'ordre infini pour $u = 0$, il existe un entier k et une fonction C^∞ f_1 tels que $f_1(0) \neq 0$, $f = u^k f_1$; donc $f\,\mathrm{Log}\, h - f_1 u^k \mathrm{Log}\, u$ est C^∞, et $f\,\mathrm{Log}\, h$ n'est pas plus C^∞ que $u^k \mathrm{Log}\, u$.

Si alors T est C^∞ (sur X^2 ou $\bar{\Omega}^2$), la fonction $G\,\mathrm{Log}(-i\psi)\,\psi^{m+1}$ est C^∞ sur toute demi-courbe (paramétrée par $u \geqslant 0$) de X^2 (ou $\bar{\Omega}^2$) issue d'un point $(x,x) \in \mathrm{diag}(X)$ et dont le vecteur tangent à l'origine n'est pas annulé par $d\psi$, et la restriction de $\psi^{m+1} G$ (donc aussi celle de G) à une telle courbe est nulle d'ordre infini à l'origine. Mais comme $d\psi \neq 0$ le long de $\mathrm{diag}(X)$, ceci implique évidemment que G est nulle d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(X)$.

Ceci peut se formuler de la façon équivalente suivante : si $T = \int_0^\infty e^{it\psi}\, a\, dt$ (où $a \sim \sum_{k\leq m} t^k a_k(x,y)$) est une fonction C^∞, il existe un symbole $b \sim \sum t^k b_k$ tel que $e^{it\psi} a \sim \frac{d}{dt}(e^{it\psi} b)$ (ie. $a \sim (i\psi + \frac{d}{dt})b$). <u>En particulier le terme dominant</u> a_m <u>est divisible par</u> ψ. Ceci équivaut au résultat sur le symbole de [15] §6, dans le cas particulier où la phase est précisément la fonction ψ.

§2 Construction d'un projecteur approximatif .

Dans la suite de l'article , nous notons C^∞ l'espace des fonctions de classe C^∞ , et $C^{-\infty}$ l'espace des distributions (si X est une variété C^∞ , E un fibré vectoriel C^∞ sur X , $C^\infty(X,E)$ désigne l'espace des sections C^∞ de E , et $C^{-\infty}(X,E)$ l'espace des sections distribution) .

Si f est une distribution sur une variété X , on dit que f est de classe C^∞ au voisinage d'un vecteur cotangent non nul $\xi \in T^*X\setminus 0$ s'il existe un opérateur pseudo-différentiel A elliptique en ξ tel que $Af \in C^\infty$. Le spectre singulier de f est le cône Sp Sing f des $\xi \in T^*X\setminus 0$ tels que f ne soit pas de classe C^∞ au voisinage de ξ .

Nous dirons qu'un opérateur A sur les distributions est régulier s'il est propre (ie. pour tout compact K il existe un compact L tel que supp $f \subset K$ implique supp $Af \subset L$, et supp $f \subset \complement L$ implique supp $Af \subset \complement K$) , et s'il diminue le spectre singulier (de façon équivalente , A est propre et le spectre singulier de son noyau-distribution est contenu dans l'anti-diagonale , ensemble des $(x,x,\xi,-\xi)$ de T^*X^2)

Si A et B sont deux opérateurs sur les distributions , nous écrirons $A \sim B$ si $A-B$ est un opérateur de degré $-\infty$ (de noyau-distribution C^∞) . Si A et B sont deux opérateurs réguliers , et U un cône ouvert de $T^*X\setminus 0$, nous dirons que A et B sont équivalents dans U ($A-B \sim 0$ dans U) si $(A-B)f$ est de classe C^∞ au voisinage de tout point de U , pour toute distribution f (de façon équivalente , le spectre singulier du noyau-distribution de U est disjoint de $U\times U$) .

a. Le modèle local .

On se place sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, où on note la variable (x,y) $(x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q)$, et on note (ξ,η) la variable duale.

Soit $D_o^{\pm}$ le système d'opérateurs pseudo-différentiels

$$(2.1) \quad D_o^{\pm} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \pm x_j |D_y|\right) \quad , \quad j = 1,\ldots,p$$

où comme d'habitude $|D_y|$ est défini par $\widehat{|D_y| f} = |\eta| \hat{f}$ (en fait D_o n'est pas vraiment un opérateur pseudo-différentiel , car la fonction $|\eta|$ n'est pas C^∞ au voisinage de $\eta = 0$; mais nous ne nous interessons qu'au comportement de $D_o^{\pm}$ au voisinage du cône caractéristique $x = \xi = 0$. Si on veut un vrai système d'opérateurs pseudo-différentiels , on peut remplacer $|\eta|$ par $\chi(|\xi|/|\eta|)\,|\eta|$, où χ est une fonction réelle C^∞ , avec $\chi(t) = 1$ si $t \leqslant 1$, $\chi(t) = 0$ si $t \geqslant 2$: le système obtenu en modifiant ainsi $D_o^{\pm}$ est encore elliptique pour $\xi \neq 0$, et son symbole total coîncide avec celui de $D_o^{\pm}$ pour $|\xi| < |\eta|$).

Soit R l'opérateur linéaire continu : $C_o^\infty(R^q) \to C^\infty(R^n)$ défini par

$$(2.1) \quad Rf(x,y) = (2\pi)^{-q} \int e^{iy.\eta - \frac{1}{2}|x|^2|\eta|} \, (|\eta|/\pi)^{p/4} \, \hat{f}(\eta) \, d\eta$$

On constate aussitôt qu'on a $D_o^+ R = 0$, $R^* R = \mathrm{Id}$
On sait en outre (cf. [3] , [17]) qu'il existe un opérateur régulier $L_o^{\pm}$ tel que

$$(2.3) \quad \mathrm{Id} \sim R R^* + L_o^+ D_o^+$$

$$\mathrm{Id} \sim L_o^- D_o^-$$

En fait , avec les notations de [3] , on peut choisir $L_o \in OPS^{-1,-1}(R^n,\Sigma)$ où Σ est le cône symplectique $x = \xi = 0$.
En particulier L_o est un opérateur pseudo-différentiel de type $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$, de degré $-\frac{1}{2}$, donc est continu $H^s_{loc} \to H^{s+\frac{1}{2}}_{loc}$ pour tout s.

L'opérateur $R\,R^*$ est défini par l'intégrale oscillante

$$(2.4)\quad RR^* f(x,y) = (2\pi)^{-q} \iint \exp\left[i\langle y-y',\eta\rangle - \tfrac{1}{2}(|x|^2+|x'|^2)|\eta|\right] \left(\frac{|\eta|}{\pi}\right)^{\frac{p}{2}} f(x,y)\, dx'dy'd\eta$$

Donc $R\,R^*$ est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe, au sens de [15] ; son symbole total est une fonction homogène (ici de degré $p/2$)

Nous renvoyons à [15] pour l'étude systématique de ces opérateurs, et nous bornons ici à faire les rappels suivants : dans [15] on considère des distributions définies par une intégrale oscillante :

$$(2.5)\quad \langle T,f\rangle = \iint e^{i\varphi(x,\theta)}\ a(x,\theta)\ f(x)\ dx\ d\theta$$

où $a \in S^m_c$ est un symbole 'classique', c'est à dire admet un développement asymptotique

$$a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m-k}(x,\theta)$$

où a_{m-k} est homogène de degré $m-k$ en θ, et C^∞ pour $\theta \neq 0$ (ici le degré m sera toujours entier ou demi-entier ; mais les degrés des termes du développement asymptotique dif- tous par des entiers). La phase φ satisfait aux conditions suivantes :

(2.6) (i) φ est C^∞, homogène de degré 1 en θ (ie. $\varphi(x,\lambda\theta) = \lambda\,\varphi(x,\theta)$ pour $\lambda > 0$) pour $\theta \neq 0$, et $\operatorname{Im}\varphi \geqslant 0$.

(ii) φ n'a pas de point critique (ie. $d_x\varphi \neq 0$ si $d_\theta\varphi = 0$) et les différentielles $d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)$ sont linéairement indépendantes là où les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$ sont toutes nulles.

Plus généralement on considère des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe, définis par une intégrale oscillante :

$$(2.7)\quad Af(x) = \iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}\ a(x,y,\theta)\ f(y)\ dy\ d\theta$$

où a est à nouveau un symbole 'classique' , et φ satisfait aux conditions (2.6)(i),(ii) , avec en outre

(2.6)(iii) $d_x\varphi \neq 0$ et $d_y\varphi \neq 0$ si $d_\theta\varphi = 0$

Pour étudier ces opérateurs il est commode d'utiliser le langage et la technique des fonctions et des variétés presque analytiques ([15] , §1) : si f est une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \setminus 0$, nous écrirons $f \sim 0$ si f est nulle d'ordre infini sur le sous-espace réel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0$; f est presque analytique si $d''f \sim 0$. Toute fonction C^∞ à valeurs complexes $f(x,\theta)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0$ possède un prolongement presque analytique $\tilde{f}$, qu'on peut choisir homogène de degré m en θ (resp. dans $S^m(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \setminus 0))$ si f est homogène de degré m en θ (resp. $F \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0))$; et deux tels prolongements sont équivalents .

Une sous-variété $\Lambda \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N \setminus 0$ lisse , de codimension réelle $2p$, est presque analytique si elle est localement définie par p équations $\varphi_j = 0$, $j=1,..p$, où les φ_j sont presque analytiques , et les différentielles $d\varphi_j$ sont linéairement indépendantes au voisinage des points réels de Λ ; l'idéal de Λ est alors l'idéal de $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0)$ engendré par les restrictions des φ_j aux réels . Deux variétés presque analytiques Λ, Λ' sont équivalentes si elles peuvent être définies localement par des équations équivalentes , ou , ce qui revient au même d'après [15], §1 , si elles ont même idéal . Si Λ est une variété presque analytique , une fonction f sur Λ est presque analytique si c'est la restriction d'une fonction presque analytique ; on écrit $f \sim f'$ si $f-f'$ est la restriction à Λ d'une fonction ~ 0 , ou , ce qui revient au même d'après [15] §1 , si $|f-f'| = O(|\mathrm{Im}\, z|^N)$ pour tout N , pour $z \in \Lambda$. Les classes de fonctions presque analytiques équivalentes correspondent aux classes mod. l'idéal de Λ de $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \setminus 0)$.

Dans la situation (2.5) ci-dessus , on introduit des prolongements presqu'analytiques $\tilde{\varphi}$, $\tilde{a}$ de φ et a .

On note $\tilde{N}$ la variété presque complexe d'équations $\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta_j} = 0$ $(d'_\theta\varphi = 0)$, et $\tilde{\Lambda}$ l'image de $\tilde{N}$ par l'application $(x,\theta)\mapsto (x,d'_x\varphi)$. Λ est une variété presque analytique (d'après [15] §3) , Lagrangienne , ie. $\sum d\xi_j\wedge dx_j \sim 0$ sur $\tilde{\Lambda}$, ou , ce qui revient au même , Λ est de dimension n et son idéal est stable par crochet de Poisson .

De même dans la situation (2.7) ci-dessus , on introduit la variété presque analytique $\tilde{C}$ image de $\tilde{N}$ par l'application $(x,y,\theta)\mapsto(x,y,d'_x\varphi,-d'_y\varphi)$. C'est une relation canonique (ie. $\tilde{C}$ est Lagrangienne pour la forme $\sum d\xi_j\wedge dx_j - \sum d\eta_k\wedge dy_k$).

On montre (dans [15] §4) que l'ensemble des opérateurs de la forme (2.7) , avec $a\in S_c^{m'}$, $m' = m + 1/4(\dim X + \dim Y) - \frac{1}{2}N$ ne dépend que de la relation canonique $\tilde{C}$ (et pas de φ , ni de N) ; on note cet ensemble $I_c^m(X,Y,\tilde{C})$.

Dans le cas présent la phase est

$$\varphi = \langle y-y',\eta\rangle + i/2(|x|^2+|x'|^2)\,|\eta| \qquad (\,|\eta| = (\textstyle\sum\eta_j^2)^{\frac{1}{2}}\,)$$

Elle est analytique , donc a un prolongement holomorphe dans un voisinage conique de $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^q\setminus 0$ dans $\mathbb{C}^{2n}\times\mathbb{C}^q\setminus 0$. Nous noterons Σ^o le cône complexe d'équation

(2.8) $\quad\sigma(D_o^+) = 0 \quad$ (c'est à dire $\xi = ix\,|\eta|$)

$\Sigma^o\cap\overline{\Sigma^o}$ est le complexifié du cône réel $x = \xi = 0$.
$\tilde{N}$ est le cône complexe $y-y' + i/2(|x|^2+|x'|^2)\frac{\eta}{|\eta|} = 0$, et la relation canonique $\tilde{C}$, que nous noterons C_o^+ , est le cône complexe des $(x,y,x',y',\xi,\eta,\xi',\eta')$ tels que

$$(2.9)\quad \begin{cases} y' = y + i/2(|x|^2+|x'|^2)\\ \xi = i\,x\,|\eta|\\ \xi' = -i\,x'|\eta|\\ \eta' = \eta \end{cases}$$

(2.10) Remarque.- Il est clair que C_o^+ est contenue dans $\Sigma^o \times \overline{\Sigma^o}$, et contient $\mathrm{diag}(\Sigma^+)$ (Σ^+ désignant le cône $x = \xi = 0$; on le voit en faisant $x = x' = 0$ dans les formules (2.9)).

En fait C_o^+ est la seule relation canonique qui ait ces propriétés : en effet si C' est une telle relation canonique, C' est involutive (pour la forme $\sum_1^p d\xi_j \wedge dx_j - d\xi'_j \wedge dx'_j + \sum_1^q d\eta_j \wedge dy_j - d\eta'_j \wedge dy'_j$), donc tangente au feuilletage bicaractéristique de $\Sigma^o \times \overline{\Sigma^o}$ (qui est involutive) ; or on constate aussitôt que le fibré tangent du feuilletage bicaractéristique de $\Sigma^o \times \overline{\Sigma^o}$ est linéairement disjoint du fibré tangent de $\mathrm{diag}(\Sigma^+)$: le long de $\mathrm{diag}(\Sigma^+)$, il est engendré par les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_j} + i|\eta|\frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $\frac{\partial}{\partial x'_j} - i|\eta|\frac{\partial}{\partial \xi'_j}$ $(j=1,..p)$; et comme $\dim(\Sigma^+) + \mathrm{codim}(\Sigma^o \times \overline{\Sigma^o}) = 2n$, C' est nécéssairement la réunion des feuilles bicaractéristiques passant par $\mathrm{diag}(\Sigma^+)$, donc égale à C_o^+.

En outre C_o^+ est strictement positive au sens de [15], §3 (presque par définition)

Remarquons aussi que dans le cas présent, Σ^o (et C_o^+) coupe transversalement le sous espace réel, et la partie imaginaire d'un point de Σ^o (ou de C_o^+) a même ordre de grandeur que la distance de ce point à la partie réelle de Σ^o (ou de C_o^+) ; aussi la classe d'une fonction presque analytique sur Σ^o (ou C_o^+) est entièrement déterminée par son développement de Taylor le long des points réels, ce qui rend la situation plus 'algébrique'.

b. Cas général.

Soit X une variété C^∞ (séparée, dénombrable à l'infini), et soit $D = (D_1,\dots,D_p)$ un système de p opérateurs pseudo-différentiels 'classiques' de degré m tels que

(2.11) (i) $[D_j, D_k] \sim \sum A_{jk}^m D_m$, <u>où les</u> A_{jk}^m <u>sont des opérateurs pseudo-différentiels 'classiques' de degré</u> $\leq m-1$.

(ii) <u>La matrice</u> $\sigma([D_j, D_k^*]) = \frac{1}{i}\{d_j, \bar{d}_k\}$ <u>est oubien hermitienne positive non dégénérée, ou bien hermitienne négative non dégénérée sur les zéros communs des</u> $d_j = \sigma(D_j)$

(Pour définir les adjoints, nous munissons X d'une mesure de densité C^∞, >0 - par exemple le volume pour une métrique Riemannienne C^∞. Les assertions ci-dessous ne dépéndent pas du choix d'une telle mesure.)

Nous noterons $\Sigma^{\pm}$ le cône $d_j = 0$, $\pm \frac{1}{i}\{d_j, \bar{d}_k\} \gg 0$ dans $T^*X \setminus 0$: c'est un cône lisse, symplectique, de codimension $2p$ (l'hypothèse $\pm \frac{1}{i}\{d_j, \bar{d}_k\} \gg 0$ implique que les différentielles des d_j, $\bar{d}_j$ sont linéairement indépendantes le long de $\Sigma^{\pm}$).

On note encore Σ^0 la (classe de) variété presque analytique définie par les équations $\tilde{d}_j = 0$, $j=1,..p$, où $\tilde{d}_j$ est un prolongement presque analytique de d_j. La condition (2.11)(i) implique que Σ^0 est involutive (l'idéal engendré par les d_j est stable par crochet de Poisson)

Il résulte de [3] (cf. aussi [9] dans le cas où les D_j sont analytiques) que pour tout $\xi \in \Sigma^{\pm}$, il existe un isomorphisme canonique ϕ défini au voisinage de ξ, et un opérateur intégral de Fourier V associé à ϕ et elliptique au voisinage de ξ, tels qu'on ait, au voisinage de ξ, U désignant une parametrix de V

(2.12) $D \sim U\, C\, D_0\, V$ (au voisinage de ξ), où C est une matrice elliptique d'opérateurs pseudo-différentiels classiques.

(2.13)Proposition.- <u>Il existe une (classe de) relation canonique</u> C^+ <u>presque analytique sur</u> $T^*X \times T^*X$, <u>unique à équivalence près, telle</u>

(i) $C^+ \subset \Sigma^0 \times \overline{\Sigma^0}$

(ii) <u>L'ensemble des points réels de</u> C^+ <u>est exactement la diagonale de</u> Σ^+.

C^+ <u>est strictement positive (au sens de</u> [15], §3).

En effet on se ramène aussitôt au cas du modèle local de a., grâce à la transformation canonique ϕ ci-dessus, et la proposition résulte de la remarque (2.10).

(2.14) Théorème.- Il existe des opérateurs réguliers S et L tels que (i) $S \sim S^* \sim S^2$

(ii) $D\,S \sim 0$, et $\mathrm{Id} \sim S + L\,D$

S est complètement déterminé à un opérateur de degré $-\infty$ près par ces conditions , et on a $S \in I^0_c(X^2, C^+)$

preuve: remarquons pour commencer que l'assertion du théorème est locale . Tout d'abord , si W est un cône ouvert de $T^*X \setminus 0$, et si S , L , S' , L' sont deux systèmes d'opérateurs réguliers satisfaisant aux conditions (i) et (ii) dans W , on a

$$S \sim (S' + L'D)S \sim S'S \quad \text{dans } W$$

et , de même $S' \sim S\,S'$ dans W . En outre , comme $S \sim S^*$ et $S' \sim S'^*$ (dans W) , on a

$$S' \sim SS' \sim (SS')^* = S'^* S^* \sim S'S \sim S$$

Ceci démontre l'unicité de S (à un opérateur de degré $-\infty$ près).

Soit maintenant W_α un recouvrement ouvert localement fini de $T^*X \setminus 0$, et pour tout α , soient S_α , L_α des opérateurs réguliers satisfaisant à (i) et (ii) dans W_α . Choisissons , comme il est loisible , une partition pseudo-différentielle de l'unité Q_α subordonnée aux W_α (ie. $Q_\alpha \sim 0$ au voisinage de $\complement W_\alpha$, la somme $\sum Q_\alpha$ est localement finie , et $\sum Q_\alpha \sim \mathrm{Id}$) . Posons

$$S \sim \sum Q_\alpha\, S_\alpha \qquad , \quad L \sim \sum Q_\alpha\, L_\alpha$$

On a alors $S_\alpha \sim S$ dans W_α , pour tout α (car $S_\alpha \sim S_\beta$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$, donc $Q_\beta S_\beta \sim Q_\beta\, S_\alpha$ dans U_α pour tout β , de sorte qu'on a , pour tout α , $S = \sum_\beta Q_\beta S_\alpha \sim S_\alpha$ dans W_α). On a aussi $L\,D = \sum Q_\alpha L_\alpha D \sim \sum Q_\alpha (1 - S_\alpha) \sim \sum Q_\alpha (1-S) \sim \mathrm{Id} - S$.

Il suffit donc de prouver le théorème au voisinage de chaque point de $T^*X \setminus 0$. Il n'y a pas de difficulté en dehors de la variété caractéristique $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, où D est elliptique (on peut donc prendre , dans le complémentaire de Σ , $S = 0$, $L \sim (D^*D)^{-1} D^*$, où $(D^*D)^{-1}$ désigne une parametrix de l'opérateur D^*D , qui est elliptique) . Il n'y a pas non plus de difficulté au voisinage d'un point de Σ^- (on peut prendre $S = 0$, $L \sim U L_o^- C^{-1} V$, U et V étant comme dans (2.12) , et C^{-1} désignant une parametrix de C) . Reste à examiner ce qui se passe au voisinage des points de C^+ : dans un premier essai , nous choisissons (U , V , et C étant comme dans (2.12))

$$S_1 = U R R^* V \quad , \quad L_1 \doteq U L_o^+ C^{-1} V \; .$$

On a évidemment $S_1 \sim S_1^2$, $D S_1 \sim 0$, et $Id \sim S_1 + L_1 D$, mais il n'y a aucune raison pour qu'on ait $S_1 \sim S_1^*$.

Pour corriger , nous remarquons que $R^* U^* U R$ est un opérateur pseudo-différentiel classique elliptique . Soit B une parametrix , et posons

$$S = U R B R^* U^*$$

On a $B \sim B^*$, donc $S \sim S^*$. Des relations $R^* V U R \sim Id$, et $B \; R^* U^* U R \sim Id$, on déduit

$$S S_1 = (URBR^*U^*)(URR^*V) = UR(B\, R^*U^*UR)\, R^*V \sim S_1$$

$$S_1 S = (URR^*V)(URBR^*U^*) = UR\,(R^*VUR)\, BR^*U^* \sim S$$

D'où $DS \sim DS_1S \sim 0$, $S^2 \sim SS_1S \sim S_1S \sim S$, et

$$(1-S)(1-S_1) = 1 - S - S_1 + SS_1 \sim 1 - S$$

D'où , avec $L = (1-S)\, L_1$

$$S + LD = S + (1-S)\, L_1 D \sim S + (1-S)(1-S_1) \sim Id$$

Enfin dans [15], §7 , on prouve que $S = U R B R^* U^*$, qui est composé d'opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle ou complexe , et à symbole total classique , est encore un opérateur intégral de Fourier à phase complexe , et à symbole total classique . Ici B est associé à la relation canonique identique (c'est un opérateur pseudo-différentiel) donc $R R^*$ et $R B R^*$ sont associés à la même relation canonique C_o^+ . U est associé à l'isomorphisme canonique ϕ^{-1} , et son adjoint U^* est associé à l'isomorphisme inverse ϕ , de sorte que $S = U R BR^* U^*$ est associé à la relation canonique $\phi^{-1} \circ C_o^+ \circ \phi = C^+$. Ceci achève la démonstration du thèorème .

c. <u>Cas de $\bar{\partial}_b$</u> .

Nous reprenons les notations du n°1 : Ω désigne l'ouvert borné $\rho < 0$, sa frontière X est définie par $\rho = 0$, et on a $d\rho \neq 0$ sur X .

On note $T'' \subset TX \otimes \mathbb{C}$ l'ensemble des vecteurs anti-holomorphes tangents à X : les éléments de T'' en un point x de X sont donc les vecteurs $\sum a_j \, \partial/\partial \bar{z}_j$ tels que $\sum a_j \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}(x) = 0$. T'' est un sous-fibré vectoriel C^∞ de $TX \otimes \mathbb{C}$; dans l'ouvert X_k de X où on a $\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k} \neq 0$, T'' admet pour base les champs (à coefficients C^∞)

$$D_j^k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \qquad , \quad j \neq k$$

T'' satisfait à la condition d'intégrablilté de Frobenius (autrement dit si X et Y sont deux sections C^∞ de T'' , il en est de même du crochet $[X,Y]$ - en fait on a $[D_j^k, D_m^k] = 0$ dans X_k) . L'orthogonal de T'' dans $T^* X \otimes \mathbb{C}$ admet pour base les restrictions $dz_j | X$.

Rappelons que $\bar{\partial}_b$ est l'opérateur différentiel : $C^\infty(X) \to C^\infty(X, T''^*)$ défini par $\bar{\partial}_b f = df | T''$; on a aussi $\bar{\partial}_b f = d'' \tilde{f} | T''$ si $\tilde{f}$ est n'importe quel prolongement C^∞ de f sur $\mathbb{C}^n$. Dans X_k , T''^* admet pour base les $d\bar{z}_j | T''$, $j \neq k$, et on a

$$\bar{\partial}_b f = \sum_{j \neq k} D_j^k f \;\; d\bar{z}_j | T''$$

Le cône caractéristique Σ de $\bar{\partial}_b$ est le sous-fibré vectoriel réel de T^*X orthogonal de T'' (donc aussi du conjugué $T' = \overline{T''}$). Il est engendré par la forme

$$\frac{1}{i}\, d'\rho\,|X = -\frac{1}{i}\, d''\rho\,|X$$

(en tant que fibré vectoriel ; en tant que cône , une fois qu'on a ôté la section nulle , il reste deux nappes , engendrées l'une par $\frac{1}{i} d'\rho\,|X$, l'autre par $-\frac{1}{i}\, d'\rho\,|X$.

Si $Z = \sum a_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, $W = \sum b_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ sont deux sections C^∞ de T'' (que par commodité nous prolongeons en champs anti-holomorphe C^∞ au voisinage de X) , on a

$$\sigma([Z,W^*])\,(\tfrac{1}{i}\, d'\rho) = -\sigma([Z,\bar{W}])\,(\tfrac{1}{i}\, d'\rho) =$$

$$= -i \,\langle [Z,\bar{W}]\,,\tfrac{1}{i} d'\rho\rangle = -\langle [Z,\bar{W}]\,, d'\rho\rangle$$

Mais la composante holomorphe de $[Z,\bar{W}]$ est $\theta_Z \bar{W} =$ $\sum a_j \frac{\partial \bar{b}_k}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_k}$. On a donc

$$-\langle [Z,W], d'\rho\rangle = -\sum a_j \frac{\partial \bar{b}_k}{\partial z_j}\frac{\partial \rho}{\partial z_k} \quad \text{(sur X)}$$

Comme on a $\langle \bar{W}, d'\rho\rangle = \langle \bar{W}, d\rho\rangle = 0$ sur X , et comme Z est tangent à X , on a

$$\theta_Z \langle W, d'\rho\rangle = \sum a_j \left(\frac{\partial \bar{b}_k}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial \rho}{\partial z_k} + \bar{b}_k \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_j\, \partial z_k}\right) = 0 \quad \text{sur X}$$

d'où finalement

$$\sigma([Z,W^*])\,(\tfrac{1}{i}\, d'\rho) = \sum a_j\, \bar{b}_k \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_j\, \partial z_k} = L_\rho(Z,W)$$

où L_ρ est la forme sesquilinéaire hermitienne associée à la matrice de Levi de ρ (comme dans (1.2)).

Ainsi si ρ est strictement pseudo-convexe , $\bar{\partial}_b$ satisfait aux hypothèses du théorème(2.14) . La variété caractéristique Σ est symplectique , et $\Sigma^{\pm}$ est la nappe des multiples positifs de $\pm\frac{1}{i}\, d'\rho\,|X$.

Le théorème(2.14) affirme qu'il existe $S' \in I^o_c(X \times X, C^+)$

et L' régulier (en fait $L' \in OPS^{-1,-1}(X,\Sigma)$ avec les notations de [3]) tels que

$$(2.15)\quad S' \sim S'^* \sim S'^2 \quad , \quad \bar{\partial}_b S' \sim 0 \quad , \quad Id \sim S' + L' \bar{\partial}_b$$

C^+ désigne la relation canonique presque analytique définie par la proposition(2.13) .

(2.16)<u>Proposition</u>.- C^+ <u>est la relation canonique associée à la phase</u> $(x,y,t) \mapsto t\,\psi(x,y)$ <u>sur</u> $X \times X \times \mathbb{R}_+$, ψ <u>étant la fonction définie au</u> n°1 .

En effet la fonction $t\,\psi(x,y)$ satisfait bien aux conditions (2.6) (i)(ii)(iii) ci-dessus : les points critiques sont les points où l'on a $\frac{\partial}{\partial t}(t\,\psi) = 0$, c'est à dire $\psi = 0$; l'ensemble des points critiques réels est donc $\mathrm{diag}(X) \times \mathbb{R}_+$; et sur diag(X) on a $d_x\psi = -d_y\psi = \frac{1}{i}\, d'\rho | X \neq 0$ (donc à plus forte raison $d(\frac{\partial}{\partial t} t\,\psi) \neq 0$) .

La relation canonique presque analytique associée à $t\,\psi$ contient $\mathrm{diag}(\Sigma^+)$, puisque sur diag(X) on a $d_x(t\,\psi) = - d_y(t\,\psi) = t\,\frac{1}{i}\, d'\rho | X$; et il résulte aussitôt du fait que $d''_x\psi$ et $d'_y\psi$ s'annulent d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(\mathbb{C}^n)$ que cette relation canonique est contenue dans $\Sigma^o \times \overline{\Sigma^o}$ (ici , cela signifie exactement que $\bar{\partial}_{b,x}\psi$ et $\partial_{b,y}\psi$ s'annulent à l'ordre infini sur diag(X)). La proposition(2.15) résulte donc de la proposition(2.13) .

Ainsi S' admet une représentation intégrale de la forme

$$(2.17)\quad S'(x,y) = \int_0^\infty e^{it\,\psi(x,y)}\, a(x,y,t)\, dt$$

où a est un symbole classique de degrè $n-1$:

$$a(x,y,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{n-1-k}\, a_k(x,y)$$

S' est un bon candidat pour approcher le noyau de Szegö S , et nous verrons au n°3 qu'il en diffère par une fonction de classe C^∞ .

§3 Le noyau de Bergman .

a. Notations .

On conserve les notations antérieures pour Ω , X , φ , ψ et T'' . Nous noterons γ l'opérateur de restriction qui à $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ fait correspondre $f|X$; et si ω est une forme de type 0,1 nous noterons encore $\gamma\omega$ la restriction $\omega|T''$. On a donc

$$(3.1) \qquad \gamma f = f|X$$

$$\gamma d''f = \bar{\partial}_b \gamma f$$

Pour passer de résultats concernant les traces sur X de fonctions holomorphes aux fonctions elles-mêmes , nous allons exploiter le fait qu'une fonction holomorphe est harmonique , donc qu'elle s'exprime au moyen du noyau de Poisson à partir de sa restriction à X . Nous noterons $K : C^\infty(X) \to C^\infty(\bar{\Omega})$ l'opérateur qui résout le problème de Dirichlet . On a donc

$$(3.2) \qquad \Delta K = 0$$

$$\gamma K = \mathrm{Id}$$

Pour les propriétés des opérateurs tels que K , ou que l'opérateur G ci-dessous , et en particulier la façon dont ils se composent avec les opérateurs pseudo-différentiels , nous renvoyons à [1] , [2] . On sait que K se prolonge continument : $C^{-\infty}(X) \to C^{-\infty}(\bar{\Omega})$ (où $C^{-\infty}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des distributions portées par $\bar{\Omega}$) ; aussi l'adjoint K^* est continu $C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(X)$ et se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega})$ $C^{-\infty}(X)$. L'opérateur K^*K est un opérateur pseudo-différentiel classique , elliptique de degré -1 , hermitien positif , et inversible (parceque K est injectif) ; son symbole est $(2|\xi|)^{-1}$. Nous poserons

$$(3.3) \qquad A = (K^*K)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(la racine positive)}$$

C'est un opérateur pseudo-différentiel classique , elliptique de degré $\frac{1}{2}$, hermitien positif et inversible ; son symbole est $(2|\xi|)^{\frac{1}{2}}$. On a $AK^*KA = A\,A^{-2}\,A = Id$, donc KA est isométrique , et

$$(3.4) \qquad H = KA^2K^*$$

est le projecteur orthogonal sur les formes harmoniques dans $L^2(\Omega)$. L'opérateur H est continu $C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(\bar{\Omega})$ et se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \to C^{-\infty}(\bar{\Omega})$

Nous utiliserons enfin le résultat suivant : il existe un opérateur (unique) $G : C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(\bar{\Omega})$ (qui est un opérateur de Green au sens de [2]) tel que

$$(3.5) \qquad H + G\Delta = \Delta G = Id \quad , \quad K^*G = 0$$

En effet si G_1 est le noyau de Green du problème de Dirichlet , on a $\Delta G_1 = K + G_1\Delta = Id$, $\gamma G_1 = 0$, et l'opérateur $G = (1-H)\,G_1$ satisfait aux conditions (3.5) (car on a $K^*(1-H) = (1-K^*KA^2)K^* = 0$, donc $K^*(1-H)G_1 = 0$, $\Delta H = 0$, donc $\Delta(1-H)G_1 = \Delta G_1 = Id$; enfin H et $K\gamma$ sont deux projecteurs sur le même sous espace , donc $HK\gamma = K\gamma$, $K\gamma H = H$, et $(1-H)(1-K\gamma) = (1-H)$, d'où

$$H + (1-H)G_1\Delta = H + (1-H)(1-K\gamma) = Id \qquad)$$

En outre G_1 est hermitien $(G_1 = G_1^*)$ car le problème de Dirichlet est auto-adjoint ; comme il est continu $C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(\bar{\Omega})$, il se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \to C^{-\infty}(\bar{\Omega})$, et il en est de même pour $G = (1-H)G_1$.

b. <u>Réduction au bord de Ω</u> .

Soit B le projecteur de Bergman (projecteur orthogonal sur les fonctions holomorphes dans $L^2(\Omega)$) . Comme une fonction holomorphe est harmonique , on a $B = HB$. Comme B et H sont tous deux auto-adjoints , on a aussi $B = BH = HBH =$

$= K A^2 K^* B K A^2 K^*$. Nous poserons

(3.6) $$S_A = AK^* B KA$$

$$P = A S_A A$$

On a donc $B = K P K^*$

Comme B est un projecteur orthogonal , et KA une isométrie sur un sous-espace contenant l'image de B , S_A est un projecteur orthogonal ; son image est $AK^*(\mathrm{Im}(B))$. Mais si f est harmonique , on a $AK^* f = A^{-1} A^2 K^* K \gamma f = A^{-1} \gamma f$. En particulier $AK^* B = A^{-1} \gamma B$. Comme les traces des fonctions holomorphes sont exactement les fonctions sur X annulées par $\bar{\partial}_b$ (cf. [14]) , on a $\mathrm{Im}(\gamma B) = \gamma \mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b$, et par suite

(3.7) l'image de S_A est $A^{-1} \mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b = \mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b A$

c. Construction d'un projecteur approximatif .

Le système $\bar{\partial}_b A$ satisfait encore aux conditions du théorème(2.14) , avec les mêmes cônes Σ^+ , Σ , Σ^o , et la même relation canonique C^+ (il est clair que dans le théorème (2.14) on peut remplacer les D_j par $D_j A$, si A est elliptique ; les cônes Σ , Σ^+ , Σ^o , et C^+ ne changent pas car ils ne dépendent que de l'idéal de fonctions C^∞ engendré par les symboles $\sigma(D_j)$).

Le théorème(2.14) affirme donc qu'il existe un opérateur $S'_A \in I^o_c(X \times X, C^+)$ et un opérateur L'_A (qu'on peut en fait choisir dans $OPS^{-\frac{1}{2},-1}(X,\Sigma)$) tels que

(3.8) $$S'_A \sim S'^*_A \sim S'^2_A \quad , \quad \bar{\partial}_b A S'_A \sim 0 \quad , \quad S'_A + L'_A \bar{\partial}_b A \sim \mathrm{Id}$$

Quitte à remplacer S'_A par $\frac{1}{2}(S'_A + S'^*_A)$, on peut même supposer $S'_A = S'^*_A$. On posera encore

$$(3.9)\qquad P' = A\, S'_A\, A$$

$$B' = K\, P'\, K^*$$

Comme $A = A^*$, on a $P' = P'^*$ et $B' = B'^*$. On a aussi

$$\bar\partial_b P' = \bar\partial_b A\, S'_A\, A \sim 0$$

$$B'^2 = KA\, S'_A\, AK^*KA\, S'_A\, AK = KA\, S'^2_A\, AK \sim B'$$

En vue de ce qui précède , B' est un bon candidat pour approcher le noyau de Bergman B .

(3.10)<u>Proposition</u>.- <u>On a</u> $d''B' \sim 0$

Voici une première démonstration : on a évidemment $d''d''KP'=0$, et $d''^*d''KP' = \frac{1}{2}\,\Delta\, KP' = 0$. En outre on a

$$\gamma\, d''\, KP' = \bar\partial_b\, \gamma\, KP' = \bar\partial_b\, P' \sim 0$$

Il résulte alors du théorème de régularité de la solution du problème d'' - Neumann (cf. [11], [12], [13]) qu'on a aussi $d''\, KP' \sim 0$, et $d''\, K\, P'\, K^* = d''\, B' \sim 0$.

Cette démonstration est tout à fait immorale , car elle utilise le théorème de régularité de [12] , alors qu'il est clair que celui-ci doit résulter essentiellement des constructions faites jusqu'à présent . Voici donc une autre démonstration qui n'utilise pas le résultat de régularité de [12] .

(3.11)<u>Lemme</u>.- <u>Il existe un symbole</u> $b(x,y,t) \sim \sum b_k(x,y)\, t^{n-k}$ <u>sur</u> $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_+$ <u>tel que</u>

(i) $b(x,y,t) = \overline{b(y,x,t)}$ (<u>donc</u> $b_k(x,y) = \overline{b_k(y,x)}$ <u>pour tout</u> k)

(ii) $d''_x b_k$ <u>et</u> $d'_y b_k$ <u>sont nuls d'ordre infini , pour tout</u> k, sur $\mathrm{diag}(\mathbb{C}^n)$.

(iii) $P' \sim \int_0^\infty e^{it\psi}\, b|X^2\, dt$

Nous construisons b par approximations successives . Supposons construit $b_{N-1} \in S^n_c(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_+)$, satisfaisant à (i) et (ii) , et tel que , avec $P_{N-1} = \int_0^\infty e^{it\psi} \, b_{N-1}|X^2 \, dt$, on ait $R_N = P' - P_{N-1} \in I_c^{1-N}(X \times X , C^+)$ (pour $N = 0$, on prend $b_{N-1} = 0$) . On a donc

$$R_N = \int_0^\infty e^{it\psi} \, r_N \, dt \quad , \quad \text{avec } r_N \sim \sum r_{N,k}(x,y) \, t^{1-N-k}$$

et puisque $R_N = R_N^*$, on peut supposer $r_{N,k}(x,y) = \overline{r_{N,k}(y,x)}$ pour tout k .

Comme $d''_x\psi$, $d'_y\psi$, $d''_x b_{N-1}$ et $d'_y b_{N-1}$ sont nuls d'ordre infini pour $x = y$, on a $\bar{\partial}_b P_{N-1} \sim 0$, donc aussi $\bar{\partial}_b R_N \sim 0$ puisque $\bar{\partial}_b P' \sim 0$. Mais comme $\bar{\partial}_{b,x}\psi$ est nul d'ordre infini sur diag(X) , on a (à une fonction C^∞ près)

$$\bar{\partial}_b R_N \sim \int e^{it\psi} \, \bar{\partial}_b r_N \, dt \sim 0$$

et , d'après la remarque de la fin du n°1 , $\bar{\partial}_{b,x} r_{N,0}$ est divisible par ψ (ou encore : si $\bar{\partial}_b R_N \sim 0$, le symbole de $\bar{\partial}_b R_N$ est nul , et d'après [15] §7 , celui ci est , à un changement de variable près et à un facteur non nul près , la classe de $\bar{\partial}_{b,x} r_{N,0}$ mod. ψ) . Comme $r_{N,0}(x,y) = \overline{r_{N,0}(y,x)}$ $\partial_{b,y} r_{N,0}$ est aussi nul d'ordre infini sur diag(X) .

Soit maintenant $\beta_N(x,y)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ telle que $\beta_N(x,y) = \overline{\beta_N(y,x)}$, que $d''_x \beta_N$ et $d'_y \beta_N$ soient nuls d'ordre infini pour $x = y$, et que $\beta_N(x,x) = r_{N,0}(x,x)$ si $x \in X$ (une telle fonction existe car $r_{N,0}(x,x)$ est réel) .

Pour continuer nous aurons besoin du résultat suivant :

(3.12)<u>Lemme</u>.- <u>Soit</u> $\alpha(x,y)$ <u>une fonction</u> C^∞ <u>sur</u> X^2 <u>telle que</u> (i) $\alpha(x,x) = 0$ <u>pour tout</u> $x \in X$ (ii) $\bar{\partial}_{b,x}\alpha$ <u>et</u> $\partial_{b,y}\alpha$ <u>sont divisibles par</u> ψ . <u>Alors</u> α <u>est divisible par</u> ψ .

preuve du lemme(3.12) : il suffit de prouver que la série de Taylor de α est divisible par celle de ψ en tout point de diag(X) ; mais comme $d\psi \neq 0$ sur diag(X) , et comme $T'' \times T'$ est linéairement indépendant de T(diagX) et $\dim(T'' \times T') + \dim X = 2(2n-1) - 1$, celà résulte aussitôt de l'hypothèse (dans le langage plus géométrique des fonctions et variétés presqu'analytiques : soit $\tilde{\psi}$ un prolongement presqu'analytique de ψ , de sorte que la variété d'équation $\tilde{\psi}(x,x) = 0$ est un prolongement presque analytique de X . Soit $\tilde{N}$ la sous variété d'équation $\tilde{\psi}(x,y) = 0$ dans X^2 . Comme $\bar{\partial}_{b,x}\psi$ et $\partial_{b,y}\psi$ sont nuls d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(\tilde{X})$, $\tilde{N}$ est engendrée par le flot intégral de $T'' \times T'$ issu de $\mathrm{diag}(\tilde{X})$, et si une fonction α est nulle sur $\mathrm{diag}(\tilde{X})$ et invariante par le flot intégral de $T''\times T'$, elle est nulle sur $\tilde{N}$).

Il résulte du lemme(3.12) que $r_{N,0} - \beta_N|X^2$ est divisible par ψ , donc si $b_N = b_{N-1} + \beta_N$, on a $P' - P_N \in I_c^{-N}(X \times X, C^+)$ et la récurrence peut se poursuivre . Pour terminer , il suffit de prendre $b \sim \sum(b_N - b_{N-1})$ (et de remplacer au besoin par $\frac{1}{2}(b(x,y,t) + \overline{b(y,x,t)})$.

Nous terminons maintenant la démonstration de la proposition(3.10) . Soit B_1' l'opérateur de noyau $\int_0^\infty e^{it\psi}\, b\, dt$ (sur $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$) . Comme $d_x''b$ est nul d'ordre infini sur $\mathrm{diag}(X)$ on a $d''B_1' \sim 0$. En outre si P_1' est l'opérateur de noyau $\int_0^\infty e^{it\psi}\, b|X^2\, dt$ (sur $X\times X$) , ie. $P_1' = \gamma B_1' \gamma^*$, on a $P_1' \sim P'$. Puisque $d''B_1' \sim 0$, on a aussi $\Delta B_1' \sim 0$, donc $B_1' \sim K\gamma B_1'$. Puisque $B_1' = B_1'^*$, on a aussi finalement

$$B_1' \sim B_1'\gamma^* K^* \sim K\gamma B_1'\gamma^* K^* = K P_1' K^* \sim K P' K = B'$$

(3.13)<u>Proposition</u>.- <u>Il existe un opérateur</u> F' , <u>continu de l'espace des formes de type</u> $0,1$ <u>à coefficients dans</u> $C^\infty(\bar{\Omega})$, <u>dans</u> $C^\infty(\bar{\Omega})$, <u>tel que</u> $\mathrm{Id} \sim B' + F'd''$.

On a en effet $\mathrm{Id} \sim S_A' + L_A'\bar{\partial}_b A$, donc

$$H = KA\,\mathrm{Id}\,AK^* \sim KAS_A'AK^* + KAL_A'\bar{\partial}_b A^2K^*$$

Mais on a $A^2K^*K = \mathrm{Id} = \gamma K$, donc $A^2K^*H = \gamma H$, et $\bar{\partial}_b A^2K^*H = \bar{\partial}_b\gamma H = \gamma d''H$, d'où

$$H \sim B' + (KAL_A'\gamma)\, d''H$$

Mais on a par ailleurs

$$\mathrm{Id} = H + G\Delta = H + 2\, Gd''^{*}\, d''$$

d'où $d''H = d''(\mathrm{Id} - G\Delta) = (1 - 2\, d''G\, d''^{*})\, d''$, d'où la proposition , avec

$$F' = 2\, Gd''^{*} + (KAL_A^{\prime}\, \gamma)(1 - 2\, d''Gd''^{*})$$

Remarquons qu'avec cette définition , F' ne se prolonge peut-être pas continument aux distributions ; néanmoins $F'd''$ se prolonge continument : $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \to C^{-\infty}(\bar{\Omega})$ (parcequ'il en est ainsi pour B' , et $F'd'' \sim \mathrm{Id} - B'$)

A ce point , nous introduisons une partie des résultats de [11] , [12] , [13] sous la forme suivante :

(3.14) $\mathrm{Ker}\, d'' \cap C^{\infty}(\bar{\Omega})$ <u>est dense dans</u> $\mathrm{Ker}\, d'' \cap L^2(\bar{\Omega})$

(qui implique bien sûr que $\mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b \cap C^{\infty}(X)$ est dense dans $\mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b \cap L^2(X)$) .

(3.15) <u>Corollaire</u>.- $B - B'B$ <u>se prolonge continument</u> $L^2(\Omega) \to C^{\infty}(\bar{\Omega})$

$B - BB'$ <u>se prolonge continument</u> $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \to L^2(\Omega)$

En effet posons $R = \mathrm{Id} - B' - F'd'' \sim 0$: R se prolonge continument $C^{-\infty}(\bar{\Omega}) \to C^{\infty}(\bar{\Omega})$. Comme $(F'd'')$ annule $\mathrm{Ker}\, d'' \cap C^{\infty}(\bar{\Omega})$ il annule aussi $\mathrm{Ker}\, d'' \cap L^2(\bar{\Omega})$, et on a donc $F'd''B = 0$.

Par suite $B - B'B = RB$ se prolonge continument $L^2 \to C^{\infty}$ et $B - BB' = BR^{*}$ se prolonge continument $C^{-\infty} \to L^2$.

d. Fin de la démonstration .

Nous nous proposons maintenant de démontrer le résultat final (qui , joint à ce qui précède , implique l'assertion du théorème(1.5) concernant le noyau de Bergman) :

(3.16) Proposition.- On a $B \sim B'$

Des inégalités de J.J.Kohn , nous retiendrons encore

(3.17) Il existe un opérateur F , continu des formes de type 0,1 à coefficients L^2 dans L^2 tel que $Id = B + Fd''$

(ceci résulte aussitôt de l'inégalité de [11] , qui affirme qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ orthogonale aux fonctions holomorphes , on ait $\|f\|_{L^2} \leqslant C \|d''f\|_{L^2}$) .

Ainsi $F\, d'' = Id - B$ se prolonge continument à L^2 , et annule les fonctions holomorphes . On en déduit aussitôt :

(3.18) $B' - BB'$ se prolonge continument $C^{-\infty} \to L^2$
$B' - B'B$ se prolonge continument $L^2 \to C^\infty$

En effet on a $B' = BB' + F\,(d''B')$, mais $d''B'$ se prolonge continument $C^{-\infty} \to C^\infty$ ($d''B' \sim 0$) , et F est continu : $L^2 \to L^2$. De même $B' - B'B = (B'-BB')^* = (d''B')^* F$ **se prolonge** continument $L^2 \to C^\infty$.

Il résulte alors de (3.15) et (3.18) que B est continu $C^\infty \to C^\infty$ et se prolonge continument $C^{-\infty} \to C^{-\infty}$ (en effet B' , $B-B'B$ et $B'-B'B$ sont continus $C^\infty \to C^\infty$, donc il en est de même de B ; et B' , $B-BB'$, et $B'-BB'$ se prolongent continument $C^{-\infty} \to C^{-\infty}$, donc il en est de même de B).

Répétant la preuve de (3.15) , on voit alors qu'on a $B-B'B = RB \sim 0$, et $B-BB' = (B-B'B)^* = BR^* \sim 0$.

Finalement il résulte de (3.15) et (3.18) que $B-B'$ se prolonge continument $C^{-\infty} \to L^2$, et aussi $L^2 \to C^\infty$, donc on a $(B-B')^2 \sim 0$. Mais on a

$$(B-B')^2 = B^2 + B'^2 - BB'-B'B \sim B' + (B-BB'-B'B) \sim B'-B$$

et ceci achève la démonstration .

e. <u>Le noyau de Szegö</u> .

Soit S le noyau de Szegö , et soit S' l'opérateur construit au §2.c (2.15) . Comme annoncé , nous allons démontrer

(3.19)<u>Proposition</u>.- <u>On a</u> $S - S' \sim 0$

Quitte à remplacer S' par $\frac{1}{2}(S'+S'^*)$, nous pouvons supposer $S' = S'^*$. Comme au §3.b , nous posons $S_A = AK^* BKA$; on a $S_A \sim S'_A$, donc , avec les notations de (3.8)

$$\mathrm{Id} \sim S_A + L'_A \bar{\partial}_b A$$

Soit alors $S_1 = A S_A A^{-1}$: S_1 est un projecteur sur $\mathrm{Ker}\, \bar{\partial}_b$, donc on a

(3.20) $S_1 S = S$, $S S_1 = S_1$

en outre on a

(3.21) $\bar{\partial}_b S_1 = 0$, $\mathrm{Id} \sim S_1 + A L'_A \bar{\partial}_b$.

De (2.15) et (3.21) on déduit

(3.22) $T = S'S_1 - S_1 \sim 0$

$T' = S_1 S' - S' \sim 0$

(où les premiéres égalités sont des définitions de T et T')

On a $S'S - S = (S'S_1 - S_1)S = TS$, donc $S'S-S$ est continu $L^2 \to C^\infty$, et $SS'-S = (S'S-S)^* = ST^*$ est continu $C^{-\infty} \to L^2$.

D'autre part on a

$$SS'-S' = SS'-SS_1S' + S_1S'-S' = (1-S)T'$$

donc $SS'-S'$ est continu $C^{-\infty} \to L^2$, et $S'S-S' = T'^*(1-S)$ est continu $L^2 \to C^\infty$.

Comme S' , $S'S-S$ et $S'S-S'$ sont continus $C^\infty \to C^\infty$, il en est de même de S . Et comme S' , $SS'-S$ et $SS'-S'$ sont continus $C^{-\infty}$ $C^{-\infty}$, il en est de même de S .

Par suite $S'S-S = TS \sim 0$, et $S'S-S' = T'^*(1-S) \sim 0$ d'où $S \sim S'$, ce qui achève la démonstration de la proposition(3.19) , et de l'assertion du théorème(1.5) concernant S.

Voici une autre démonstration , plus courte , mais qui présente l'inconvénient de ne marcher que pour $n > 2$.
Comme d'habitude on prolonge $\bar\partial_b$ en un complexe d'opérateurs différentiels du premier ordre , et on pose $\Box_b = \bar\partial_b^* \bar\partial_b + \bar\partial_b \bar\partial_b^*$.
Si $n > 2$, $\Box_b$ est hypoelliptique en degré 1 ; et plus précisément , comme X est compacte , il existe un opérateur $L_1 \in OPS^{-1,-1}(X,\Sigma)$, unique , tel que

$$L_1 \Box_b = \Box_b L_1 = Id - \pi \quad , \pi L_1 = L_1 \pi = 0 \quad , L_1 = L_1^*$$

π étant le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker} \Box_b$ en degré 1 .
(π est donc un projecteur de rang fini) (cf. [3] , [4]) .

Alors $\bar\partial_b \bar\partial_b^* L_1$ est le projecteur orthogonal sur l'image de $\bar\partial_b$, et $\bar\partial_b^* L_1 \bar\partial_b$ est le projecteur orthogonal sur l'orthogonal de $\operatorname{Ker} \bar\partial_b$. On a donc

$$S = Id - \bar\partial_b^* L_1 \bar\partial_b$$

Comme L_1 est régulier , S est régulier , et la proposition (3.19) résulte donc de l'assertion d'unicité du théorème(2.14). La même démonstration s'applique d'ailleurs au projecteur S_A

sur Ker $\bar{\partial}_b A$, et on retrouve ainsi la proposition(3.16).

Pour $n = 2$, $\Box_b$ n'est pas hypoelliptique en degré 1 , et d'ailleurs le contre-exemple de L.Nirenberg montre qu'on ne peut pas , dans la démonstration , ignorer la structure complexe dont provient $\bar{\partial}_b$.

§4 Calcul du terme dominant .

Comme on a vu au §1 , (1.7) , les noyaux de Szegö et de Bergman sont de la forme

$$(4.1)\qquad S(x,y) = F(x,y)\,(-i\psi)^{-n} + G(x,y)\,\mathrm{Log}(-i\psi)$$

$$B(x,y) = F'(x,y)(-i\psi)^{-n-1} + G'(x,y)\,\mathrm{Log}(-i\psi)$$

où F , G (resp. F' , G') sont des fonctions C^∞ sur X^2 (resp. $\bar{\Omega}^2$)

Nous noterons L_X la restriction de la forme de Levi L_ρ au plus grand sous-espace complexe $(T'+T'')\cap TX$ du fibré tangent TX , et $\det L_X$ le déterminant de la matrice de L_X dans une base orthonormale complexe de $(T'+T'')\cap TX$, de sorte que la forme quadratique réelle définie par L_X a pour discriminant (dans une base orthonormale réelle) $(\det L_X)^2$.

Nous nous proposons de redémontrer le résultat classique

(4.2)<u>Proposition</u>.- <u>Avec les notations ci-dessus , on a pour</u> $x \in X$

$$F(x,x) = \frac{(n-1)!}{4\pi^n}\ \det L_X\ \|d\rho\|$$

$$F'(x,x) = \frac{n!}{4\pi^n}\ \det L_X\ \|d\rho\|^2$$

Pour celà , nous allons calculer les symboles de S et de $P = A\,S_A\,A$, et pour commencer nous allons examiner comment se composent entre eux les opérateurs de $I_c^\infty(X\times X, C^+)$. Soient donc

$$Q_1 = \int_0^\infty e^{it\psi}\, q_1\, dt \quad \in \quad I_c^m(X^2, C^+)$$

$$Q_2 = \int_0^\infty e^{it\psi}\, q_2\, dt \quad \in \quad I_c^{m'}(X^2, C^+)$$

Le noyau du composé $Q_1 \circ Q_2$ est alors

$$Q_1 \circ Q_2 = \iint_{X\times\mathbb{R}_+^2} e^{it\psi(x,w)+is\psi(w,y)} q_1(x,w,t)q_2(w,y,s)dwdtds$$

Nous allons calculer cette intégrale en intégrant d'abord par rapport à w et s , puis par rapport à t . Posant $s = t\sigma$ on est amené à examiner l'intégrale

$$(4.3) \quad \iint_{X\times\mathbb{R}_+} e^{it\,\phi(x,y,w,\sigma)}\, q_1(x,w,t)\, q_2(w,y,t\sigma)\, t\, dw\, d\sigma$$

avec

$$(4.4) \quad \phi(x,y,w,\sigma) = \psi(x,w) + \sigma\psi(w,y)$$

Il est immédiat qu'on a $\operatorname{Im}\phi > 0$, sauf si $x = y = w$. Pour $x = y = w$, on a $d_w\phi = (\sigma-1)\,\frac{1}{i}\,d'\rho\,|\,X$, et comme $d'\rho\,|\,X \neq 0$, les seuls points critiques (réels) sont les points $x = y = w$, $\sigma = 1$.

Nous noterons h_ϕ le déterminant du double de la matrice hessienne de $\frac{1}{i}\phi$ par rapport à w , σ (dans une base orthonormale) . Pour $x = y \in X$, on a d'après (1.2)

$$(4.5) \quad \frac{1}{i}\,\phi(x,x,w,\sigma) = \frac{1}{i}(\psi(x,w) + \psi(w,x)) + (\sigma-1)\,\psi(w,x) =$$

$$= L_\rho(w-x) + \frac{1}{i}\,(\sigma-1)\,\langle \tfrac{1}{i}d'\rho\,,w-x\rangle + O(|w-x|^3)$$

On en déduit aussitôt

$$(4.6) \quad h_\phi = \frac{1}{16}\,(\det L_X)^2\,\|d\rho\|^2$$

(En effet la forme quadratique sur $T_xX\times\mathbb{R}$ qui décrit les termes du second ordre dans (4.5) est

$$(Z,S) \mapsto L_\rho(Z) + \frac{1}{i}\,S\,\langle \tfrac{1}{i}\,d'\rho\,,Z\rangle$$

Or $\frac{1}{i}\,d'\rho\,|\,X$ est réelle , de norme $c = 1/\sqrt{2}\,\|d'\rho\| = \frac{1}{2}\,\|d\rho\|$, et elle est orthogonale à $T'+T''$. Donc dans une base orthonormale de $T_xX\times\mathbb{R}$ où les deux premières coordonnées sont S et $c^{-1}\,\langle \frac{1}{i}\,d'\rho\,,Z\rangle$ la matrice de cette forme s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{c}{2i} & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & * & & & \end{pmatrix}$$

où $c = \| d'\varphi \mid X \| = \frac{1}{2} \| d\varphi \|$, A est la matrice de la restriction à $(T'+T'') \cap T_x X$ de la forme de Levi , donc $\det A = (\det L_X)^2$, et les $*$ représentent des coefficients qui n' influent visiblement pas sur la valeur du déterminant) .

Le déterminant hessien est donc non nul , et , d'après [15] §2 , on a

$$(4.7) \quad \iint e^{it\,\phi(x,y,w,\sigma)} q_1(x,w,t) q_2(w,y,t\sigma)\, t\,dw\, d\sigma \sim e^{it\,\psi_1(x,y)}\; q_3(x,y,t)$$

où $\psi_1(x,y)$ est la valeur critique d'un prolongement presque analytique de ϕ , et q_3 est un symbole classique , qui admet un développement asymptotique donné par les formules usuelles de la méthode de la phase stationnaire . Comme nous ne nous interessons ici qu'à la classe de noyau de $Q_1 \circ Q_2$ mod. $C^\infty(X^2)$, seuls comptent en fait les séries de Taylor de ψ_1 et de q_3 le long de $\mathrm{diag}(X)$. Celui de ψ_1 s'obtient en substituant à w , σ les séries formelles du point critique (formel) dans la série de Taylor de ϕ .

(4.8)<u>Proposition</u>.- <u>On a</u> $\psi \sim \psi_1$.

preuve : il s'agit de prouver que ψ_1 et ψ ont même série de Taylor en tout point de $\mathrm{diag}(X)$. Nous noterons (z',z'') les points du complexifié $\tilde{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n}$, de sorte que les séries formelles holomorphes (resp. antiholomorphes) sont celles qui ne dépendent que de z' (resp. z'') . Nous noterons encore $\underset{\sim}{f}(z+h)$ la série de Taylor de la fonction $h \mapsto f(z+h)$

au point $h = 0$. Comme $d''_x \psi$ et $d'_y \psi$ s'anulent à l'ordre infini pour $x = y$, on a

$$\underset{\sim}{\psi}(z+x, z+y) = S_z(x', y'')$$

(où en fait $S_z(h', h'')$ est la série de Taylor $\frac{1}{i} \underset{\sim}{\varrho}(z+h)$). La série de Taylor de ϕ au point $(z,z,z,1)$ $(z \in X)$ est donc

$$\underset{\sim}{\phi}(z+x, z+y, z+w, 1+\sigma) = S_z(x', w'') + (1+\sigma)\, S_z(w', y'')$$

Les équations du point critique sont alors

$$\text{(i)} \quad \frac{d}{d\sigma} \underset{\sim}{\phi} = S_z(w', y'') = 0$$

$$\text{(ii)} \quad d_w(\underset{\sim}{\phi} \mid X) = 0$$

(et bien sûr $S_z(x', x'') = S_z(y', y'') = S_z(w', w'') = 0$) . On sait que ces équations déterminent complètement les séries formelles de w et σ en fonction de x , y . La première équation signifie que le point (formel) $z + (w', y'')$ est dans la variété (formelle) X . Fixons provisoirement w' , et faisons varier y'' : on a $S_z(w', y'') = 0$, et l'espace tangent en (w', w'') à la variété (formelle) d'équation $S_z(w', y'') = 0$ est , par définition , T''_w . L'équation (ii) implique $\partial_{b,w} \underset{\sim}{\phi} = \partial_{b,w} S_z(w', y'') = 0$. Or on a $\partial_{b,w} S_z(w', w'') = 0$, et comme la forme de Levi ainsi que la restriction à $T' \times T''$ de la forme bilinéaire qu'elle définit est non dégénérée , le champ de vecteurs $y'' \mapsto \partial_{b,w} S_z(w', y'')$ a sur la variété (formelle) $S_z(w', y'') = 0$ un zéro (point critique) non dégénéré pour $y'' = w''$. Ainsi les équations $S_z(w', w'') = 0$, $S_z(w', y'') = 0$, $\partial_{b,w} S_z(w', y'') = 0$ impliquent $w'' = y''$, donc $\underset{\sim}{\phi}(z+x, z+y, z+w, 1+\sigma) = S_z(x', w'') = S_z(x', y'') = \underset{\sim}{\psi}(z+x, z+y)$ C.Q.F.D.

Démontrons maintenant la proposition(4.2) . Nous noterons encore $h_\phi = h_\phi(x,y)$ le déterminant de la demi-matrice hessienne de ϕ au point critique . Le premier terme du développement asymptotique de q_3 est

$$(4.9) \qquad \pi^n \; t^{-n} \; (h_\phi)^{-\frac{1}{2}} \; q_1 \, q_2 \; t$$

Ici il faut prendre la racine positive pour $x = y$.

Si alors $S = \int_0^\infty e^{it\psi} s \, dt \in I^{m-n+1}(X^2, C^+)$ est un projecteur approximatif , avec

$$s \sim \sum t^{m-k} \; s_k(x,y)$$

on a $\quad \pi^n \; t^{1-n} \; (h_\phi)^{-\frac{1}{2}} \; (s_o t^m)^2 \; = \; s_o \; t^m \qquad (\text{mod. } \psi)$

ce qui implique $m = n-1$, et $s_o = \pi^{-n} \; (h_\phi)^{\frac{1}{2}} \; (\text{mod. } \psi)$

Pour $x = y$, on obtient

$$(4.10) \qquad s_o = \frac{1}{4\pi^n} \; (\det L_X) \; \|d\rho\|$$

d'où $F(x,x) = (-i\psi)^n \int_0^\infty e^{it\psi} \; t^{n-1} \; s_o \, dt = \dfrac{(n-1)!}{4\pi^n} \; (\det L_X) \; \|d\rho\|$

Ceci vaut aussi bien pour le projecteur de Szegö S que pour le projecteur S_A du §3.b .

Enfin , comme $\sigma(A) = (2|\xi|)^{\frac{1}{2}}$, on vérifie sans peine que si $P = A \, S_A \, A = \int_0^\infty e^{it\psi} \; p \, dt$, avec $p \sim \sum t^{n-k} \; p_k$, on a

$$(4.11) \qquad p_o(x,x) = (\|2d_x\psi\|^{\frac{1}{2}})^2 \; s_o(x,x) = \|d\rho\| \; s_o(x,x) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^n} \; (\det L_X) \; \|d\rho\|^2$$

d'où $F'(x,x) \; = \; n! \; p_o(x,x) = \dfrac{n!}{4\pi^n} \; (\det L_X) \; \|d\rho\|^2$

Ceci achève la démonstration .

Nous décrivons maintenant plus précisément le développement asymptotique du composé $Q_1 \circ Q_2$, ou plus exactement sa série de Taylor en un point $(z,z) \in \text{diag}(X)$: le symbole total se calcule comme indiqué dans (4.7) . Pour abréger , nous noterons $\underset{\sim}{q}_j$ le symbole formel (à coefficients séries formelles)

$$(4.12) \qquad \underset{\sim}{q}_j = \sum t^{m_j - k} \; \underset{\sim}{q}_{j,k}(z+x, z+y)$$

Il résulte de la proposition(4.8) (et de (4.6)) qu'on peut toujours faire un changement de variables formel (à coefficients complexes)

$$w = \underset{\sim}{w}(x,y,u,v)$$

$$\sigma = \underset{\sim}{\sigma}(x,y,u,v)$$

$(u = (u_1,\dots,u_n)$, $v = (v_1,\dots,v_n))$ de telle sorte qu'on ait

$$(4.13)\quad \underset{\sim}{\phi}(z+x,z+y,z+w,1+\sigma) = u.v + \underset{\sim}{\psi}(z+x,z+y)$$

Il y a bien sûr plusieurs façons de réaliser ceci ; mais parmi toutes les façons , il y en a évidemment où les séries $\underset{\sim}{w}$, $\underset{\sim}{\sigma}$ à l'ordre N ne dépendent que de la série $\underset{\sim}{\psi}(z+x,z+y)$ à l' ordre N+1 (parceque les équations du point critique ne font intervenir que des dérivées d'ordre 1 de $\underset{\sim}{\psi}(z+x,z+y))$. Donc la série du determinant jacobien $\underset{\sim}{J}(x,y,u,v)$ ($dw\, d\sigma = \underset{\sim}{J}(x,y,u,v)\, du\, dv$) à l'ordre N ne dépend que de la série de Taylor $\underset{\sim}{\psi}(z+x,z+y)$ à l'ordre N+2 .

On a alors

$$(4.14)\quad \underset{\sim}{q}_3 = \pm \text{ " }\int e^{itu.v}\, \underset{\sim}{q}_1(x,w,t)\, \underset{\sim}{q}_2(w,y,t\sigma)\, t\, \underset{\sim}{J}\, du\, dv \text{ " } =$$

$$= \pm(2\pi)^n \sum \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} t^{1-n-|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{\alpha} \left[\underset{\sim}{q}_1(x,w,t)\underset{\sim}{q}_2(w,y,t\ )\underset{\sim}{J}\right]\Big|_{u=v=0}$$

(Le signe $\pm$ dépend du choix d'une racine de la matrice hes- sienne pour le changement de variable ci-dessus ; nous ne le discuterons pas ici).

Il est alors clair sur cette formule que la série formelle $\underset{\sim}{q}_{3,k}(z+x,z+y)$ à l'ordre N-2k ne dépend que de la série formelle $\underset{\sim}{\psi}(z+x,z+y)$ à l'ordre N+2 , et des séries formelles $\underset{\sim}{q}_{j,k}(z+x,z+y)$ $(j = 1,2)$ à l'ordre N-2k .

Il est alors naturel d'introduire les objets suivants :

nous noterons $\underset{\sim}{S}^m$ l'ensemble des symboles formels

$$\sum t^{n-1+m-k} \underset{\sim}{p}_k(x,y)$$

où $p_k(x,y)$ est une série de Taylor en un point $(z,z) \in \operatorname{diag}(X)$ sur X^2 (c'est à dire une classe de séries formelles à $4n$ variables, mod. l'idéal engendré par les séries formelles $\underset{\sim}{\rho}(z+x)$, $\underset{\sim}{\rho}(z+y)$). Nous noterons $\underset{\sim}{J}^m$ le sous espace $(\underset{\sim}{\psi} - i \frac{d}{dt}) \underset{\sim}{S}^m$ ($\underset{\sim}{\psi}$ désignant la série formelle $\underset{\sim}{\psi}(z+x,z+y)$) et $\underset{\sim}{I}^m$ le quotient $\underset{\sim}{S}^m/\underset{\sim}{J}^m$. La formule (4.7) fournit, via le développement asymptotique (4.14) une loi de composition bilinéaire : $\underset{\sim}{S}^m \times \underset{\sim}{S}^{m'} \to \underset{\sim}{S}^{m+m'}$. Celle ci induit par passage au quotient une loi associative : $\underset{\sim}{I}^m \to \underset{\sim}{I}^{m'} \to \underset{\sim}{I}^{m+m'}$.

Nous noterons encore $\underset{\sim}{S}^{m,N}$ l'ensemble des symboles de la forme $\sum t^{n-1+m-k} \underset{\sim}{p}_k$, où $\underset{\sim}{p}_k$ est nul d'ordre $N-2k$, et $\underset{\sim}{I}^{m,N}$ l'image de $\underset{\sim}{S}^{m,N}$ dans $\underset{\sim}{I}^m$.

D'après ce qui précède, la classe de $(\underset{\sim}{q}_1 \circ \underset{\sim}{q}_2)$ mod. $\underset{\sim}{I}^{m+m',N}$ ne dépend que des classes de $\underset{\sim}{q}_1$ mod. $\underset{\sim}{I}^{m,N}$, de $\underset{\sim}{q}_2$ mod. $\underset{\sim}{I}^{m',N}$ et de $\underset{\sim}{\psi}$ à l'ordre $2N+2$.

Le calcul ci dessus fournit un premier symbole formel (réduit à un terme) $\underset{\sim}{s}_o = t^{n-1} s_o(x,y) \in \underset{\sim}{I}^o$ tel que $\underset{\sim}{s}_o = \underset{\sim}{s}_o^*$, $\bar{\partial}_b \underset{\sim}{s}_o = 0$; la classe de $\underset{\sim}{s}_o$ mod. $I^{o,N}$ ne dépend que du développement de Taylor $\underset{\sim}{\psi}$ à l'ordre $N+2 \leqslant 2N+2$.

On a $\underset{\sim}{s}_o^2 = \underset{\sim}{s}_o + \underset{\sim}{r}$, avec $\underset{\sim}{r} \in \underset{\sim}{I}^{-1}$, et bien sûr aussi $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}^*$, $\bar{\partial}_b \underset{\sim}{r} = 0$. Alors un calcul élémentaire montre que la série formelle $\underset{\sim}{s} \in I^o$ associée au noyau de Szegö n'est autre que

$$(4.15) \quad \underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{s}_o + (1-2\underset{\sim}{s}_o)\, E(\underset{\sim}{r})$$

où $E(T) \in Z[[T]]$ est la série formelle (à coefficients entiers positifs) $\frac{1}{2}(1 - (1-4T)^{-\frac{1}{2}})$.

Il est alors clair que la classe de $\underset{\sim}{s}$ mod. $I^{o,N}$ ne dépend donc que de la série de Taylor $\underset{\sim}{\psi}(z+x,z+y)$ (donc de la série de Taylor $\underset{\sim}{\rho}(z+x)$) à l'ordre 2N+2 .

En d'autres termes , si le noyau de Szegö s'écrit $S = F(x,y)\,(-i\psi)^{-n} + G(x,y)\,\mathrm{Log}(-i\psi)$, la série de Taylor de F (mod. ψ^n) à l'ordre N et la série de Taylor de G à l'ordre $N-2n$ en un point $(x,x) \in \mathrm{diag}(X)$ ne dépendent que de la série de Taylor de ψ au point (x,x) (donc de celle de ρ au point x) à l'ordre $2N+2$.

Ceci met bien en évidence le caractère local de la singularité du noyau de Szegö . Un résultat entièrement analogue vaut pour le noyau de Bergman .

Pour terminer , remarquons que dans tout l'article , nous avons supposé que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$; mais il est clair que la démonstration s'adapte immédiatement au cas où Ω est un ouvert relativement compact , de bord C^∞ strictement pseudo-convexe , d'une variété de Stein. On peut d'ailleurs admettre un nombre fini de singularités isolées normales en dehors du bord , à condition d'interprêter B comme le projecteur orthogonal sur les formes holomorphes de type $0,n$ (pour la métrique hilbertienne $\|\omega\|^2 = i^{-n^2} \int_\Omega \omega \wedge \bar{\omega}$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Boutet de Monvel L. - Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord I et II , J. Anal. Math. 17 (1966) 241-304 .

[2] Boutet de Monvel L. - Boundary problems for pseudo-differential operators , Acta Math. 126 (1971) 11-51 .

[3] Boutet de Monvel L. - Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974) 585-639 .

[4] Boutet de Monvel L. - Intégration des équations de Cauchy Riemann induites . Séminaire Goulaouic-Schwartz 1974-75 , exposé n°IX .

[5] Duistermaat J.J. , Sjöstrand J. - A global construction for pseudo-differential operators with non involutive characteristics. Inventiones Math. 20 (1974) , 209-225.

[6] Fefferman C. - The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains . Inventiones Math. 26 (1974) ,1-66.

[7] Hörmander L. - Fourier Integral operators I , Acta Math. 127 (1971) 79-183 .

[8] Hörmander L. - The boundary behaviour of the Bergman kernel manuscrit (non publié).

[9] Kashiwara M. , Kawai T. , Sato M. - Microfunctions and pseudo-differential equations . Lecture Notes , Springer , n°287 , chap. II .

[10] Kerzman N. - The Bergman kernel-function : differentiability at the boundary . Math. An. 195 (1972) 149-158 .

[11] Kohn J.J. - Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds I . Ann. Math. 78 (1963) 112-148 .

[12] Kohn J.J. - Regularity at the boundary of the $\bar{\partial}$-Neuman problem . Proc. Nat. Acad. Sci. USA 49 (1963) 206-213 .

[13] Kohn J.J. - Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds II . Ann. Math. 79 (1964) 450-472.

[14] Lewy H. - On the local character of the solution of an atypical linear differential equation ... Ann. Math. 64 (1956) 514-522.

[15] Melin A. , Sjöstrand J. - Fourier integral operators with complex valued phase functions . Publié dans Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations , Lecture Notes , Springer , n°459 , 120-223.

[16] Nirenberg L. - On a problem of Hans Lewy . Uspeki Mat. Nauk. 292(176) (1974) 241-251.
(Voir aussi : Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations , Lecture Notes , Springer , n° 459 , 224-234)

[17] Sjöstrand J. - Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics . Arkiv för Mat. 12 (1974) 85-130.

L. Boutet de Monvel
Université de Grenoble

J. Sjöstrand
Purdue University