Journées Équations aux dérivées partielles

Guy Métivier

Formule asymptotique avec estimation du reste pour les valeurs propres de problèmes elliptiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1974), p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1974____A6_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FORMULE ASYMPTOTIQUE AVEC ESTIMATION DU RESTE POUR LES VALEURS PROPRES DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

par

G. METIVIER

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathcal{A}(x,D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre $2k$, uniformément elliptique sur Ω et formellement autoadjoint dans $L^2(\Omega)$. Notons $A'(x,\xi)$ la partie principale de $\mathcal{A}$. Soit $(A,D(A))$ une réalisation de $\mathcal{A}$ positive (ou semi-bornée) autoadjointe dans $L^2(\Omega)$ et à résolvante compacte. Sous ces hypothèses le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres réelles tendant vers $+\infty$; notons $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures à λ. On sait alors que sous certaines hypothèses de régularité, le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda)$ est donnée par ([2] [7]) :

(1.1) $$N(\lambda) \sim \mu(\Omega) \cdot \lambda^{m/2k}$$

avec $\mu(\Omega) = \int_\Omega \mu'(x)\, dx$ et $\mu'(x) = (2\Pi)^{-m} \cdot \int_{A'(x,\xi)<1} d\xi$.

On se propose ici d'établir des majorations de la fonction $R(\lambda) = N(\lambda) - \mu(\Omega) \cdot \lambda^{m/2k}$.

Le problème a déjà été abordé par Hörmander ([8]) qui a prouvé que si Ω est une variété compacte sans bord et si $\mathcal{A}$ est à coefficients C^∞, on a :

$$R(\lambda) = O(\lambda^{(m-1)/2k}).$$

En fait, Hörmander a établi un résultat beaucoup plus général concernant la fonction spectrale $e(\lambda,x,y)$ d'un opérateur elliptique positif et autoadjoint :

$$e(\lambda,x,x) = \mu'(x) \cdot \lambda^{m/2k} + O(\lambda^{(m-1)/2k})$$

la majoration en O étant uniforme sur tout compact inclus dans Ω.

Pour les problèmes aux limites, Agmon [1] a démontré sous certaines hypothèses de régularité, que

$$R(\lambda) = O(\lambda^{(m-\sigma)/2k})$$

pour tout $\sigma < \frac{1}{2}$ en général et pour tout $\sigma < 1$ si la partie principale A' est à coefficients constants. Citons aussi le résultat de Courant-Hilbert [4] relatif au Laplacien :

$$R(\lambda) = O(\lambda^{(m-1)/2} \operatorname{Log} \lambda).$$

Ce travail est consacré à la démonstration des estimations suivantes, valables sous des hypothèses de régularité assez faibles :

$$R(\lambda) = O(\lambda^{(m-\frac{1}{2})/2k}) \tag{1.2}$$

en général et

$$R(\lambda) = O(\lambda^{(m-1)/2k} \, . \operatorname{Log} \lambda)$$

si la partie principale de l'opérateur est à coefficients constants.

On ne considérera que des opérateurs autoadjoints dans $L^2(\Omega)$, mais (1-2) est encore vrai si l'opérateur est autoadjoint dans un espace avec poids $L^2_\rho(\Omega)$: $L^2_\rho(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \ / \ \sqrt{\rho}.u \in L^2(\Omega)\}$, pourvu que le poids ρ soit assez régulier (par exemple si ρ et $1/\rho$ sont dans $C^\infty(\overline{\Omega})$).

D'autre part, on supposera que les opérateurs proviennent de problèmes variationnels, cela permet de définir des problèmes aux limites si l'ouvert Ω est irrégulier, et ne constitue pas en fait une restriction puisque si l'opérateur (A,D(A)) est donné, on se ramène à un problème variationnel en considérant l'opérateur A^2.

2. Le théorème

Nous allons ici préciser les hypothèses et énoncer le résultat annoncé dans l'introduction.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$. On note $H^k(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel d'ordre k sur Ω :

$$H^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ / \ \forall \alpha, \ |\alpha| \leq k \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ évidente. $H_o^k(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$ et enfin on note pour u dans $H^k(\Omega)$ et pour $j = 0,\dots,k$:

$$|u|_{j,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{1/2}$$

Soit V un sous espace fermé de $H^k(\Omega)$ contenant $H_o^k(\Omega)$. Soit a une forme intégrodifférentielle :

$$\text{(2.1)} \qquad a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq k}} a_{\alpha\beta}(x).D^\alpha u(x) \ \overline{D^\beta v(x)}.dx$$

continue, hermitienne et coercitive sur V, et on suppose que :

(2.2) $\quad \forall\alpha, \forall\beta \ , \quad a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} \in L^\infty(\Omega)$

(2.3) $\quad \forall\alpha, \forall\beta \ , \quad |\alpha|=|\beta|=k \ , \quad a_{\alpha\beta} \in W^{1,\infty}(\Omega)$

(2.4) $\quad \exists \ c_o > 0 \ , \quad \forall \ u \in V \qquad c_o \|u\|^2_{k,\Omega} \leq a(u,u)$

On note $\rho(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x).\xi^{\alpha+\beta}$, de sorte que :

(2.4') $\quad \exists \ c'_o > 0, \quad \forall \ x \in \Omega \ , \quad \forall \ \xi \in \mathbb{R}^m \ , \quad c'_o|\xi|^{2k} \leq \rho(x,\xi).$

On note enfin μ_a la mesure de densité $\mu'_a(x)$ donnée par :

$$\mu'_a(x) = (2\Pi)^{-m} \int_{\rho(x,\xi) < 1} d\xi.$$

Explicitons maintenant les hypothèses de régularité que l'on fera sur Ω et V. Pour cela, on a besoin de la notation suivante :

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\tilde{\omega}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon\}$ et $\omega_\varepsilon = \tilde{\omega}_\varepsilon \cap \Omega$

On fera l'une des hypothèses suivantes :

(H.1) $V = H^k_o(\Omega)$ et $\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}.\mathrm{mes}\ \omega_\varepsilon < +\infty$

(H.2) Il existe un prolongement continu de V dans $H^k(\mathbb{R}^m)$ et

$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}.\ \mathrm{mes}\ \tilde{\omega}_\varepsilon < +\infty$

(H.3) Ω possède la propriété du cône, ie. pour tout x de Ω il existe un cône de sommet x de hauteur fixée et d'angle au sommet fixé, inclus dans Ω.

(H.4) Ω possède la propriété géométrique de [6] et $\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}.\mathrm{mes}\ \tilde{\omega}_\varepsilon < +\infty$.

L'hypothèse (H.1) concerne les problèmes de Dirichlet, et les autres hypothèses les problèmes aux limites généraux. Les hypothèses portant sur mes ω_ε ou mes $\tilde{\omega}_\varepsilon$ traduisent le fait que $\partial\Omega$ est de mesure (m-1) dimensionnelle finie. Notons que la propriété du cone implique que mes $\tilde{\omega}_\varepsilon \leqslant C^{te}\,\varepsilon$ pour ε assez petit. On rappelle que la propriété géométrique de [6] est satisfaite pour les ouverts qui peuvent localement se représenter sous la forme :

$$\Omega = \{x = (x_1,x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \ / \ x_1 \in]0,h[\ ,\ \ |x'| < \varphi(x_1)\}$$

φ étant une fonction croissante de classe C^1, et ces mêmes ouverts satisfont l'hypothèse (H.4).

Nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème : *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^m$, *soit* V *un sous espace fermé de* $H^k(\Omega)$ *contenant* $H^k_o(\Omega)$. *On suppose que l'une des hypothèses* (H1) *à* (H4) *est satisfaite. Soit* a *une forme différentielle* (2.1) *vérifiant* (2.2) *à* (2.4). *Soit alors* (A,D(A)) *l'opérateur positif autoadjoint associé à* a.
Le spectre de A *est constitué d'une suite de valeurs propres* λ_j *et :*

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1 = \mu_a(\Omega) \, . \, \lambda^{m/2k} + O(\lambda^{(m - \frac{1}{2})/2k})$$

en général et :

$$N(\lambda) = \mu_a(\Omega) \, . \, \lambda^{m/2k} + O(\lambda^{(m-1)/2k} \operatorname{Log} \lambda)$$

si les coefficients $a_{\alpha\beta}$ *pour* $|\alpha| = |\beta| = k$ *sont constants sur chaque composante connexe de* Ω.

Pour démontrer ce théorème, on considerea des partitions de Ω en pavés J_ν et en un voisinage du bord ω. Sur chaque pavé, on étudie le problème de Dirichlet associé à a, et par figeage des coefficients on se ramène au cas d'un opérateur à coefficients constants ; dans ce cas, on étudie le problème de Dirichlet par comparaison avec le problème périodique (sur le tore). Ensuite, on utilisera un résultat de localisation permettant d'obtenir des estimations sur la fonction $N(\lambda)$ en regroupant les estimations obtenues sur chaque pavé, et des estimations sur ω.

3. Localisation

La localisation, ou la comparaison de deux problèmes aux limites, repose essentiellement sur la formule du mini-max, ([3], [4]). Si (V,H,a) est un problème variationnel abstrait, ie. V et H sont deux espaces de Hilbert, V s'injectant continuement avec image dense dans H, et a est une forme hermitienne continue et coercitive sur V, et si l'injection de V dans H est compacte, alors le spectre de l'opérateur (A,D(A)) positif autoadjoint dans H, défini par le lemme de Lax-Milgram, est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j tendant vers $+\infty$. De plus, il existe une base orthonormée de H constituée de vecteurs propres de A.

On a alors en notant $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1$:

(3.1) Si E est un espace vectoriel inclus dans V, tel que pour tout u de E on ait $a(u,u) \leqslant \lambda |u|^2_H$, alors :

$$\dim E \leqslant N(\lambda).$$

(3.2) Si E est un sous espace de V, tel que pour tout $u \neq 0$ de E on ait $a(u,u) > \lambda |u|^2_H$, alors :

$$\operatorname{codim}_V(E) \geqslant N(\lambda).$$

Cela conduit à poser la définition suivante :

Définition : *Si* V *est un espace de Hilbert, si* a *est une forme hermitienne et continue sur* V*, et si* p *est une semi-norme préhilbertienne sur* V*, on note pour* λ *réel* .

$$N(\lambda, V, a, p) = \sup_{E \in \mathcal{E}_\lambda} \dim E$$

où $\mathcal{E}_\lambda$ *désigne l'ensemble des sous espaces vectoriels de* V *inclus dans le cône* $\{u \in V \ / \ a(u,u) \leqslant \lambda(p(u))^2\}$.

Revenant au problème variationnel introduit plus haut, on voit que

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1 = N(\lambda, V, a, |.|_H).$$

En utilisant la décomposition d'un espace suivant une base de vecteurs propres, et en utilisant (3.1) et (3.2), on montre facilement :

Proposition 3.1 : *Soient* V *et* H *deux espaces de Hilbert,* V *s'injectant de manière compacte dans* H*. Soit* a *une forme hermitienne continue sur* V *et coercitive sur* V *par rapport à* H.

Soit V_o *un sous espace fermé de* V*, pour* λ *réel on pose :*

$$Z_\lambda = \{u \in V \ / \ \forall \ v \in V_o \quad a(u,v) - \lambda(u,v)_H = 0\}.$$

On a alors :

$$N(\lambda, V, a, |.|_H) = N(\lambda, V_o, a, |.|_H) + N(\lambda, Z \ , a, |.|_H) - \dim . V_o \cap Z_\lambda$$

Remarquons que si $V = V_0 \oplus V_1$, les espaces V_0 et V_1 étant orthogonaux pour a et pour $(,)_H$, alors la proposition redonne le résultat classique :

$$N(\lambda,V,a,|.|_H) = N(\lambda,V_0,a,|.|_H) + N(\lambda,V_1,a,|.|_H).$$

4. Etude de modèles

On étudie maintenant le cas des opérateurs à coefficients constants sur les pavés. Soit a une forme intégrodifférentielle homogène, à coefficients constants :

$$a(u,v) = \int \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta} \, . \, D^\alpha u(x) \, \overline{D^\beta v(x)} \, . \, dx$$

On suppose que :

(4.1) $\quad \forall(\alpha,\beta) \quad |\alpha|=|\beta|=k, \quad a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}}$

(4.2) $\quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^m \quad p(\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta} \, . \, \xi^{\alpha+\beta} \geqslant c_0 \ |\xi|^{2k}$

et on pose :

(4.3) $\quad M = \operatorname{Sup} \ |a_{\alpha\beta}|$

(4.4) μ_a est le mesure de densité constante $\mu_a' = (2\Pi)^{-m} \, . \int_{p(\xi)<1} d\xi$.

Soit $\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} (-1)^k \, a_{\alpha\beta} \, . \, D^{\alpha+\beta}$ l'opérateur associé à a.

Proposition 4.1 : *Il existe une constante* C *ne dépendant que de* c_0 *et* M*, telle que pour tout pavé* J *de* $\mathbb{R}^m$ *de côté* ρ *on ait : pour tous réels positifs* λ *et* μ*, on a en posant* $Z_\lambda = \{u \in H^k(J) \ / \ \mathcal{A}u = \lambda u\}$:

(i) $\quad N(\lambda, Z_\lambda, \|.\|_k^2, \ |\ |_0) \leqslant C \left[\rho^{m-1} . (\lambda+\mu)^{\frac{m-1}{2k}} + 1\right]$

(ii) $\quad \left|N(\lambda, H_0^k(J), a, |\ |_0) - \mu_a(J) . \lambda^{m/2k}\right| \leqslant C \left[\rho^{m-1} \quad \lambda^{\frac{m-1}{2k}} + 1\right]$

Par homogénéïté, il suffit de démontrer la proposition pour un pavé type. On supposera donc pour toute la suite du paragraphe que $J = (]0,2\pi[)^m$.

On introduit l'espace $H^k_\#(J)$, le sous espace de $H^k(J)$ des fonctions périodiques (isomorphe à l'espace H^k du tore) et les fonctions $\varphi_\nu(x)$ pour $\nu \in \mathbb{Z}^m$:

$$\varphi_\nu(x) = (2\pi)^{-m/2} \exp(i\nu.x).$$

Les φ_ν sont les fonctions propres de l'opérateur $A_\#$, réalisation de $\mathcal{A}$ de domaine $H^{2k}_\#(J)$, associe au problème variationnel $(H^k_\#(J), L^2(J), a)$. On a donc :

(4.5) $\quad N(\lambda, H^k_\#(J), a, |\ |_o) = \sum\limits_{p(\nu)\leq\lambda} 1 \quad$ et

(4.6) $\quad \left| N(\lambda, H^k_\#(J), a, |\ |_o) - \mu_a(J)\, \lambda^{m/2k} \right| \leq C \left[\lambda^{\frac{m-1}{2k}} + 1\right]$.

On voit alors, par la proposition 3.1 que l'estimation ii) résulte de (4.6) et de i).

L'idée de la démonstration de i), est que Z_λ est isomorphe à un espace de traces : formellement, en notant γ un opérateur de Z_λ dans un espace de traces X, on prolonge le relèvement R_λ de X dans Z_λ, d'un espace $\overline{X}$ dans $\overline{Z_\lambda}$ adhérence de Z_λ dans $L^2(J)$; pour cela, on transposera l'opérateur $A_\#$. On ramène alors l'estimation des n-diamètres de Z_λ dans $\overline{Z_\lambda}$, à celle des n-diamètres de X dans $\overline{X}$, la difficulté étant qu'on a besoin d'une majoration de la norme de R_λ uniforme en λ ; on tourne cette difficulté en travaillant à une codimension finie près dans X (ou Z_λ).

Les complications techniques viennent de la difficulté d'écrire une formule de Green sur le pavé, et de l'irrégularité des espaces de traces.

4.1. Formules de Green

Pour u et v dans $\mathcal{D}(\overline{J})$, on peut écrire par intégrations par parties successives :

(4.7) $$a(u,v)-(u,v) = \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \sum_{p=1}^{m} (T_p^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(J_p^1)} - (T_p^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(J_p^o)}$$

où J_p^1 [resp. J_p^o] désigne pour $p = 1,\ldots m$, la face du pavé J déterminée par l'équation $x_p = 2\Pi$ [resp. $x_p=0$], et où les T_p^α sont des opérateurs différentiels d'ordre inférieur à $2k-|\alpha|-1$. Il faut noter que dans (4.7), on ne peut pas ne faire intervenir que les dérivées normales de v, puisque les faces J_p^1 et J_p^o sont des variétés à bord. D'autre part, les T_p^α ne sont pas déterminés de manière unique, et certains peuvent être nuls ; on les déterminent en intégrant par parties successivement en $x_1, x_2, \ldots x_m$. Remarquons alors que les coefficients de T_p^α sont combinaisons linéaires des $a_{\alpha\beta}$, et on a :

(4.8) $$\|T_p^\alpha u\|_{H^{|\alpha|+\frac{1}{2}}(J)} \leqslant C \|u\|_{H^{2k}(J)}$$

où C ne dépend que de M.

Notons X, Y et $L^2(\partial J)$ les espaces :

$$X = \prod_{|\alpha|\leqslant k-1} \prod_{p=1}^{m} (H^{k-|\alpha|-\frac{1}{2}}(J_p^1) \times H^{k-|\alpha|-\frac{1}{2}}(J_p^o))$$

$$Y = \prod_{|\alpha|\leqslant k-1} \prod_{p=1}^{m} (H^{|\alpha|+\frac{1}{2}}(J_p^1) \times H^{|\alpha|+\frac{1}{2}}(J_p^o))$$

$$L^2(\partial J) = \prod_{|\alpha|\leqslant k-1} \prod_{p=1}^{m} (L^2(J_p^1) \times L^2(J_p^o)).$$

On définit les opérateurs $\tilde{\gamma}$ de $H^k(J)$ dans X, et $\tilde{\tau}$ de $H^{2k}(J)$ dans Y :

$$\tilde{\gamma}u = (D^\alpha u_{|J_p^1} , \; D^\alpha u_{|J_p^o})_{\substack{|\alpha|\leqslant k-1 \\ p=1,\ldots m}}$$

$$\tilde{\tau}u = (T_p^\alpha u_{|J_p^1} , \; -T_p^\alpha u_{|J_p^o})_{\substack{|\alpha|\leqslant k-1 \\ p=1,\ldots m}}$$

On déduit alors de (4.7) :

Lemme 4.1 : *Pour* u *dans* $H^{2k}(J)$ *et* v *dans* $H^k(J)$ *on a la formule de Green suivante :*

$$a(u,v)-(\mathcal{A} u,v) = (\tilde{\tau}u,\tilde{\gamma}v)_{L^2(\partial J)} .$$

On cherche maintenant à prolonger l'opérateur τ à l'espace

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{u \in H^k(J) \ / \ \mathcal{A} u \in L^2(J)\}.$$

Pour cela, on introduit l'espace X_o, espace quotient de $H^k(J)$ par $H^k_o(J)$ muni de la norme quotient, et l'opérateur γ de projection de $H^k(J)$ sur X_o. Remarquent que Ker $\tilde{\gamma} = H^k_o(J)$, on en déduit une injection continue de X_o dans X, permettant d'identifier X_o à l'image de $H^k(J)$ par $\tilde{\gamma}$, dans X. On en déduit de manière classique :

Lemme 4.2 : *Il existe un opérateur* τ *continu de* $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ *dans* X'_o *dual de* X_o *tel que :*

$$\forall u \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \ , \quad \forall v \in H^k(J) \ : \ a(u,v)-(\mathcal{A}u,v) = \langle\tau u,\gamma v\rangle_{X'_o \times X_o}$$

4.2. Deux lemmes

On utilisera l'espace Y' dual de Y :

$$Y' = \prod_{|\alpha|<k-1} \ \prod_{p=1}^{m} \left(\left[H^{|\alpha|+\frac{1}{2}}(J_p^1)\right]' \times \left[H^{|\alpha|+\frac{1}{2}}(J_p^o)\right]' \right.$$

et les injections : $Y \hookrightarrow L^2(\partial J) \hookrightarrow Y'$, $X \hookrightarrow L^2(\partial J) \hookrightarrow Y'$.

Il résulte des estimations de El Kolli [5] :

Lemme 4.3 : *Il existe une constante* K, *telle que pour tout réel* $\mu \geq 0$ *on a :*

$$N(\mu, X, \|\cdot\|^2_X, \| \ \|_{Y'}) \leq K \ . \ \mu^{\frac{m-1}{2k}}$$

D'autre part, on introduit pour δ et λ donnés les espaces :

- E_δ : espace engendré par les $\gamma\varphi_\nu$ pour les indices ν tels que $|\nu|^{2k} \leq \delta$

- F_δ espace engendré par les $\tilde{\tau}\varphi_\nu$ pour les indices ν tels que $|\nu|^{2k} \leqslant \delta$
- G_λ espace engendré par les φ_ν pour les indices ν tels que $p(\nu) = \lambda$; c'est l'espace propre de $A_\#$ pour la valeur propre λ.

On vérifie facilement :

Lemme 4.4 : *Il existe une constante numérique* K, *et une constante* C *ne dépendant que de* c_0 *et* M *telles que pour* $\lambda \geqslant 0$ *et* $\delta \geqslant 0$ *on ait :*

i) $\dim E_\delta \leqslant K(\delta^{(m-1)/2k} + 1)$

ii) $\dim F_\delta \leqslant K(\delta^{(m-1)/2k} + 1)$

iii) $\dim G_\lambda \leqslant C(\lambda^{(m-1)/2k} + 1)$.

4.3. Démonstration de la proposition 4.1

Soit $\lambda \geqslant 0$ et soit $\delta \geqslant \frac{2\lambda}{c_0}$ qu'on déterminera par la suite.

Il existe un espace H_δ de X dont la codimension dans X est $N(\lambda, X, \|\cdot\|_X, \|\ \|_{Y'})$ tel que :

$$\forall\ \zeta \in H_\delta\ ,\quad \delta\ \|\xi\|^2_{Y'} \leqslant \|\xi\|^2_X \tag{4.9}$$

Soit Z le sous espace de Z_λ des fonctions u vérifiant :

$$\begin{cases} -\ \forall\ \zeta \in E_\delta\ , & \langle \tau u, \xi\rangle_{X_0' \times X_0} = 0 \\ -\ \tilde{\gamma} u \in H_\delta \quad \text{et} & \forall\ \xi \in F_\delta \quad (\tilde{\gamma} u, \zeta)_{L^2(\partial J)} = 0 \\ -\ \forall\ \varphi \in G_\lambda\ , & (u, \varphi)_{L^2(J)} = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Il est clair que :

$$\operatorname{codim}_{Z_\lambda}(Z) \leqslant \dim E_\delta + \dim F_\delta + \dim G_\lambda + \operatorname{codim} H_\delta\ . \tag{4.11}$$

D'autre part, pour u dans Z_λ et v dans $H^{2k}(J)$, on a :

$$(u, (\mathcal{A} - \lambda)v)_{L^2(J)} = \langle \tau u, \gamma v\rangle_{X_0' \times X_0} - (\tilde{\gamma} u, \tilde{\tau} v)_{L^2(\partial J)}\ . \tag{4.12}$$

Donc, si u est dans Z, on a :

(4.13) $\quad (u,\varphi_\nu)_{L^2(J)} = 0$ pour tout ν tel que $p(\nu) = \lambda$ ou $p(\nu) \leqslant \delta c_o$

et en particulier $(u,\varphi_\nu) = 0$ si $p(\nu) \leqslant 2\lambda$.

Pour u dans Z, on pose

$$v = \sum_{p(\nu)\geqslant \delta c_o} \frac{(u,\varphi_\nu)}{p(\nu)-\lambda} \cdot \varphi_\nu$$

On a $v \in H^{2k}_{\#}(J)$ et $(A-\lambda)v = u$.

Par (4.13), on a :

$$\begin{cases} \|v\|^2_{2k} \leqslant C\,|u|^2_o \\ \|v\|^2_k \leqslant \frac{C}{\delta}\,|u|^2_o \end{cases}$$

et reportant dans (4.12) on obtient finalement :

(4.14) $$|u|^2_o \leqslant \frac{C}{\delta}\,\|u\|^2_k .$$

C ne dépendant que de c_o et M.

μ étant donné, on choisit $\delta = \operatorname{Sup}\,(\frac{\lambda}{2c_o}, C.\mu$, et on obtient la proposition en reportant dans (4.11) les estimations des lemmes 4.3 et 4.4.

5. Estimations sur le bord

On reprend les hypothèses et les notations du paragraphe 2 : Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$, et V un sous espace fermé de $H^k(\Omega)$ contenant $H^k_o(\Omega)$.

On utilise les hypothèses de régularité sous la forme suivante :

(H) Il existe des constantes L., ε_o et γ_o telles que : pour tout $\varepsilon < \varepsilon_o$ et pour tout $\lambda \geqslant \gamma_o \cdot \varepsilon^{-2k}$ on ait :

$$N(\lambda, V, \|\;\|^2_k, |\;|_{L^2(\omega_\varepsilon)}) \leqslant L.\varepsilon.\lambda^{m/2k}.$$

Proposition 5 : *Chacune des hypothèses (H.1), (H.2), (H.3) ou (H.4) implique (H).*

On ne démontrera pas complètement cette proposition. On va indiquer par exemple comment (H.2) implique (H).

Les autres implications se démontrent de manière semblable à partir d'estimations utilisées en [6], [9].

<u>(H.2) $\Longrightarrow$ (H)</u>. Etant donné $\delta > 0$, on considère les pavés J_ν $(\nu \in \mathbb{Z}^m)$ de côte δ :

$$J_\nu = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall\ p=1,\dots,m\ |x_p - \delta\nu_p| < \frac{\delta}{2}\} .$$

Soit A l'ensemble des indices ν tels que $J_\nu \cap \omega_\varepsilon \neq \phi$.

On a :

$$\text{Card } A.\delta^m = \text{mes } (\bigcup_{\nu \in A} J_\nu) \leq \text{mes } (\tilde{\omega}_{\varepsilon+\sqrt{m}\delta}). \tag{5.1}$$

u étant donné dans V, on approche $\tilde{u}$ prolongement de u, par un polynôme de degré inférieur à k-1, sur chaque pavé J_ν $(\nu \in A)$. Notant v_ν ce polynôme, on a d'après El Kolli [5] :

$$|\tilde{u}-v_\nu|^2_{L^2(J_\nu)} \leq \text{Cte}\ \ \delta^{2k}\ |\tilde{u}|^2_{k,J_\nu}$$

D'où l'on déduit :

$$|u-v|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq |\tilde{u}-v|^2_{o,UJ_\nu} \leq \text{Cte}\ \delta^{2k}\ |\tilde{u}|^2_{k,UJ_\nu}$$

et

$$|u-v|^2_{o,\omega_\varepsilon} \leq \text{Cte}\ \ \delta^{2k}\ \ \|u\|^2_V .$$

v étant dans un espace de dimension au plus $\binom{m+k-1}{m}$ card A, ce qui achève la démonstration.

6. Démonstration du théorème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$, soit V un sous espace fermé de $H^k(\Omega)$ contenant $H_o^k(\Omega)$; on suppose que l'hypothèse (H) est satisfaite. Soit a une forme (2.1) vérifiant (2.2), (2.3) et (2.4).

Dans une première étape, on va considérer des partitions de Ω pour obtenir des estimations de

$$N(\lambda,V,a,|\ |_o) - \mu_a(\Omega)\ .\ \lambda^{m/2k},$$

et ensuite on choisira les partitions de Ω de manière à optimiser les majorations.

6.1 Partitions de Ω.

On note $M = \operatorname{Sup}_{\alpha,\beta} \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$K = \operatorname*{Sup}_{|\alpha\ \beta|=k} \ \operatorname*{Sup}_{|\gamma|=1} \|D^\alpha\ a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

c_o sera la constante de (2.4), L,ε_o,γ_o les constantes de l'hypothèse (H).

Pour des raisons de clarté, on convient de noter C une constante générique ne dépendant que de c_o et M, et γ une constante numérique.

On note γ_1 le nombre d'indices α, tels que $|\alpha|=k$.

Soient J_ν ($\nu \in A$) des pavés de coté ρ_ν, inclus dans Ω et deux à deux disjoints. Posons $\Omega' = \bigcup_{\nu\in A} J_\nu$, et $\omega = \Omega\setminus\overline{\Omega}'$, de sorte que $\Omega = \Omega'\ \nu\omega\ \rho\rho$

Soit ε tel que $\omega \subset \omega_\varepsilon$. Soient η et ρ définis par :

$$\eta = \operatorname*{Sup}_{\nu\in A} K.\ m\text{-}\rho_\nu \qquad \text{et} \qquad \rho = \operatorname*{Inf}_{\nu\in A}\ .\ \rho_\nu$$

On suppose que :

$$\text{(6.1)} \qquad \varepsilon < \varepsilon_o\ , \quad \eta < \eta_o = \frac{c_o}{8\gamma_1} \quad \text{et} \quad \rho < \rho_o = \frac{c_o}{4}$$

On se propose de démontrer les majorations :

Proposition 6.1 : *Il existe des constantes* C_1 *et* C, *telles que pour toute partition de* Ω *en pavés* J_ν *pour laquelle (6.1) a lieu, et pour tout réel* $\lambda \geqslant C_1\ (\varepsilon^{-2k} + \rho^{-2k})$, *on ait :*

$$|N(\lambda, V, a, |\ |_0^2) - \mu_a(\Omega).\lambda^{m/2k}| = R(\lambda) \leqslant C \Big[\sum_\nu \rho_\nu^{m-1}.\lambda^{(m-1)/2k} +$$
$$+ (L\varepsilon + \eta\, \mathrm{mes}\Omega)\ \lambda^{m/2k} + \mathrm{mes}\Omega\ \lambda^{(m-1)/2k} \Big].$$

Soit J_ν une partition de Ω vérifiant (6.1). On approche a par une forme $\tilde{a}$ dont les coefficients sont définis par :

$$(6.2)\quad \begin{cases} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}(x) \quad \text{si} \quad x \quad \omega \\ \tilde{a}_{\alpha\beta}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Omega' \quad \text{et} \quad |\alpha|+|\beta| < 2k \\ \tilde{a}_{\alpha\beta}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{mes}\ J_\nu} \displaystyle\int_{J_\nu} a_{\alpha\beta}(y)\,dy \quad \text{si} \quad x \in J_\nu \quad \text{et} \quad |\alpha|=|\beta|=k \end{cases}$$

$\tilde{a}$ approche a au sens suivant :

Lemme 6.1 : *Il existe une constante numérique* γ, *telle que pour tout* $\delta > 0$ *et pour tout* u *de* V, *on ait :*

$$|a(u,u) - \tilde{a}(u,u)| \leqslant (2\,\gamma_1\,\eta + \delta)\ |u|^2_{k,\Omega'} + t\delta\ \ |u|^2_{0,\Omega'}\ .$$

avec

$$t_\delta = M._\gamma\ \ (\delta^{1-2k} + \rho^{1-2k}).$$

En effet, on a :

$$|\tilde{a}(u,u) - a(u,u)| \leqslant 2\gamma_1\eta\ |u|^2_{k,\Omega'} + \sum_\nu \sum_{\substack{j\leqslant k \\ j'\leqslant k \\ j+j'<2k}} M._\gamma\ |u|_{j,J_\nu}.|u|_{j',J_\nu}\ .$$

et on obtient le lemme en utilisant les inégalités de convexité sur le pavé :

$$\forall\ u \in H^k(J\ )\ \forall\ \delta > 0 \quad |u|_{j,J_\nu}\ |u|_{j',J_\nu} \leqslant \delta\ |u|^2_{k,J_\nu} + t_\delta\ |u|^2_0$$

avec

$$t_\delta = \gamma.(\delta^{1-2k} + \rho_\nu^{1-2k}).$$

On en déduit grâce à (6.1) :

$$(6.3)\quad \begin{cases} \forall\, u \in V\,, & a(u,u) < 2\,[\tilde{a}(u,u) + t_o\, |u|^2_{o,\Omega}] \\ \text{avec} & t_o = C.\rho^{1-2k}. \end{cases}$$

Notons $V_o = H^k_o(\Omega') = \bigoplus_{\nu \in A} H^k_o(J_\nu)$ et

$Z_\lambda = \{u \in V \;/\; \tilde{a}(u,v) = \lambda(u,v) \quad \forall\, v \in V_o\}.$

On déduit de la proposition 4.2 :

$$(6.4)\quad \left| N(\lambda, V_o, \tilde{a}, |.|^2_o) - \mu_{\tilde{a}(\Omega')}.\lambda^{m/2k} \right| \leq C \left[\sum_{\nu \in A} (\lambda^{\frac{m-1}{2k}} \rho_\nu^{m-1} + 1) \right]$$

et de cette même proposition 4.2 et de l'hypothèse (H), compte tenu de (6.3) :

$$(6.5)\quad N(\lambda, Z_\lambda, \tilde{a}, |\;|^2_o) < C \left[\sum_{\nu \in A} ((\lambda + t_o)^{\frac{m-1}{2}} \rho_\nu^{m-1} + 1) + L.\varepsilon\, (\lambda + t_o)^{\frac{m}{2k}} \right].$$

pourvu que $\lambda \geqslant C_1\, \varepsilon^{-2k}$.

Remarquant de plus que :

$$\mu_{\tilde{a}}(\omega) \leqslant C.\, L\varepsilon$$

On en déduit :

<u>Lemme 6.2</u> : *Il existe des constantes* C *et* C_1, *telles que l'on ait :*

$$\left| N(\lambda, V, \tilde{a}, |.|^2_o) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega).\lambda^{m/2k} \right| \leqslant C \left[\sum_{\nu \in A} \rho_\nu^{m-1}.\lambda^{\frac{m-1}{2k}} + L.\varepsilon.\, \lambda^{m/2k} \right]$$

pourvu que $\lambda \geqslant C_1\, (\varepsilon^{-2k} + \rho^{-2k})$.

D'autre part, par application du lemme 6.1, on a les encadrements :

$$(6.6)\quad N(\lambda', V, \tilde{a}, |\;|_o) \leqslant N(\lambda, V, a, |\;|_o) \leqslant N(\lambda'', V, a, |\;|_o)$$

avec

$$\lambda' = \left(1 - \frac{2\gamma_1 \eta + \delta}{c_o}\right) \lambda - t$$

$$\lambda'' = \left(1 + \frac{2\gamma_1 \eta + \delta}{c_o}\right) (\lambda + t_\delta)$$

et $\quad t_\delta = c_2\, (\delta^{1-2k} + \rho^{1-2k})$.

Un calcul facile montre que si $\lambda \geqslant 4\, C_1\, (\varepsilon^{-2k} + \rho^{-2k})$, on peut choisir $\delta = C_3\, \lambda^{-1/2k}$ de sorte que :

$$(6.7)\quad \begin{aligned} \lambda^{m/2k} - \lambda'^{\,m/2k} &\leqslant C_4\, \eta . \lambda^{m/2k} + C_5\, \lambda^{\frac{m-1}{2k}} \quad \text{et} \\ \lambda''^{\,m/2k} - \lambda^{m/2k} &\leqslant C_4\, \eta\, \lambda^{m/2k} + C_5\, \lambda^{\frac{m-1}{2k}} \end{aligned}$$

avec de plus $\lambda' \geqslant \frac{\lambda}{4}$ et $\lambda'' \leqslant 2\lambda$.

Il ne reste plus alors qu'à remarquer que

$$|\mu_a(\Omega) - \mu_{\tilde{a}}(\Omega)| \leqslant C.\eta.\mathrm{mes}\Omega$$

pour obtenir les estimations de la proposition, en reportant dans (6.6) les inégalités du lemme 6.2, en tenant compte de (6.7).

6.2. Coefficients variables

On choisit les pavés de sorte que $\rho_\nu = \rho$:

Soient J_ν $(\nu \in \mathbb{Z}^m)$ les pavés :

$$J_\nu = \{x \in \mathbb{R}^m \ /\ \forall\ p=1,\dots m,\ \ |x_p - \rho\ \nu_p| < \tfrac{\rho}{2}\}$$

et soit A l'ensemble des indices ν tels que $J_\nu \subset \Omega$.

On a alors $\Omega \setminus \bigcup_{\nu \in A} \overline{J_\nu} = \omega \subset \omega_\varepsilon$ avec $\varepsilon = \sqrt{m}\,\rho$ et $\sum_{\nu \in A} \rho^m \leqslant \mathrm{mes}\,\Omega$.

On déduit alors de la proposition 6.1 que pour $\rho < \rho_0$ et pour $\lambda \geqslant C'_1\, \rho^{-2k}$, on a :

$$R(\lambda) \leqslant C \left[\frac{\mathrm{mes}}{\rho}\ \lambda^{(m-1)/2} + (L + K\ \mathrm{mes}\ \Omega)\ \rho .\ \lambda^{m/2k} \right] + O\ (\lambda^{(m-1)/2k}).$$

Donc si λ est donné assez grand, on peut choisir $\rho = \mathrm{Cte}.\lambda^{-1/4k}$ de sorte que $\rho < \rho_0$ et $\lambda \geqslant C'_1\, \rho^{-2k}$.

D'où l'on déduit :

$$\lambda \geqslant \lambda_0 \qquad R(\lambda) \leqslant C\ .\ \lambda^{(m-\frac{1}{2})/2k}$$

c'est-à-dire le théorème.

6.3. Coefficients constants

On procède comme en [4].

Posons $\rho_p = 2^{-p}$. On définit par récurrence les ouverts Ω'_p et Ω''_p : pour p = 0, soient J^o_ν les pavés de côte $1 = \rho_o$

$$J^o_\nu = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x_i - \nu_i| < \frac{1}{2} \qquad i = 1,\ldots m\}$$

et soit A_o l'ensemble des indices ν tels que $J^o_\nu \subset \Omega$.

On pose $\Omega'_o = \bigcup_{\nu \in A} J^o_\nu$ et $\Omega''_o = \Omega \setminus \overline{\Omega}'_o$.

Ensuite, si Ω'_j et Ω_j ont été définis pour $j \leq p$, on considère les pavés J^{p+1}_ν de côte ρ_{p+1} :

$$J^{p+1}_\nu = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x_i - \rho_{p+1}\, \nu_i| < \rho_{p+1/2} , \quad i = 1,\ldots m\}$$

et A_{p+1} est l'ensemble des indices ν tels que $J^{p+1}_\nu \subset \Omega''_p$.

On pose :

$$\Omega'_{p+1} = \Omega'_p \cup \Big(\bigcup_{\nu \in A_{p+1}} J^{p+1}_\nu \Big)$$

et

$$\Omega''_{p+1} = \Omega \setminus \overline{\Omega}'_{p+1}$$

(6.8) $\begin{cases} \text{Il est clair que } \Omega''_p \subset \omega_{\sqrt{m}.\rho_p} \\ \text{et que pour p assez grand :} \\ (\text{Card } A_p)\ \rho^m_p \leqslant L.\sqrt{m}.\rho_p \end{cases}$

λ étant donné assez grand, soit p_1 la partie entière du réel :

$$(\text{Log}\lambda - \text{Log } C'_1)\ (2k \text{ Log}2)^{-1}$$

où $C'_1 = C_1\ (1 + (\sqrt{m})^{-2k})$.

Pour λ assez grand, on a $\varepsilon = \sqrt{m}\ \rho_{p_1} < \varepsilon_o$ et

$$\rho_{p_1} \geqslant (C'_1)^{1/2k} . \lambda^{-1/2k} \geqslant \rho_{p+1} = \rho_{p_{1/2}}$$

d'où $\lambda \geqslant C_1\ (\varepsilon^{-2k} + \rho^{1-2k}_{p_1})$.

En considérant les pavés J_ν^j pour $j = 0,\dots p$ et $\nu \in A_j$, on déduit alors de la proposition 6.1 :

$$(6.9) \quad R(\lambda) \leqslant C \left[\sum_{j=o}^{p_1} \rho_j^{m-1} \text{ Card } A_j + L\rho_{p_1} \lambda^{m/2k} + \text{mes}\Omega \quad \lambda^{\frac{m-1}{2k}} \right]$$

Or on a, par (6.8) :

$$\sum_{j=o}^{p_1} \rho_j^{m-1} \text{ Card } A_j \leqslant \text{Cte} + L\sqrt{m}.p_1 .$$

Reportant dans (6.9), on obtient :

$$R(\lambda) \leqslant C \quad \lambda^{(m-1)/2k} \quad \left[L.\text{Log}\,\lambda \; + \text{Cte} \right]$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators
Arch. Rat. Meck. Anal. Vol. 28 (1968) pp. 165-183.

[2] BROWDER Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self adjoint et du type elliptique, à coefficients variables.
C.R. Ac. Sc. t. 236 (1953) p. 2140.

[3] BOUTET DE MONVEL - GRISVARD Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur
C.R. Ac. Sc. t. 272 n° 1 (1971) p. 23.

[4] COURANT - HILBERT Methods of mathematical physics.
New-York, Interscience.

[5] EL-KOLLI n-ième épaisseurs dans les espaces de Sobolev
C.R. Ac. Sc. t. 272 (1971) p. 537.

[6] FLECKINGER - METIVIER Théorie spectrales des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers
C.R. Ac. Sc. t. 276 (1973) p. 913.

[7] GARDING The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators
Math. Scand (1953) p. 237.

[8] HORMANDER The spectral function of on elliptic operator
Acta. Math. 121 (1968) pp. 193-218.

[9] METIVIER Théorie spectrale d'opérateurs elliptiques sur des ouverts irréguliers.
Séminaire Goulaouic Schwartz (1973) n° 21.