

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DOMINIQUE PRÉVOSTO

JACQUES ROLLAND

**Théorème d'indice et régularité pour une classe d'opérateurs
elliptiques et dégénérés**

Journées Équations aux dérivées partielles (1974), p. 1-36

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1974____A2_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEOREME D'INDICE ET REGULARITE POUR UNE
CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES

par

Dominique PREVOSTO et Jacques ROLLAND

Résumé. On se propose d'étudier des problèmes aux limites, dans un ouvert Ω régulier de \mathbb{R}^n , associés à des opérateurs L elliptiques dans Ω , dégénérés sur le bord Γ de Ω , de la forme :

$$Lu(x) = \sum_{h=0}^{m-r} P^{m-h}(x; D_x) \{ \varphi(x)^{q(m-r-h)} u(x) \},$$

où q est un réel > 1 , m et r sont deux entiers tels que $0 < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$, $P^{m-h}(x; D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus $m-h$, $P^m(x; D_x)$ est un opérateur d'ordre m elliptique dans $\bar{\Omega}$ et φ une fonction régulière équivalente à la distance au bord Γ .

Pour tout entier $p \geq 0$, L est un opérateur linéaire continu de l'espace de Sobolev avec poids :

$$W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega) = \{ u \in H^{r+p}(\Omega) ; \varphi^{q(m-r)} u \in H^{m+p}(\Omega) \}$$

muni de la norme canonique, dans l'espace de Sobolev usuel $H^p(\Omega)$.

On fait une hypothèse "d'ellipticité générale" sur l'opérateur L , qui implique que $P^r(x; D_x)$ est elliptique sur Γ . On introduit alors μ opérateurs frontière $B_j(x; D_x)$ tel que $\gamma B = (\gamma B_j ; j=1, \dots, \mu)$ soit un opérateur linéaire continu de $W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega)$ dans $\prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

On montre que sous certaines hypothèses, le couple $(L ; \gamma B)$ est un opérateur à indice de $W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$,

l'indice étant indépendant de $p \in \mathbb{N}$.

Le théorème est montré pour $p=0$ dans $[\underline{1}, \bar{0}]$. A partir de l'estimation a priori L^2 , on obtient, par la méthode des quotients différentiels, la régularité tangentielle ; on est alors ramené, pour la régularité normale, à étudier la régularité d'un opérateur différentiel ordinaire sur un segment $[0, T[$.

TABLE DES MATIERES

- I. INTRODUCTION ET ENONCE DES RESULTATS.
- II. PRELIMINAIRES.
 - II.1. Quelques espaces de distributions.
 - II.2. Etude d'un opérateur différentiel ordinaire.
- III. THEOREME D'INDICE DANS Ω .
 - III.1. Estimations a priori dans \mathbb{R}_+^n .
 - III.2. Démonstration du théorème d'indice dans Ω .

I. INTRODUCTION ET ENONCE DES RESULTATS.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ , tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété à bord de classe C^∞ . On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) > 0\} ; \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) = 0\} ; \\ \forall x \in \Gamma, \text{grad } \varphi(x) \neq 0. \end{cases}$$

Soit $L \equiv L(x; D_x)$ l'opérateur défini sur Ω par :

$$Lu(x) \equiv L(x; D_x) u(x) \equiv \sum_{h=0}^{m-r} p^{m-h}(x; D_x) \{ \varphi(x)^{q(m-r-h)} u(x) \}, \text{ où}$$

(i) q est un réel > 1 , m et r sont deux entiers tels que $0 < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$;

(ii) pour tout $h=0, \dots, m-r$, $p^{m-h}(x; D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables sur $\bar{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à $m-h$:

$$p^{m-h}(x; D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m-h} p_\alpha^{m-h}(x) D_x^\alpha ;$$

Si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $p^{m-h}(x; D_x)$ est, par définition, l'opérateur nul.

(iii) $P^m(x; D_x)$ est un opérateur d'ordre m , elliptique dans $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire que, pour tout $x_0 \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$P_m^m(x_0; \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha^m(x_0) \xi^\alpha \neq 0.$$

Pour tout $h=0, \dots, m-r$, on note $P_{m-h}^{m-h}(x; D_x)$ la partie principale d'ordre $m-h$ de $P^{m-h}(x; D_x)$.

On introduit alors la condition "d'ellipticité générale" suivante :

(C) Pour tout $x_0 \in \Gamma$, tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$L_0(x_0; x, \xi) = \sum_{h=0}^{m-r} P_{m-h}^{m-h}(x_0; \xi) \varphi(x)^{q(m-r-h)} \neq 0.$$

Cette condition implique que l'opérateur $P^r(x; D_x)$ est elliptique sur Γ , c'est-à-dire que, pour tout $x_0 \in \Gamma$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$P_r^r(x_0; \xi) \neq 0.$$

Pour tout $x_0 \in \Gamma$, et pour tout couple de vecteurs (ξ, ξ') de \mathbb{R}^n linéairement indépendants, soit μ le nombre de racines τ de l'équation :

$$P_r^r(x_0; \xi + \tau \xi') = 0$$

telles que $\text{Im } \tau > 0$. On suppose que μ ne dépend pas de $x_0 \in \Gamma$, et de (ξ, ξ') pour $n=2$.

On définit alors μ opérateurs frontière, à coefficients $C^\infty(\bar{\Omega})$:

$$B_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D_x^\alpha, \quad j=1, \dots, \mu,$$

où, pour $j=1, \dots, \mu$, m_j est un entier inférieur ou égal à $r-1$.

On note $\gamma B = (\gamma B_j; j=1, \dots, \mu)$, où γ est l'opérateur restriction à Γ .

On suppose que le problème $(P^r, \gamma B)$ est régulier, c'est-à-dire que la condition suivante est vérifiée, (voir [8]) :

(C') Pour tout $x_0 \in \Gamma$ et pour tout vecteur ξ cotangent en x_0 à Γ , le problème aux

limites :

$$\begin{cases} P_r^r(x_0; \xi + \text{grad } \varphi(x) D_t) v(t) = 0 \\ B_j^0(x_0; \xi + \text{grad } \varphi(x) D_t) v|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution $v=0$ dans $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^{(*)}$, où $B_j^0(x; D_x)$ désigne la partie principale d'ordre m_j de $B_j(x; D_x)$.

(*) $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ désigne l'espace des restrictions à \mathbb{R}_+ des fonctions C^∞ sur \mathbb{R} à décroissance rapide en $t = \infty$.

Définition 1.1. Soient $s \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. On note $W_{q,s}^{\ell}(\Omega)$ l'espace des distributions $u \in H^{\ell-s}(\Omega)$ telles que $\varphi^{qs} u \in H^{\ell}(\Omega)$. On munit cet espace de la norme du graphe.

Le principal résultat de cet article est le suivant :

Théorème 1.1. Sous les hypothèses (C) et (C'), pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur $(L, \gamma B)$ est linéaire continu et à indice de $W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et son indice est indépendant de p .

Corollaire 1.1. Sous les hypothèses (C) et (C'), si $u \in W_{q,m-r}^m(\Omega)$ et si $(L, \gamma B) u \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \times \prod_{j=1}^{\mu} C^{\infty}(\Gamma)$, alors $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$.

Remarque 1.1. Si $P^r(x; D_x)$ est proprement elliptique, on peut prendre comme opérateurs frontière le système des conditions de Dirichlet

$$\gamma B_j = \gamma_j, \quad j=0, \dots, \mu-1,$$

où $\gamma_j = \frac{\partial^j}{\partial \nu^j}$, avec ν normale à Γ orientée vers l'intérieur de Ω .

Remarque 1.2. Le cas où $q < 1$ a été traité dans [2] ; et dans ce cas, la condition "d'ellipticité générale" (C) introduite ici doit être remplacée par la notion d'équation indicielle. Citons aussi [1] pour un cas particulier.

II. PRELIMINAIRES.

II.1. Quelques espaces de distributions.

II.1.1. Espaces de Sobolev avec poids $W_{q,s}^{\ell}(I)$.

Soient q un nombre réel ≥ 1 et s un entier ≥ 0 tel que $qs \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ et I un intervalle de \mathbb{R} . On définit les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W_{q,s}^{\ell}(I) = \{u \in H^{\ell-s}(I) ; t^{qs} u \in H^{\ell}(I)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert si on les munit de la norme du graphe.

Remarque 2.1. On a l'injection continue suivante :

$$W_{q,s}^{\ell}(I) \hookrightarrow W_{1,q_s}^{\ell}(I) = W_{q_s}^{\ell}(I),$$

où $W_{q_s}^{\ell}(I)$ est l'espace introduit dans [3]. Pour les propriétés des espaces $W_k^{\ell}(I)$, voir [3].

Proposition 2.1. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq s$ et $qk \in \mathbb{N}$, l'application :

$u \longmapsto t^{qk}u$ est linéaire et continue de $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R})$ (resp. $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R}_+)$) dans $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R})$ (resp. $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}_+)$).

Démonstration : Soit u appartenant à $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R})$. Désignons par \hat{u} la transformée de Fourier, sur \mathbb{R} , de u . On a :

$$(1+|\tau|)^{\ell-s} \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } (1+|\tau|)^{\ell} D_{\tau}^{q_s} \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Nous voulons démontrer que si $k=0, \dots, s$, avec $qk \in \mathbb{N}$, alors :

$$(1+|\tau|)^{\ell-s+k} D_{\tau}^{qk} \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Il suffit de démontrer cette propriété sur \mathbb{R}_+ . Soit $T > 0$. Sur $(0, T)$, on a : $\hat{u}(\tau) \in L^2(0, T)$ et $D_{\tau}^{q_s} \hat{u}(\tau) \in L^2(0, T)$; donc $\hat{u}(\tau) \in H^{q_s}(0, T)$; par conséquent $D_{\tau}^{qk} \hat{u}(\tau) \in H^{q(s-k)}(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T)$. D'où :

$$(1+|\tau|)^{\ell-s+k} D_{\tau}^{qk} \hat{u}(\tau) \in L^2(0, T).$$

Sur $(T, +\infty)$, on a :

$$\tau^{\ell-s} \hat{u}(\tau) \in L^2(T, +\infty) \text{ et } \tau^{\ell} D_{\tau}^{q_s} \hat{u}(\tau) \in L^2(T, +\infty).$$

On en déduit que, pour tout entier $j=0, \dots, q_s$, on a :

$$\tau^{\ell-s+\frac{j}{q}} D_{\tau}^j \hat{u}(\tau) \in L^2(T, +\infty).$$

En particulier, pour $k=0, \dots, s$ avec $qk \in \mathbb{N}$, on a :

$$\tau^{\ell-s+k} D_{\tau}^{qk} \hat{u}(\tau) \in L^2(T, +\infty).$$

En regroupant les résultats sur $(0, T)$ et sur $(T, +\infty)$, on obtient que

$(1+|\tau|)^{\ell-s+k} D_{\tau}^{qk} \hat{u}(\tau)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$, avec :

$$\|(1+|\tau|)^{\ell-s+k} D_{\tau}^{qk} \hat{u}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C \left\{ \|(1+|\tau|)^{\ell-s} \hat{u}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|(1+|\tau|)^{\ell} D_{\tau}^{q_s} \hat{u}(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \right\},$$

où C est une constante indépendante de u .

On procède de manière analogue sur \mathbb{R}_- . La proposition 2.1 est donc démontrée pour u appartenant à l'espace $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R})$.

Le résultat, pour u appartenant à l'espace $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}_+)$, résulte du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Il existe un opérateur de prolongement P linéaire continu de $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}_+)$ dans $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R})$.*

Démonstration : Pour u appartenant à $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}_+)$, on pose :

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t) , & \text{si } t \geq 0 \\ r \sum_{j=1}^r \alpha_j u(-jt) , & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

avec : $r = \max (qs-\ell, qs, \ell-s-1+qs)$

et où : $\sum_{j=1}^r \alpha_j (-j)^k = 1$, pour $k = \min (\ell-qs, -qs), \dots, \max (\ell-s-1, -1)$.

On peut trouver des α_j satisfaisant ces conditions puisqu'il s'agit d'un système carré de Vandermonde.

1er cas : $\ell \geq 0$ et $\ell-s > 0$; dans ce cas, $r = \ell - s - 1 + qs$ et k varie entre $-qs$ et $\ell-s-1$. On a donc :

$\sum_{j=1}^r \alpha_j (-j)^k = 1$ pour $k=0, \dots, \ell-s-1$; ce qui montre que P est linéaire continu de $H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell-s}(\mathbb{R})$.

De plus, on écrit : $t^{qs} Pu = Q(t^{qs}u)$,

où

$$Qv(t) = \begin{cases} v(t), & \text{si } t \geq 0 \\ r \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j}{(-j)^{qs}} v(t), & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Comme $\sum_{j=1}^r \alpha_j (-j)^k = 1$ pour $k=-qs, \dots, \ell-qs-1$, on a :

$$\sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j}{(-j)^{qs}} (-j)^{k'} = 1 \text{ pour } k' = 0, \dots, \ell-1 ;$$

ceci montre que Q est linéaire continu de $H^\ell(\mathbb{R}_+)$ dans $H^\ell(\mathbb{R})$. On a donc démontré que P est linéaire continu de $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}_+)$ dans $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R})$.

2ème cas : $\ell < 0$ et $\ell - s < 0$; dans ce cas, $r = qs - \ell$ et k varie entre $\ell - qs$ et -1 .

Pour montrer que P est linéaire et continu de $H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell-s}(\mathbb{R})$, on montre que tP est linéaire continu de $H^{s-\ell}(\mathbb{R})$ dans $H_0^{s-\ell}(\mathbb{R}_+)$. On a :

$$\langle {}^tP\phi, u \rangle_{H_0^{s-\ell}(\mathbb{R}_+) \times H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)} = \langle \phi, Pu \rangle_{H^{s-\ell}(\mathbb{R}) \times H^{\ell-s}(\mathbb{R})}.$$

D'où, par intégrations par parties :

$${}^tP\phi(t) = \phi(t) + \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j}{j} \phi\left(-\frac{t}{j}\right), \text{ pour } t > 0.$$

On a : $\sum_{j=1}^r \alpha_j (-j)^k = 1$ pour $k = \ell - s, \dots, -1$;

donc :

$$\sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j}{j} \left(-\frac{1}{j}\right)^{k'} = -1 \text{ pour } k' = 0, \dots, s - \ell - 1.$$

Ceci montre que les $s - \ell$ premières traces de ${}^tP\phi$ sont nulles. D'où la continuité de tP de $H^{s-\ell}(\mathbb{R})$ dans $H_0^{s-\ell}(\mathbb{R}_+)$.

Pour l'opérateur Q défini comme dans le 1er cas, on procède encore par dualité. On a :

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j (-j)^k = 1 \text{ pour } k = \ell - qs, \dots, -qs - 1 ;$$

donc

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j (-j)^{-qs} \frac{1}{j} \left(-\frac{1}{j}\right)^{k'} = -1 \text{ pour } k' = 0, \dots, -\ell - 1.$$

On en déduit la continuité de tQ de $H^{-\ell}(\mathbb{R})$ dans $H_0^{-\ell}(\mathbb{R}_+)$; d'où la continuité de Q de $H^\ell(\mathbb{R}_+)$ dans $H^\ell(\mathbb{R})$.

3ème cas : $\ell \geq 0$ et $\ell - s \leq 0$; dans ce cas $r = qs$ et k varie entre $-qs$ et -1 .

La continuité de P de $H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell-s}(\mathbb{R})$ se fait comme dans le 2ème cas, par dualité.

La continuité de Q de $H^{\ell}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^{\ell}(\mathbb{R})$ se fait comme dans le 1er cas.

Le lemme 2.1 est donc complètement démontré.

Par conséquent, la proposition 2.1 est démontrée pour u appartenant à $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R}_+)$.

Dans les lemmes qui suivent, m désigne un entier > 0 tel que qm appartienne à \mathbb{N} et p est un entier de \mathbb{Z} .

Lemme 2.2. Soit u appartenant à $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$. Alors, pour tout $j=0, \dots, m$ tel que : $qj \in \mathbb{N}$, on a : $t^{qj} u \in H^{p+j}(0,T)$.

Démonstration : Ceci résulte directement de la proposition 2.1.

Lemme 2.3. Pour tout entier $j=0, \dots, m$ tel que $qj \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $k=0, \dots, j$,

l'opérateur :

$$u \longmapsto t^{qj-k} D_t^{j-k} u$$

est linéaire et continu de $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$. De plus, si $k \geq 1$, cet opérateur est compact de $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

Démonstration : Soit u appartenant à $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$. Puisque u appartient à $H^p(0,T)$,

on a : $t^{qj-j} u \in H^p(0,T)$, avec :

$$\|t^{qj-j} u\|_{H^p(0,T)} \leq C \|u\|_{H^p(0,T)}, \text{ où } C \text{ ne dépend pas de } u.$$

On en déduit que :

$$\|t^{qj-j} u\|_{H^p(0,T)} \leq C \|u\|_{W_{q,m}^{m+p}(0,T)}.$$

La continuité de l'opérateur $u \longmapsto t^{qj-k} D_t^{j-k} u$ est donc montrée pour $k=j$.

Supposons que la continuité de cet opérateur ait été démontrée pour $k=h, \dots, j$

avec $h \geq 0$, et démontrons-la pour $k=h-1$, si $h-1 \geq 0$.

On a : $u \in H^p(0,T)$ et, d'après le lemme 2.2, $t^{qj} u \in H^{p+j}(0,T)$.

Donc, $u \in W_{q,j}^{p+j}(o,T)$. D'après la remarque 2.1, on en déduit que $u \in W_{qj}^{p+j}(o,T)$.

Par conséquent, (voir [3]) :

$$t^{qj-(h-1)} u \in H^{p+j-(h-1)}(o,T).$$

D'où :

$$D_t^{j-(h-1)} \{t^{qj-(h-1)} u\} \in H^p(o,T).$$

Or :

$$D_t^{j-(h-1)} \{t^{qj-(h-1)} u\} = t^{qj-(h-1)} D_t^{j-(h-1)} u + \sum_{\ell=1}^{j-(h-1)} c_{\ell} t^{qj-(h-1)-\ell} D_t^{j-(h-1)-\ell} u.$$

L'hypothèse de récurrence montre que pour tout $\ell=1, \dots, j-(h-1)$, on a :

$$t^{qj-(h-1)-\ell} D_t^{j-(h-1)-\ell} u \in H^p(o,T).$$

Par conséquent : $t^{qj-(h-1)} D_t^{j-(h-1)} u$ appartient à $H^p(o,T)$, avec :

$$\|t^{qj-(h-1)} D_t^{j-(h-1)} u\|_{H^p(o,T)} \leq C \|u\|_{W_{q,m}^{m+p}(o,T)}.$$

Ceci achève la démonstration de la continuité.

On montre maintenant la compacité de l'opérateur : $u \longmapsto t^{qj-k} D_t^{j-k} u$ pour $j=1, \dots, m$ et $k=1, \dots, j$, avec $qj \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite bornée dans $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$. On peut en extraire une sous-suite, notée encore $(u_n ; n \in \mathbb{N})$, qui converge faiblement vers u dans $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$. Par différence, on peut supposer que $u=0$.

Montrons que la suite $(t^{qj-k} D_t^{j-k} u_n ; n \in \mathbb{N})$ converge fortement vers 0 dans $H^p(o,T)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

On a : $u_n \in W_{q,m}^{m+p}(o,T)$. D'après la première partie de la démonstration, on en déduit que : $t^{qj-k} D_t^{j-k} u_n$ appartient à $H^p(o,T)$.

Par conséquent, $t^{qj-k+1} D_t^{j-k} u_n$ appartient à $H^p(o,T)$.

Or, puisque $k \geq 1$, $D_t \{t^{qj-k+1} D_t^{j-k} u_n\} = -i(qj-k+1) t^{qj-k} D_t^{j-k} u_n + t^{qj-(k-1)} D_t^{j-(k-1)} u_n$ appartient à $H^p(o,T)$.

Par conséquent : $t^{qj-k+1} D_t^{j-k} u_n \in H^{p+1}(o,T)$, avec :

$$\|t^{qj-k+1} D_t^{j-k} u_n\|_{H^{p+1}(o,T)} \leq C \|u_n\|_{W_{q,m}^{m+p}(o,T)}, \text{ où } C \text{ est une constante}$$

indépendante de $n \in \mathbb{N}$.

Or : $D_t^{j-k} u_n \in H^{p-j+k}(o,T)$, puisque $u_n \in H^p(o,T)$.

Donc : $D_t^{j-k} u_n \in W_{q,j-k+1}^{p+1}(o,T)$, car $H^{p-j+k}(o,T) \hookrightarrow H^{p-qj+k}(o,T)$.

On en déduit (voir : proposition 1.2 de [4]) que $t^{qj-k} D_t^{j-k} u_n \in H^p(o,T)$ et que, pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta > 0$ indépendante de $n \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{aligned} \|t^{qj-k} D_t^{j-k} u_n\|_{H^p(o,T)} &\leq \eta \|t^{qj-k+1} D_t^{j-k} u_n\|_{H^{p+1}(o,T)} + C_\eta \|D_t^{j-k} u_n\|_{H^{p-qj+k}(o,T)} \\ &\leq \eta C \|u_n\|_{W_{q,m}^{m+p}(o,T)} + C_\eta \|D_t^{j-k} u_n\|_{H^{p-qj+k}(o,T)}. \end{aligned}$$

Posons : $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{W_{q,m}^{m+p}(o,T)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On prend $\eta = \frac{\varepsilon}{2CM}$. Ensuite, comme l'injection $H^{p-j+k}(o,T) \hookrightarrow H^{p-qj+k}(o,T)$ est compacte, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\|D_t^{j-k} u_n\|_{H^{p-qj+k}(o,T)} \leq \frac{\varepsilon}{2Cn}.$$

Donc, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\|t^{qj-k} D_t^{j-k} u_n\|_{H^p(o,T)} \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite $(t^{qj-k} D_t^{j-k} u_n ; n \in \mathbb{N})$ converge fortement vers 0 dans $H^p(o,T)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Le lemme 2.3 est donc complètement démontré.

Lemme 2.4. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'opérateur D_t est linéaire continu et à indice de $H^{p+1}(o,T)$ sur $H^p(o,T)$, d'indice 1, et de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ sur $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$, d'indice 1.

Démonstration : La première partie du lemme est triviale.

Soit $u \in W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$. On a : $u \in H^{p+1}(o,T)$; donc $D_t u \in H^p(o,T)$, avec :

$$\|D_t u\|_{H^p(o,T)} \leq C \|u\|_{W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)}, \text{ où } C \text{ est une constante indépendante}$$

de u .

D'après la remarque 2.1, on sait que $u \in W_{qm}^{m+p+1}(o,T)$. Par conséquent, (voir [3]), $t^{qm-1} u \in H^{m+p}(o,T)$, avec :

$$\|t^{qm-1}u\|_{H^{m+p}(o,T)} \leq C \|u\|_{W_{qm}^{m+p+1}(o,T)} \leq C \|u\|_{W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)}.$$

Puisque $t^{qm}u \in H^{m+p+1}(o,T)$, on a : $D_t \{t^{qm}u\} \in H^{m+p}(o,T)$, avec :

$$\|D_t \{t^{qm}u\}\|_{H^{m+p}(o,T)} \leq C \|u\|_{W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)}.$$

Or : $D_t \{t^{qm}u\} = -iqm t^{qm-1}u + t^{qm} D_t u$. On en déduit que $t^{qm} D_t u$ appartient à $H^{m+p}(o,T)$, avec :

$$\|t^{qm} D_t u\|_{H^{m+p}(o,T)} \leq C \|u\|_{W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)}.$$

On a donc montré que $D_t u \in W_{q,m}^{m+p}(o,T)$, avec :

$$\|D_t u\|_{W_{q,m}^{m+p}(o,T)} \leq C \|u\|_{W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)}, \text{ où } C \text{ est une constante indépendante}$$

de u .

Montrons maintenant que D_t est surjectif de $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ sur $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$.

Soit donc $u \in W_{q,m}^{m+p}(o,T)$. Comme $u \in H^p(o,T)$, il existe $v \in H^{p+1}(o,T)$ tel que $D_t v = u$.

On a : $t^{qm} v \in H^{p+1}(o,T)$.

$$\begin{aligned} \text{Or : } D_t^{m+1} \{t^{qm}v\} &= c_{m+1} t^{qm-m-1} v + \sum_{k=0}^m c_k t^{qm-k} D_t^{m+1-k} v \\ &= c_{m+1} t^{qm-m-1} v + \sum_{k=0}^m c_k t^{qm-k} D_t^{m-k} u. \end{aligned}$$

Comme $u \in W_{q,m}^{m+p}(o,T)$, le lemme 2.3 permet de dire que, pour $k=0, \dots, m$, $t^{qm-k} D_t^{m-k} u \in H^p(o,T)$. De plus, puisque $v \in H^{p+1}(o,T)$, on a $t^{qm-m-1} v \in H^p(o,T)$, (car $qm-m-1 \in \mathbb{N}$). Donc : $D_t^{m+1} \{t^{qm}v\} \in H^p(o,T)$.

Et comme $t^{qm} v \in H^{p+1}(o,T)$, on en déduit que $t^{qm} v \in W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$. Par conséquent : $v \in W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$. La surjectivité de l'opérateur D_t est donc démontrée.

Enfin, il est clair que le noyau de l'opérateur D_t dans $W_{q,m}^{m+p+1}(o,T)$ est de dimension 1.

Le lemme 2.4 est donc complètement démontré.

Lemme 2.5. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et soit $b(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $b(0) = 0$. Alors, pour tout $j=0, \dots, m-1$ tel que $qj \in \mathbb{N}$, l'opérateur $b(t) t^{qj} D_t^j$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

Démonstration : pour $p=0$, le résultat est trivial.

Pour $p \geq 0$, la démonstration se fait par récurrence. Supposons donc que le lemme soit démontré pour $p \leq 0$ et montrons-le à l'ordre $p+1$.

Soit j un entier compris 0 et $m-1$, tel que $qj \in \mathbb{N}$. Pour montrer que l'opérateur $b(t) t^{qj} D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^{p+1}(0,T)$ il suffit de montrer que $b(t) t^{qj} D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$ et que $D_t \{b(t) t^{qj} D_t^j\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

Or, d'après le lemme 2.3, $t^{qj} D_t^j$ est continu de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^{p+1}(0,T)$. Comme l'injection $H^{p+1}(0,T) \hookrightarrow H^p(0,T)$ est compacte, on en déduit que l'opérateur $b(t) t^{qj} D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

$$\text{De plus : } D_t \{b(t) t^{qj} D_t^j\} = -i \left[b'(t) + qj \frac{b(t)}{t} \right] \{t^{qj} D_t^j\} + b(t) t^{qj} D_t^j \{D_t \cdot\} .$$

Comme $b(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que $b(0) = 0$, on déduit que $[b'(t) + qj \frac{b(t)}{t}] \in C^\infty(\mathbb{R})$; par conséquent : $[b'(t) + qj \frac{b(t)}{t}] \{t^{qj} D_t^j\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

Enfin, comme D_t est continu de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$ et que, par hypothèse de récurrence, $b(t) t^{qj} D_t^j$ est compact de $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$, on déduit que

$b(t) t^{qj} D_t^j \{D_t \cdot\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$. Par conséquent,

$D_t \{b(t) t^{qj} D_t^j\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$. On a donc montré que

$b(t) t^{qj} D_t^j$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $H^{p+1}(0,T)$. Le lemme est

donc démontré pour $p \geq 0$.

Pour $p \leq 0$, on procède encore par récurrence. Supposons que le lemme soit démontré pour $p \leq 0$ et montrons-le à l'ordre $p-1$.

Soit j un entier compris entre 0 et $m-1$. Comme toute partie bornée de $W_{q,m}^{m+p-1}(o,T)$ est l'image par l'opérateur D_t d'une partie bornée de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$, il suffit de démontrer que l'opérateur $b(t) t^{qj} D_t^j \{D_t.\}$ est compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$. Or, on a :

$$b(t) t^{qj} D_t^j \{D_t.\} = D_t \{b(t)t^{qj} D_t^j\} + i[b'(t) + qj \frac{b(t)}{t}] t^{qj} D_t^j .$$

L'opérateur $[b'(t) + qj \frac{b(t)}{t}] t^{qj} D_t^j$ est continu de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$; comme l'injection $H^p(o,T) \hookrightarrow H^{p-1}(o,T)$ est compacte, cet opérateur est compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$. De plus, par hypothèse de récurrence, $b(t) t^{qj} D_t^j$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$; donc $D_t \{b(t) t^{qj} D_t^j\}$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$. Par conséquent, $b(t) t^{qj} D_t^j \{D_t.\}$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o,T)$ dans $H^{p-1}(o,T)$. Ceci achève la démonstration du lemme pour $p \leq 0$.

Le lemme est donc complètement démontré.

II.1.2. Espaces de Sobolev avec poids $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}^n)$ et $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}_+^n)$.

Soient q un nombre réel ≥ 1 et s un entier ≥ 0 tel que $qs \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ et I un intervalle de \mathbb{R} . On définit les espaces de Sobolev avec poids suivants :

$$W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n) ; t^{qs} u \in H^\ell(\mathbb{R}^n)\}$$

$$W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}_+^n) ; t^{qs} u \in H^\ell(\mathbb{R}_+^n)\}$$

et

$$W_{q,s}^\ell(I ; L^2(\mathbb{R}^{n-1})) = \{u \in H^{\ell-s}(I ; L^2(\mathbb{R}^{n-1})) ; t^{qs} u \in H^\ell(I ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert si on les munit de la norme du graphe.

Remarque 2.2. On a l'injection continue suivante :

$$W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{1,qs}^\ell(\mathbb{R}^n) = W_{qs}^\ell(\mathbb{R}^n),$$

où $W_{qs}^\ell(\mathbb{R}^n)$ est l'espace introduit dans [2]. De même sur \mathbb{R}_+^n . Pour les propriétés de ces espaces, voir [2].

Proposition 2.2. Soient $\ell \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N}$ tel que $qs \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq s$ et $qk \in \mathbb{N}$, l'application : $u \mapsto t^{qk}u$ est linéaire et continue de $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}^n)$ (resp. $W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}_+^n)$) dans $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}_+^n)$).

Démonstration :

1er cas : $\ell-s \geq 0$. Soit $u \in W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}^n)$. On a, puisque ℓ et $\ell-s$ sont des entiers ≥ 0 : $u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $t^{qs}u \in H^\ell(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Par transformation de Fourier sur \mathbb{R} , on obtient, de la même façon que pour la proposition 2.1, que $t^{qk}u \in H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, pour $k=0, \dots, s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$.

Comme $\ell-s+k \geq 0$, on a : $t^{qk}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour montrer que $t^{qk}u$ appartient à $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^n)$, il suffit donc de montrer que $D_t^{\ell-s+k} \{t^{qk}u\}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que, pour $i=1, \dots, n-1$, $D_{x_i}^{\ell-s+k} \{t^{qk}u\}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous avons montré que $t^{qk}u \in H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Par conséquent : $D_t^{\ell-s+k} \{t^{qk}u\}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Par ailleurs, $u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n)$ et $t^{qs}u \in H^\ell(\mathbb{R}^n)$; donc $u \in L^2(\mathbb{R}; H^{\ell-s}(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $t^{qs}u \in L^2(\mathbb{R}; H^\ell(\mathbb{R}^{n-1}))$. Un théorème de dérivées intermédiaires, appliqué après transformation de Fourier sur \mathbb{R} , permet d'en déduire que, pour tout entier $k=0, \dots, s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$, on a : $t^{qk}u \in L^2(\mathbb{R}; H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^{n-1}))$. D'où, pour $i=1, \dots, n-1$: $D_{x_i}^{\ell-s+k} \{t^{qk}u\} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration de la proposition 2.2 est donc achevée sur \mathbb{R}^n lorsque $\ell-s \geq 0$.

2ème cas : $\ell-s < 0$. Soit $u \in W_{q,s}^\ell(\mathbb{R}^n)$. On définit une distribution v sur \mathbb{R}^n par : $v(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}} \hat{u}(\xi', \tau) \right\}(x)$, où $\hat{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier sur \mathbb{R}^n et \mathcal{F}^{-1} désigne l'inverse de la transformée de Fourier sur \mathbb{R}^n .

Comme $u \in H^{\ell-s}(\mathbb{R}^n)$ et $t^{qs}u \in H^\ell(\mathbb{R}^n)$, on a : $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $t^{qs}v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Donc, v appartient à $W_{q,s}^s(\mathbb{R}^n)$. Et, d'après le 1er cas, pour

tout entier $k=0, \dots, s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$, on a : $t^{qk} v \in H^k(\mathbb{R}^n)$. On a donc, pour tout $k=0, \dots, s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$, $v \in W_{q,k}^k(\mathbb{R}^n) \subset W_{qk}^k(\mathbb{R}^n)$. D'après [2], on en déduit que, pour tout $j=0, \dots, qk$, on a : $t^{qk-j} v \in H^{k-j}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, pour tout $k=0, \dots, s$ tel que $qk \in \mathbb{N}$ et tout $j=0, \dots, qk$, on a :

$$(*) \quad \sum_{p=0}^{qk-j} C_{k,j}^p (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-j}{2}} D_{\tau}^p \left\{ (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}} \right\} D_{\tau}^{qk-j-p} \hat{u}(\xi', \tau) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

On a : $D_{\tau}^p \left\{ (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}} \right\} = \sum_{r=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}^p C_{p,r} \tau^{2r-p} (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{\ell-s}{2} - r}$, où $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ désigne

le plus petit entier positif ou nul supérieur ou égal à $\frac{p}{2}$.

Pour $j=qk$, la formule (*) donne : $(1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-qk+\ell-s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour $j=qk-1$, on a :

$$\begin{aligned} |(1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-(qk-1)}{2}} D_{\tau} \left\{ (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{\ell-s}{2}} \right\} \hat{u}| &\leq C |\tau| (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-qk+1+\ell-s}{2} - 1} |\hat{u}| \\ &\leq C (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-qk+\ell-s}{2}} |\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Donc, $\tau (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-(qk-1)+\ell-s}{2} - 1} \hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Et, par différence, la formule (*) donne que $(1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-(qk-1)+\ell-s}{2}} D_{\tau} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit maintenant j un entier tel que $0 < j \leq qk-1$. Supposons, par récurrence que, pour $j'=j$ et $j'=j+1$, on ait, pour tout $p=0, \dots, qk-j'$ et tout $r = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \dots, p$:

$$\tau^{2r-p} (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-j'+\ell-s}{2} - r} D_{\tau}^{qk-j'-p} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Soit alors $p=1, \dots, qk-(j-1)$ et soit $r = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1, \dots, p$. On a :

$$\begin{aligned} &|\tau^{2r-p} (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-(j-1)+\ell-s}{2} - r} D_{\tau}^{qk-(j-1)-p} \hat{u}| \\ &\leq C |\tau|^{2(r-1)-(p-1)} (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-j+\ell-s}{2} - (r-1)} D_{\tau}^{qk-j-(p-1)} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence car $p-1$ est compris entre 0 et $qk-j$ et $r-1$ est compris entre $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ et $p-1$.

Pour $r = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, si p est impair, le calcul précédent est toujours valable

car $\left[\frac{p}{2}\right] - 1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$. Si p est pair, on a :

$$(1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-(j-1)+\ell-s-p}{2}} D_{\tau}^{qk-(j-1)-p} \hat{u} =$$

$$(1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-(j+1)+\ell-s-(p-2)}{2}} D_{\tau}^{qk-(j+1)-(p-2)} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

par hypothèse de récurrence puisque $0 \leq p-2 \leq qk-(j+1)$.

Et, par différence, la formule (*) montre que :

$$(1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-(j-1)+\ell-s}{2}} D_{\tau}^{qk-(j-1)} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

On a donc montré par récurrence que, pour tout $j=0, \dots, qk$, tout $p=0, \dots, qk-j$ et tout $r = \left[\frac{p}{2}\right], \dots, p$, on a :

$$\tau^{2r-p} (1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k-j+\ell-s}{2}-r} D_{\tau}^{qk-j-p} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, pour $j=0$ et $p=0$, il vient :

$$(1+|\xi'|^2 + \tau^2)^{\frac{k+\ell-s}{2}} D_{\tau}^{qk} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Ceci prouve que $t^{qk}u$ appartient à $H^{\ell-s+k}(\mathbb{R}^n)$. La proposition 2.2 est donc montrée sur \mathbb{R}^n , dans le 2ème cas.

Le résultat, lorsque u appartient à $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R}_+^n)$, découle du lemme suivant :

Lemme 2.6. *Il existe un opérateur de prolongement P linéaire et continu de $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration :

On pose :

$$Pu(x',t) = \begin{cases} u(x',t), & \text{si } t \geq 0 \\ r \sum_{j=1}^r \alpha_j u(x',-jt), & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

avec $r = \max(qs-\ell, qs, \ell-s-1+qs)$ et où $\sum_{j=1}^r \alpha_j (-j)^k = 1$

pour $k = \min(\ell-qs, -qs), \dots, \max(\ell-s-1, -1)$. On peut trouver des α_j satisfaisant ces conditions car il s'agit d'un système carré de Vandermonde.

On montre, de la même façon que pour le lemme 2.1, que P est un opérateur linéaire et continu de $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $W_{q,s}^{\ell}(\mathbb{R}_+^n)$.

Dans les deux lemmes suivants, m et r sont deux entiers tels que $0 < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.7. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $u \in W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$ tel que, pour tout $i=1, \dots, n-1$, on ait $D_{x_i} u \in W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$. Alors, pour tout $h=0, \dots, m-r$ tel que $q(m-r-h) \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha = (\alpha', \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m-h$ et $\alpha_n < m-h$, on a :

$$D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n), \text{ avec :}$$

$$\|D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\}\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_{x_i} u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \right\},$$

où C est une constante indépendante de u.

Démonstration : D'après la proposition 2.2, on a $t^{q(m-r-h)} u \in H^{m+p-h}(\mathbb{R}_+^n)$.

1er cas : $|\alpha| < m-h$. Alors, on a : $D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{m+p-h-|\alpha|}(\mathbb{R}_+^n)$.

Comme $m-h-|\alpha| \geq 1$, on a donc : $D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$, avec :

$$\|D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\}\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)}, \text{ où C est une}$$

constante indépendante de u.

2ème cas : $|\alpha| = m-h$. Comme $\alpha_n < m-h$, il existe $i=1, \dots, n-1$ tel que $\alpha_i \geq 1$. Alors :

$$D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\} = D_{x'}^{\beta'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} D_{x_i} u\},$$

avec :

$$\beta' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}).$$

Si l'on pose $\beta = (\beta', \alpha_n)$, on a : $|\beta| < m-h$. De plus : $D_{x_i} u \in W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$.

On applique le premier cas à $D_{x_i} u$. Par conséquent : $D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\} \in H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)$,

et :

$$\|D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} u\}\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|D_{x_i} u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)}, \text{ où C est une}$$

constante indépendante de u.

Le lemme 2.7 est donc démontré.

Lemme 2.8. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $u \in W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$. Si pour $i=1, \dots, n-1$, $D_{x_i} u \in W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$

et si $u \in W_{q,m-r}^{m+p+1}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, alors $u \in W_{q,m-r}^{m+p+1}(\mathbb{R}_+^n)$, avec :

$$\|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p+1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_{x_i} u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)} + \|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p+1}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \right\}$$

où C est une constante indépendante de u .

Démonstration : On a : $u \in H^{p+r}(\mathbb{R}_+^n)$; donc, pour $\ell=0, \dots, p+r$, on a :

$$u \in H^{p+r-\ell}(\mathbb{R}_+; H^\ell(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Puisque, pour $i=1, \dots, n-1$, $D_{x_i} u \in W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$, on a : $D_{x_i} u \in H^{p+r}(\mathbb{R}_+^n)$;

Donc, $D_{x_i} u \in H^{p+r-\ell}(\mathbb{R}_+; H^\ell(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour $\ell=0, \dots, p+r$. Par conséquent, pour tout

$\ell=0, \dots, p+r$, on a :

$$u \in H^{p+r-\ell}(\mathbb{R}_+; H^{\ell+1}(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Mais on a, de plus, par hypothèse : $u \in W_{q,m-r}^{m+p+1}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$; donc $u \in H^{r+p+1}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Par conséquent, pour tout $\ell=0, \dots, p+r+1$, on a :

$$u \in H^{p+r+1-\ell}(\mathbb{R}_+; H^\ell(\mathbb{R}^{n-1})). \text{ Donc, } u \in H^{p+r+1}(\mathbb{R}_+^n).$$

Pour montrer que $u \in W_{q,m-r}^{m+p+1}(\mathbb{R}_+^n)$, il reste à prouver que :

$$t^{q(m-r)} u \in H^{m+p+1}(\mathbb{R}_+^n).$$

Par hypothèse, $t^{q(m-r)} u \in H^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$; donc, pour tout $\ell=0, \dots, m+p$,

on a :

$$t^{q(m-r)} u \in H^{m+p-\ell}(\mathbb{R}_+; H^\ell(\mathbb{R}^{n-1})).$$

De même, $t^{q(m-r)} D_{x_i} u \in H^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$, pour $i=1, \dots, n-1$. Donc, pour tout $i=1, \dots, n-1$

et pour tout $\ell=0, \dots, m+p$, on a :

$$D_{x_i} \{t^{q(m-r)} u\} \in H^{m+p-\ell}(\mathbb{R}_+; H^\ell(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Par conséquent, pour tout $\ell=0, \dots, m+p$, on a :

$$t^{q(m-r)} u \in H^{m+p-\ell}(\mathbb{R}_+; H^{\ell+1}(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Comme $u \in W_{q,m-r}^{m+p+1}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$, on a : $t^{q(m-r)} u \in H^{m+p+1}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

On a donc : $t^{q(m-r)} u \in H^{m+p+1-\ell}(\mathbb{R}_+; H^\ell(\mathbb{R}^{n-1}))$, pour tout $\ell=0, \dots, m+p+1$.

Ceci implique que : $t^{q(m-r)} u \in H^{m+p+1}(\mathbb{R}_+^n)$.

Le lemme 2.8 est donc démontré.

II.2. Etude d'un opérateur différentiel ordinaire.

II.2.1. Notations et résultats.

Soit M l'opérateur différentiel défini sur \mathbb{R} par

$$M(t, D_t) u(t) = D_t^m \{t^{qm} u(t)\} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t) D_t^j \{t^{qj} u(t)\}$$

où

(i) q est un nombre réel > 1 , m un entier > 0 tel que $qm \in \mathbb{N}$;

(ii) pour $j=0 \dots m-1$, $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $a_j \equiv 0$ si $qj \notin \mathbb{N}$.

On considère l'hypothèse suivante :

(H) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_0(t, \tau) = \tau^m t^{qm} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(0) \tau^j t^{qj} \neq 0.$$

Cette condition (H) est équivalente à dire que les polynômes

$$P^+(\tau) = \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(0) \tau^j$$

et

$$P^-(\tau) = (-1)^{qm} \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(0) (-1)^{qj} \tau^j$$

n'ont pas de racine réelle. On notera m_+ (resp. m_-) le nombre de racines τ de $P^+(\tau) = 0$ (resp. $P^-(\tau) = 0$) telles que $\text{Im } \tau > 0$.

Théorème 2.1. Sous l'hypothèse (H), pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $T > 0$, $M(t, D_t)$ est un opérateur linéaire continu et à indice de $W_{q,m}^{m+p}(-T, T)$ sur $H^p(-T, T)$ d'indice indépendant de p et égal à $m - m_+ + m_-$.

Corollaire 2.1. Sous l'hypothèse (H), soit $p \in \mathbb{Z}$. Si u appartient à $W_{q,m}^{m+p}(-T,T)$ et si $M(t,D_t)u$ appartient à $H^{p+1}(-T,T)$, alors u appartient à $W_{q,m}^{m+p+1}(-T,T)$ et on a :

$$\|u\|_{W_{q,m}^{m+p+1}(-T,T)} \leq C \left\{ \|M(t,D_t)u\|_{H^{p+1}(-T,T)} + \|u\|_{W_{q,m}^{m+p}(-T,T)} \right\}$$

où C est une constante indépendante de u .

Corollaire 2.2. Sous l'hypothèse (H), si $u \in \mathcal{D}'(-T,T)$ et si $M(t,D_t)u \in C^\infty(-T,T)$, alors $u \in C^\infty(-T,T)$.

On retrouve ainsi un résultat qui découle du théorème 4.2 de [5] et du théorème 3 de [6].

Le théorème 2.1 se déduit d'une étude sur $(0,T)$.

Pour cela, on introduit l'hypothèse :

(H_+) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_0(t,\tau) \neq 0.$$

Ceci équivaut à dire que le polynôme $P^+(\tau)$ n'a pas de racine réelle.

Théorème 2.2. Sous l'hypothèse (H_+) , pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $T > 0$, $M(t,D_t)$ est un opérateur linéaire continu et à indice de $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$ sur $H^p(0,T)$, d'indice indépendant de p et égal à $m-m_+$.

Corollaire 2.3. Sous l'hypothèse (H_+) , soit $p \in \mathbb{Z}$ et soit $u \in W_{q,m}^{m+p}(0,T)$ tel que $M(t,D_t)u \in H^{p+1}(0,T)$; alors $u \in W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ et on a :

$$\|u\|_{W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)} \leq C \left\{ \|M(t,D_t)u\|_{H^{p+1}(0,T)} + \|u\|_{W_{q,m}^{m+p}(0,T)} \right\}$$

où C est une constante indépendante de u .

Corollaire 2.4. Sous l'hypothèse (H_+) , si $u \in \mathcal{D}'([0,T])^{(*)}$ et si $M(t,D_t)u \in C^\infty([0,T])$ alors $u \in C^\infty([0,T])$.

(*) $\mathcal{D}'([0,T])$ désigne l'espace des restrictions à $(0,T)$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

II.2.2. Démonstration du théorème 2.2 pour $M_0(t, D_t)$.

Proposition 2.3. *Sous l'hypothèse (H_+) , $M_0(t, D_t)$ est un opérateur linéaire continu à indice de $W_{q,m}^m(0, T)$ sur $L^2(0, T)$, d'indice $m-m_+$.*

Démonstration : Cette étude est analogue à celle faite dans [10]. On fait le changement de variable : $y = \frac{t^{-q+1}}{-q+1}$; et, dans l'équation : $t^{q/2} M_0(t, D_t) u(t) = t^{q/2} f(t)$ on fait le changement de fonctions $f_1(y) = t^{q/2} f(t)$, $w(y) = t^{q/2} u(t)$.

L'équation précédente devient :

$$P(y, D_y) w(y) = P_0(y, D_y) w(y) + P_1(y, D_y) w(y) = f_1(y)$$

où :

$$P_0(y, D_y) = D_y^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(0) D_y^j$$

et

$$P_1(y, D_y) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^j C_{jk} y^{-k} D_y^{j-k}.$$

On a :

$$u \in W_{q,m}^m(0, T) \iff w \in H^m(-\infty, y(T)) ;$$

$$f \in L^2(0, T) \iff f_1 \in L^2(-\infty, y(T)).$$

L'hypothèse (H_+) implique que $P_0(y, D_y)$ est linéaire continu et à indice de $H^m(-\infty, y(T))$ sur $L^2(-\infty, y(T))$, d'indice $m-m_+$.

Les coefficients de $P_1(y, D_y)$ tendent vers 0 quand y tend vers $-\infty$, et l'ordre de $P_1(y, D_y)$ est inférieur ou égal à $m-1$; on en déduit que $P_1(y, D_y)$ est compact de $H^m(-\infty, y(T))$ dans $L^2(-\infty, y(t))$; par conséquent, $P(y, D_y)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $H^m(-\infty, y(t))$ dans $L^2(-\infty, y(T))$.

Par un argument de perturbation, on obtient facilement la surjectivité de $P(y, D_y)$ de $H^m(-\infty, y(S))$ sur $L^2(-\infty, y(S))$, pour S assez petit tel que $0 < S \leq T$, car la norme de $P_1(y, D_y)$ dans $\mathcal{L}(H^m(-\infty, y(S)) ; L^2(-\infty, y(S)))$ tend vers 0 quand S tend vers 0.

En revenant à la variable t , on a donc démontré que $M_0(t, D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m}^m(o, T)$ dans $L^2(o, T)$ et qu'il existe S , avec $0 < S < T$, tel que $M_0(t, D_t)$ soit surjectif de $W_{q,m}^m(o, S)$ sur $L^2(o, S)$.

Démontrons maintenant la surjectivité de $M_0(t, D_t)$ sur (o, T) :

Soit $f \in L^2(o, T)$; il existe $u \in W_{q,m}^m(o, S)$ tel que $M_0(t, D_t) u = f$ sur (o, S) .

Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, égale à 1 sur $(0, S/2)$ et à 0 sur (S, T) , avec $0 \leq \varphi \leq 1$. On a :

$$M_0(t, D_t) (\varphi u) = f \text{ sur } (o, S/2)$$

et $M_0(t, D_t) (\varphi u) = g \text{ sur } (S/2, T)$ avec $g \in L^2(o, T)$.

Soit $v \in H^m(S/2, T)$ tel que :

$$M_0(t, D_t) v = f - g$$

et $D_t^j v(S/2) = 0$ pour $j = 0 \dots m-1$.

Si \tilde{v} désigne le prolongement par 0 de v sur $(0, S/2)$, on a :

$$\tilde{v} \in W_{q,m}^m(o, T)$$

$$M_0(t, D_t) \tilde{v} = f - g \text{ sur } (S/2, T)$$

et $M_0(t, D_t) \tilde{v} = 0 \text{ sur } (o, S/2)$.

Posons : $\mathcal{U} = \varphi u + \tilde{v}$; on a :

$$\mathcal{U} \in W_{q,m}^m(o, T)$$

et $M_0(t, D_t) \mathcal{U} = f \text{ sur } (o, T)$.

Ceci démontre la surjectivité de $M_0(t, D_t)$ sur (o, T) . La proposition

2.3 est donc démontrée.

Pour démontrer le théorème 2.2 pour $p \neq 0$, on utilise la méthode de [3].

On écrit :

$$M_0(t, D_t) = M_1(t, D_t) + M_2(t, D_t),$$

où :

$$M_1(t, D_t) = t^{qm} D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(o) t^{qj} D_t^j$$

$$\text{et } M_2(t, D_t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j a_{j,k} t^{qj-k} D_t^{j-k}$$

avec $a_{j,k} = 0$ si $qj \notin \mathbb{N}$.

Le lemme 2.3 nous dit que $M_2(t, D_t)$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $H^p(o, T)$, pour tout p dans \mathbb{Z} .

Démontrons que $M_1(t, D_t)$ est un opérateur à indice, d'indice $m - m_+$, de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $H^p(o, T)$, pour tout p dans \mathbb{Z} .

Pour $p=0$, ceci découle de la proposition 2.3 et du fait que $M_2(t, D_t)$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^m(o, T)$ dans $L^2(o, T)$.

Supposons le résultat démontré pour $p \geq 0$ et montrons-le à l'ordre $p+1$.

Pour tout $u \in W_{q,m}^{m+p+1}(o, T)$, on a :

$$D_t \{M_1(t, D_t)u\} = \{M_1(t, D_t) + M'(t, D_t)\} (D_t u)$$

où

$$M'(t, D_t) = i \left\{ qm t^{qm-1} D_t^{m-1} + \sum_{j=0}^{m-2} q(j+1) a_{j+1}(o) t^{q(j+1)-1} D_t^j \right\}.$$

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} W_{q,m}^{m+p}(o, T) & \xrightarrow{M_1 + M'} & H^p(o, T) \\ \uparrow D_t & & \uparrow D_t \\ W_{q,m}^{m+p+1}(o, T) & \xrightarrow{M_1} & H^{p+1}(o, T) \end{array}$$

est donc commutatif.

Par hypothèse de récurrence, $M_1(t, D_t)$ est un opérateur à indice, d'indice $m - m_+$, de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $H^p(o, T)$. D'après le lemme 2.3, $M'(t, D_t)$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $H^p(o, T)$.

Le lemme 2.4 et le fait que le diagramme soit commutatif permettent de conclure que $M_1(t, D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m}^{m+p+1}(o, T)$ dans $H^{p+1}(o, T)$.

Pour $p < o$, on utilise la même méthode : on suppose que le résultat est vrai pour $p+1$; et, comme ci-dessus, on le montre pour p .

La compacité de $M_2(t, D_t)$ de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $L^2(o, T)$ nous permet de conclure que $M_0(t, D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $H^p(o, T)$, pour tout p dans \mathbb{Z} .

Puisque l'indice est constant, la codimension de $M_0(t, D_t)$ ($W_{q,m}^{m+p}(o, T)$) dans $H^p(o, T)$ est constante. La surjectivité de $M_0(t, D_t)$ de $W_{q,m}^m(o, T)$ sur $L^2(o, T)$ entraîne la surjectivité de $M_0(t, D_t)$ de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ sur $H^p(o, T)$ pour tout p dans \mathbb{Z} .

Ceci achève la démonstration du théorème 2.2 pour $M_0(t, D_t)$.

II.2.3. Démonstration du théorème 2.2 pour $M(t, D_t)$.

$$\text{On a : } M(t, D_t) = M_0(t, D_t) + [M(t, D_t) - M_0(t, D_t)]$$

$$\text{où : } M(t, D_t) - M_0(t, D_t) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j(t) t^{qj} D_t^j$$

avec $b_j(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $b_j(o) = o$.

Le lemme 2.5 montre que $M(t, D_t) - M_0(t, D_t)$ est un opérateur compact de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $H^p(o, T)$.

D'après II.2.2, $M_0(t, D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ sur $H^p(o, T)$. Ceci entraîne que $M(t, D_t)$ est à indice, d'indice $m-m_+$, de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ dans $H^p(o, T)$.

Pour montrer la surjectivité de $M(t, D_t)$, on procède comme suit :

$M_0(t, D_t)$ admet un inverse à droite R de $L^2(o, T)$ dans $W_{q,m}^m(o, T)$; l'application $f \xrightarrow{\sim} R \tilde{f}$ (où \tilde{f} est le prolongement par 0 de f sur (S, T)) est un inverse à droite pour $M_0(t, D_t)$, de $L^2(o, S)$ dans $W_{q,m}^m(o, S)$ pour tout $S \in]o, T]$, de plus, sa norme est indépendante de S .

Par un argument de perturbation, on en déduit facilement qu'il existe S assez petit tel que $M(t, D_t)$ soit surjectif de $W_{q,m}^m(o, S)$ sur $L^2(o, S)$, car la norme de $[M(t, D_t) - M_0(t, D_t)]$ tend vers 0 lorsque S tend vers 0.

La méthode utilisée pour $M_0(t, D_t)$ permet d'obtenir la surjectivité de $M(t, D_t)$ de $W_{q,m}^m(o, T)$ sur $L^2(o, T)$.

Puisque $M(t, D_t)$ est à indice, d'indice indépendant de p , la codimension de $M(t, D_t)$ ($W_{q,m}^{m+p}(o, T)$) dans $H^p(o, T)$ est constante. Comme $M(t, D_t)$ est surjectif de $W_{q,m}^m(o, T)$ sur $L^2(o, T)$, on obtient que $M(t, D_t)$ est surjectif de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ sur $H^p(o, T)$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

II.2.4. Démonstration du théorème 2.1.

Proposition 2.4. *Sous l'hypothèse (H), $M(t, D_t)$ est un opérateur linéaire continu et à indice, d'indice m_- , de $W_{q,m}^{m+p}(-T, 0)$ sur $H^p(-T, 0)$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration : On fait le changement de variable $y = -t$. L'opérateur $M(t, D_t)$

devient :

$$N(y, D_y) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(y) (-1)^{qj+j} D_y^j (y^{qj} \cdot) + (-1)^{qm+m} D_y^m (y^{qm} \cdot).$$

Puisque $M(t, D_t)$ vérifie l'hypothèse (H), on a :

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, $N_0(y, \tau) \neq 0$ et le nombre de racines τ de $N_0(1, \tau) = 0$ telles que $\text{Im } \tau > 0$ est égal à $m - m_-$.

Le théorème 2.2 nous dit que $N(y, D_y)$ est à indice, d'indice $m - (m - m_-) = m_-$, de $W_{q,m}^{m+p}(o, T)$ sur $H^p(o, T)$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

En revenant à la variable t , on obtient que $M(t, D_t)$ est linéaire continu à indice, d'indice m_- , de $W_{q,m}^{m+p}(-T, 0)$ sur $H^p(-T, 0)$.

Pour démontrer le théorème 2.1, on utilise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 W_{q,m}^{m+p}(-T,0) \times W_{q,m}^{m+p}(0,T) & \xrightarrow{M \times M} & H^p(-T,0) \times H^p(0,T) \\
 \uparrow r & & \uparrow r \\
 W_{q,m}^{m+p}(-T,T) & \xrightarrow{M} & H^p(-T,T)
 \end{array}$$

où $r(u) = (u|_{(-T,0)}, u|_{(0,T)})$.

Le théorème 2.1 découle du lemme suivant :

Lemme 2.9. Soit $p \in \mathbf{Z}$; l'opérateur r est linéaire continu et à indice, d'indice $-p$, de $H^p(-T,T)$ dans $H^p(-T,0) \times H^p(0,T)$ et de $W_{q,m}^{m+p}(-T,T)$ dans $W_{q,m}^{m+p}(-T,0) \times W_{q,m}^{m+p}(0,T)$.

Démonstration : La première partie est triviale.

Pour démontrer la seconde partie, on utilise le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 W_{q,m}^{m+p}(-T,T) & \xrightarrow{r} & W_{q,m}^{m+p}(-T,0) \times W_{q,m}^{m+p}(0,T) \\
 \uparrow D_t & & \uparrow D_t \times D_t \\
 W_{q,m}^{m+p+1}(-T,T) & \xrightarrow{r} & W_{q,m}^{m+p+1}(-T,0) \times W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)
 \end{array}$$

L'opérateur D_t étant à indice, d'indice 1, de $W_{q,m}^{m+p+1}(-T,T)$ dans $W_{q,m}^{m+p}(-T,T)$, de $W_{q,m}^{m+p+1}(-T,0)$ dans $W_{q,m}^{m+p}(-T,0)$ et de $W_{q,m}^{m+p+1}(0,T)$ dans $W_{q,m}^{m+p}(0,T)$, le lemme 2.9 sera démontré si l'on montre que r est à indice, d'indice 0, de $W_{q,m}^m(-T,T)$ dans $W_{q,m}^m(-T,0) \times W_{q,m}^m(0,T)$.

Soit $(u_1, u_2) \in W_{q,m}^m(-T,0) \times W_{q,m}^m(0,T)$. On note u la distribution définie par $u|_{(-T,0)} = u_1$ et $u|_{(0,T)} = u_2$. On a : $u \in L^2(-T,T)$.

Pour montrer que $t^{qm} u \in H^m(-T,T)$, il suffit de démontrer que :

$$D_t^m (t^{qm} u) \in L^2(-T,T).$$

On a :
$$D_t^m (t^{qm} u) = \sum_{j=0}^m C_j t^{qm-j} D_t^{m-j} u \text{ et } :$$

$$D_t^{m-j} u - \widetilde{D_t^{m-j} u_1} - \widetilde{D_t^{m-j} u_2} = \sum_{i=1}^{m-j-1} a_i \delta^{(i)}, \text{ pour } j=0 \dots m,$$

car c'est une distribution à support réduit à $\{0\}$, qui appartient à $H^{j-m}(-T, T)$.

On a donc, pour $j=0, \dots, m$:

$$t^{qm-j} D_t^{m-j} u = t^{qm-j} \widetilde{D_t^{m-j} u_1} + t^{qm-j} \widetilde{D_t^{m-j} u_2}$$

d'où $D_t^m (t^{qm} u) \in L^2(-T, T)$, soit $t^{qm} u \in H^m(-T, T)$.

Ainsi, la surjectivité de r , de $W_{q,m}^m(-T, T)$ sur $W_{q,m}^m(-T, 0) \times W_{q,m}^m(0, T)$ est démontrée. L'injectivité de r est évidente ; le lemme 2.9 est donc démontré.

III. THEOREME D'INDICE DANS Ω .

III.1. Estimations a priori dans \mathbb{R}_+^n .

On considère l'opérateur $L = L(x, t; D_x)$ défini sur \mathbb{R}^n par :

$$Lu(x) = L(x, t; D_x) u(x) = \sum_{h=0}^{m-r} p^{m-h}(x; D_x) \{t^{q(m-r-h)} u(x)\},$$

où

- (i) q est un réel > 1 , m et r sont deux entiers tels que $0 < r \leq m$ et $q(m-r) \in \mathbb{N}$;
- (ii) pour tout $h=0, \dots, m-r$, $p^{m-h}(x; D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables et à dérivées bornées dans \mathbb{R}^n , d'ordre $m-h$ au plus :

$$p^{m-h}(x; D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m-h} p_\alpha^{m-h}(x) D_x^\alpha ;$$

Si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $p^{m-h}(x; D_x)$ est, par définition, l'opérateur nul.

- (iii) $p^m(x; D_x)$ est un opérateur d'ordre m , elliptique dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$p_m^m(x; \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha^m(x) \xi^\alpha \neq 0.$$

Pour tout $h=0, \dots, m-r$, on note $P_{m-h}^{m-h}(x; D_x)$ la partie principale d'ordre $m-h$ de $p^{m-h}(x; D_x)$.

On introduit alors la condition "d'ellipticité générale" suivante :

(C₁) Pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$L_0(x', 0; t; \xi) = \sum_{h=0}^{m-r} p_{m-h}^{m-h}(x', 0; \xi) t^{q(m-r-h)} \neq 0.$$

Cette condition implique en particulier que l'opérateur à coefficients constants $P^r(0; D_x)$ est elliptique, c'est-à-dire que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$P_r^r(0; \xi) \neq 0.$$

Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, soit μ le nombre de racines τ de l'équation :

$$P_r^r(0; \xi', \tau) = 0$$

telles que $\text{Im } \tau > 0$. Si $n=2$, on supposera que μ ne dépend pas de ξ' .

On définit alors μ opérateurs frontière, à coefficients $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$:

$$B_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D_x^\alpha, \quad j=1, \dots, \mu,$$

où, pour $j=1, \dots, \mu$, m_j est un entier inférieur ou égal à $r-1$.

On note $\gamma B = (\gamma B_j; j=1, \dots, \mu)$, où γ désigne la restriction à \mathbb{R}^{n-1} .

On suppose que le problème $(P^r, \gamma B)$ vérifie la condition de Sapiro-Lopatinskii :

(C₁') Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} P_r^r(0, \xi', D_t) v(t) = 0 \\ B_j^0(0; \xi', D_t) v|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution $v=0$ dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, où $B_j^0(x; D_x)$ désigne la partie principale d'ordre m_j de $B_j(x; D_x)$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(L, \gamma B)$ induit un opérateur linéaire continu de

$$W_{q, m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ dans } H^p(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1. On suppose que les conditions (C_1) et (C'_1) sont vérifiées. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors, il existe deux constantes $\varepsilon_p > 0$ et $C_p > 0$ telles que : si $u \in W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$, avec support de u contenu dans la boule de centre 0 de rayon ε_p et si

$$(L, \gamma B) u \in H^p(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}), \text{ alors :}$$

(i) u appartient à $W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)$;

$$(ii) \|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_p \left\{ \|Lu\|_{H^p(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $B(o, \varepsilon)$ la boule de centre 0 et de rayon ε .

On démontre d'abord l'estimation a priori (ii) dans le cas où $p=0$. Avec les hypothèses (C_1) et (C'_1) , on déduit du théorème 2.6 de [9] (voir aussi [10]) qu'il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ telles que, si $u \in W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$ et si $\text{supp } u \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \delta[$, on ait :

$$\|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \|L(o, T; D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j(o, D)u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_{q,m-r}^{m-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de L et des B_j impliquent que, pour tout $\eta > 0$, il existe $C_\eta > 0$ et $\rho > 0$ telles que, si $u \in W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$ et si $\text{supp } u \subset B(o, \rho)$, on ait :

$$\|L(o, t; D_x)u - L(x, t; D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \eta \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)}$$

et :

$$\|\gamma B_j(o, D)u - \gamma B_j(x, D)u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \eta \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} + C_\eta \|u\|_{W_{q,m-r}^{m-1}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Par conséquent, en choisissant η de façon que $(\mu+1)C_\eta = \frac{1}{2}$, on montre qu'il existe $\varepsilon_0 = \min(\delta, \rho)$ et $C_0 > 0$ telles que, si $u \in W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$ et si $\text{supp } u \subset B(o, \varepsilon_0)$, on ait :

$$\|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_0 \left\{ \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_{q,m-r}^{m-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

Pour montrer le théorème 3.1 pour $p \geq 1$, on procède par récurrence sur p .

Soit tout d'abord u appartenant à $W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$ tel que son support soit contenu dans $B(o,\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et tel que

$$(L, \gamma B) u \in H^1(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

On utilise la méthode des quotients différentiels. Pour h appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour tout $i=1, \dots, n-1$, on pose :

$$\rho_{ih} u(x) = \frac{1}{h} [u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x)].$$

Si h est assez petit, on a : $\text{supp } \rho_{ih} u \subset B(o, \varepsilon_0)$. De plus, $\rho_{ih} u$ appartient à $W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$. D'après le résultat pour $p=0$, on a donc :

$$\|\rho_{ih} u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_0 \left\{ \|L(\rho_{ih} u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j(\rho_{ih} u)\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\rho_{ih} u\|_{W_{q,m-r}^{m-1}(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

On écrit :

$$L(\rho_{ih} u) = \rho_{ih} Lu + [L, \rho_{ih}] u$$

et :

$$\gamma B_j(\rho_{ih} u) = \rho_{ih} \gamma B_j u + [\gamma B_j, \rho_{ih}] u.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients de L et des B_j , et le fait que $\text{supp } u \subset B(o, \varepsilon)$ impliquent qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de u et de h , telle que :

$$\|[L, \rho_{ih}] u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)}$$

et :

$$\|[\gamma B_j, \rho_{ih}] u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)}.$$

D'autre part, il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de u et de h (pourvu que h reste dans un borné fixe, par exemple $0 < |h| < 1$) telle que :

$$\|\rho_{ih} Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \beta \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}$$

et :

$$\|\rho_{ih} \gamma B_j u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \beta \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

En regroupant tous les résultats précédents, on déduit qu'il existe une constante $C'_0 > 0$, indépendante de u et de h assez petit, telle que :

$$\| \rho_{ih} u \|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \leq C'_0 \left\{ \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

Il en résulte que, pour $i=1, \dots, n-1$, $D_{x_i} u \in W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$, avec :

$$\| D_{x_i} u \|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \leq C'_0 \left\{ \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \right\}$$

D'après le lemme 2.8, pour montrer que $u \in W_{q,m-r}^{m+1}(\mathbb{R}_+^n)$, il reste à montrer que $u \in W_{q,m-r}^{m+1}((0, \varepsilon) ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

On pose :

$$M(x ; D_t) = \sum_{h=0}^{m-r} p_{(0,m-h)}^{m-h}(x) D_t^{m-r-h} \{t^{q(m-r-h)}.\}$$

D'après l'hypothèse (C_1) , pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $M(x', t ; D_t)$ vérifie la conditions (H_+) énoncée dans II.2.

De plus, on écrit :

$$Lu = D_t^r Mu + R(x, t ; D_x)u,$$

où $R(x, t ; D_x)$ est combinaison linéaire de termes de la forme :

$$a_{\alpha}(x) D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)}.\},$$

avec $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ tel que : $|\alpha| \leq m-h$ et $\alpha_n < m-h$.

D'après le lemme 2.7, on sait que $R(x, t ; D_x) u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$, avec :

$$\|R(x, t ; D_x)u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \|D_{x_i} u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

Par conséquent, $D_t^r Mu$ appartient à $H^1(\mathbb{R}_+^n)$, avec la majoration :

$$\|D_t^r Mu\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

On a, maintenant, pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$Mu \in H^r(\mathbb{R}_+) \text{ et } D_t^r Mu \in H^1(\mathbb{R}_+). \text{ Donc } Mu \in H^{r+1}(\mathbb{R}_+) \text{ et :}$$

$$\|Mu\|_{H^{r+1}(\mathbb{R}_+)} \leq C(x') \left\{ \|D_t^r Mu\|_{H^1(\mathbb{R}_+)} + \|Mu\|_{H^r(\mathbb{R}_+)} \right\}.$$

Comme, pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, M vérifie la condition (H_+) , on déduit du corollaire 2.3, que u appartient à $W_{q,m-r}^{m+1}(0,\varepsilon)$, avec :

$$\|u\|_{W_{q,m-r}^{m+1}(0,\varepsilon)} \leq C(x') \left\{ \|Mu\|_{H^{r+1}(0,\varepsilon)} + \|u\|_{W_{q,m-r}^m(0,\varepsilon)} \right\}.$$

$C(x')$ dépend continûment de x' . Comme $\text{supp } u \subset B(0,\varepsilon)$ dans \mathbb{R}^n , on peut donc majorer $C(x')$ par une constante C.

On intègre alors par rapport à $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$; il vient :

$$u \in W_{q,m-r}^{m+1}((0,\varepsilon) ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$$

avec :

$$\|u\|_{W_{q,m-r}^{m+1}((0,\varepsilon) ; L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq C \left\{ \|D_t^r Mu\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} + \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \right\}.$$

Et le lemme 2.8 permet de conclure que les propriétés (i) et (ii) du théorème 3.1 sont vraies pour $p=1$.

Pour $p > 1$, on raisonne par récurrence par une méthode analogue.

III.2. Démonstration du théorème d'indice (théorème 1.1).

On reprend les notations du paragraphe I.

Pour $p=0$, le théorème d'indice est démontré dans [10]. Pour $p \geq 1$, il résulte du résultat de régularité suivant :

Théorème 3.2. *On suppose que les conditions (C) et (C') sont satisfaites. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une constante $C_p > 0$ telle que : si u appartient à $W_{q,m-r}^m(\Omega)$ et si $(L, \gamma B)u$ appartient à $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m} j^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors :*

(i) u appartient à $W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega)$;

(ii)
$$\|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+p-m} j^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_{q,m-r}^{m+p-1}(\Omega)} \right\}.$$

Démonstration : Pour $p=0$, la propriété découle du théorème d'indice. Pour $p \geq 1$, on raisonne par récurrence.

Par "cartes locales" et "partition de l'unité", on se ramène au théorème 3.1 et aux estimations a priori pour les opérateurs elliptiques.

En effet, soit $(O_i)_{1 \leq i \leq N}$ un recouvrement fini ouvert de $\bar{\Omega}$ et soit $\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq N}$ une partition de l'unité C^∞ , subordonnée à ce recouvrement.

Soit $u \in W_{q,m-r}^m(\Omega)$ tel que $(L, \gamma B) u \in H^1(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Pour étudier $\theta_i u$, $i=1, \dots, N$, nous distinguons deux cas :

1er cas : i est tel que $O_i \cap \Omega = O_i$, c'est-à-dire $O_i \subset \Omega$.

On a : $\theta_i u \in W_{q,m-r}^m(\Omega)$ et $L(\theta_i u) \in H^1(\Omega)$. La régularité à l'intérieur pour les opérateurs elliptiques donne que $\theta_i u \in W_{q,m-r}^{m+1}(\Omega)$ et que l'on a :

$$\|\theta_i u\|_{W_{q,m-r}^{m+1}(\Omega)} \leq C \left\{ \|L(\theta_i u)\|_{H^1(\Omega)} + \|\theta_i u\|_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

D'où :

$$\|\theta_i u\|_{W_{q,m-r}^{m+1}(\Omega)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma B_j u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_{q,m-r}^m(\Omega)} \right\}.$$

2ème cas : i est tel que $O_i \cap \Omega \not\subset O_i$.

Soit ψ_i un difféomorphisme de O_i sur $B(0, \varepsilon_1)$, ε_1 étant la constante introduite au théorème 3.1. On a, puisque $u \in W_{q,m-r}^m(\Omega)$, $\theta_i u \circ \psi_i^{-1} \in W_{q,m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$ et $\text{supp}(\theta_i u \circ \psi_i^{-1}) \subset B(0, \varepsilon_1)$.

L'opérateur L se transforme en un opérateur \mathcal{L}_i et les B_j se transforment en des opérateurs $\mathcal{B}_{j,i}$.

Puisque ψ_i est un difféomorphisme, le problème $(\mathcal{L}_i, \gamma \mathcal{B}_{j,i})$ satisfait aux conditions (C_1) et (C'_1) .

Nous savons que $Lu \in H^1(\Omega)$ et que l'on a :

$$[L(\theta_i u)] \circ \psi_i^{-1} = \mathcal{L}_i (\theta_i u \circ \psi_i^{-1})$$

et $L(\theta_i u) = \theta_i Lu + [L, \theta_i] u$

$[L, \theta_i] u \in H^1(\Omega)$ car $u \in W_{q, m-r}^m(\Omega)$; ceci montre que

$[L(\theta_i u)] \circ \psi_i^{-1} \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_i(\theta_i u \circ \psi_i^{-1}) \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$.

Par un raisonnement du même type, on obtient que ;

$\gamma_{\mathcal{B}_{j,i}}(\theta_i u \circ \psi_i^{-1}) \in H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

La fonction $\theta_i u \circ \psi_i^{-1}$ appartient à $W_{q, m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)$, son support est contenu

dans : $B(0, \varepsilon_1)$ et $(\mathcal{L}_i, \gamma_{\mathcal{B}_{j,i}})(\theta_i u \circ \psi_i^{-1}) \in H^1(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Il résulte alors du théorème 3.1 que $\theta_i u \circ \psi_i^{-1}$ appartient à $W_{q, m-r}^{m+1}(\mathbb{R}_+^n)$

et que :

$$\|\theta_i u \circ \psi_i^{-1}\|_{W_{q, m-r}^{m+1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \left\{ \|\mathcal{L}_i(\theta_i u \circ \psi_i^{-1})\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma_{\mathcal{B}_{j,i}}(\theta_i u \circ \psi_i^{-1})\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\theta_i u \circ \psi_i^{-1}\|_{W_{q, m-r}^m(\mathbb{R}_+^n)} \right\},$$

d'où : $\theta_i u \in W_{q, m-r}^{m+1}(\Omega)$, avec :

$$\|\theta_i u\|_{W_{q, m-r}^{m+1}(\Omega)} \leq C \left\{ \|L(\theta_i u)\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma_{\mathcal{B}_j}(\theta_i u)\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_{q, m-r}^m(\Omega)} \right\}.$$

Cette étude de $\theta_i u$ par $i=1, \dots, N$ montre que :

(i) u appartient à $W_{q, m-r}^{m+1}(\Omega)$;

(ii) $\|u\|_{W_{q, m-r}^{m+1}(\Omega)} \leq C \left\{ \|Lu\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\mu} \|\gamma_{\mathcal{B}_j} u\|_{H^{r+1-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{W_{q, m-r}^m(\Omega)} \right\}$.

Pour $p > 1$, on raisonne par récurrence sur p et on utilise la même méthode que ci-dessus. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

Pour finir la démonstration du théorème 1.1, notons \mathcal{P}_p l'opérateur $(L, \gamma_{\mathcal{B}})$ considéré comme opérateur de $W_{q, m-r}^{m+p}(\Omega)$ dans $H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Il résulte du théorème 3.2 que le noyau de \mathcal{P}_p coïncide avec l'espace $\{u \in W_{q, m-r}^m(\Omega) ; (L, \gamma_{\mathcal{B}})u = 0\}$ et que l'image de \mathcal{P}_p , notée $\text{Im } \mathcal{P}_p$ est égale à $\text{Im } \mathcal{P}_0 \cap \{H^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{\mu} H^{r+p-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$.

L'injection de $W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega)$ dans $W_{q,m-r}^{m+p-1}(\Omega)$ étant compacte, on déduit des estimations a priori du théorème 3.2 (voir lemme 5.1, chap. II [8]) que le noyau de \mathcal{P}_p est de dimension finie et que $\text{Im } \mathcal{P}_p$ est fermée.

Donc, la codimension de $\text{Im } \mathcal{P}_p$ est égale à la codimension de $\text{Im } \mathcal{P}_0$. Comme \mathcal{P}_0 est un opérateur à indice, on en déduit que \mathcal{P}_p est aussi un opérateur à indice et que son indice est égal à celui de \mathcal{P}_0 .

Le théorème 1.1 est donc complètement démontré.

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses (C) et (C'), pour tout $p \in \mathbb{N}$, le noyau de l'opérateur \mathcal{P}_p dans $W_{q,m-r}^{m+p}(\Omega)$ est égal à l'espace $N = \{u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) ; \mathcal{P}_p u = 0\}$.*

Démonstration : Ceci résulte du théorème 1.1 et du fait que $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \bigcap_s H^s(\Omega)$.

Remarque : La méthode utilisée dans cet article est encore valable pour une classe plus générale d'opérateurs elliptiques dégénérés ; ceci sera détaillé dans un article ultérieur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : "Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". Arch. Rat. Méc. Anal. 34, n° 5, 1969, p. 361-379.
- [2] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, 1973, p. 55-140.
- [3] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". J. Math. pures et appl., t. 51, 1972, p. 429-463.
"Etude d'une classe de systèmes d'opérateurs elliptiques et dégénérés". Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, fasc. II (1973).
- [4] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés". A paraître dans Annali della Scuola Normale di Pisa.
- [5] L. HÖRMANDER : "Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations". Proc. Symp. Pure Math. 10 (Singular Integrals), 138-183.
- [6] Y. KANNAÏ : "Hypoelliptic ordinary differential operators". Israël J. of Math. 13 (1972), 106-134.
- [7] J.L. LIONS - E. MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes et applications". Vol. 1, Dunod, Paris (1968).
- [8] Ja B. LOPATINSKII : "A method of reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular equations". Ukrain. Mat. Ž. 5 (1953), 123-151 ; English Transl. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 89, (1970), 149-183.
- [9] D. PREVOSTO - J. ROLLAND : "Problèmes aux limites pour des opérateurs elliptiques et dégénérés". Publications des séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, fasc. II (1973).
- [10] M.I. VIŠIK - V.V. GRUŠIN : "Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain". Math. USSR Sbornik, Vol. 9, (1969), n° 4.