



Journées mathématiques X-UPS

Année 2025

Combinatoire et géométries exotiques

Matthieu PIQUEREZ

Algèbres et volumes des polytopes

Journées mathématiques X-UPS (2025), p. 45-103.

<https://doi.org/10.5802/xups.2025-02>

© Les auteurs, 2025.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

ALGÈBRES ET VOLUMES DES POLYTOPES

par

Matthieu Piquerez

Résumé. Les volumes des polytopes et de leurs faces sont riches en propriétés : invariance, convexité du volume, polynomialité et log-concavité du volume mixte, caractérisation d'un polytope en fonction du volume et de la direction de ses facettes, ou de ses arêtes, etc. Certaines de ces propriétés se comprennent mieux en introduisant un objet particulièrement élégant : l'algèbre des polytopes de McMullen. Pour pousser plus loin l'analyse, il faut étudier les propriétés dites kählériennes de cette algèbre. On peut les voir comme des propriétés de convexité algébriques. Cela nous permettra par exemple de retrouver des résultats importants comme les inégalités sur les volumes d'Alexandrov-Fenchel ou de Brunn-Minkowski. Ces propriétés kählériennes étaient initialement l'objet d'étude de la théorie de Hodge en géométrie complexe. Cette théorie est désormais appliquée dans de nombreuses autres branches des mathématiques, comme ici en combinatoire, mais aussi en algorithmique ou dans l'étude de géométries plus exotiques.

Table des matières

Introduction.....	46
1. Les polytopes et leur volume.....	53
1.1. Polytopes, polyèdres, faces.....	53
1.2. f -vecteur et g -théorème.....	54
1.3. Volume.....	56
1.4. Somme de Minkowski.....	57
1.5. Concavité du volume : l'inégalité de Brunn-Minkowski.....	58
1.6. Volume mixte et polynomialité.....	60
1.7. Inégalité d'Alexandrov-Fenchel.....	62
1.8. Problème de Minkowski.....	63
2. Algèbre des polytopes.....	65
2.1. Motivation : le troisième problème de Hilbert.....	65
2.2. Définition de l'algèbre des polytopes.....	67

2.3. Structure de l'algèbre des polytopes et applications	70
2.4. Logarithme d'un polytope.....	72
2.5. Degré et volume.....	78
2.6. Interprétation du volume mixte.....	80
3. Éventail dual et algèbre de Chow.....	80
3.1. Fonction support et éventail normal d'un polytope	81
3.2. Bijection entre fonctions nefes et polytopes.....	83
3.3. Polytopes virtuels, fonctions linéaires par cônes et éléments de poids 1 dans l'algèbre des polytopes.	84
3.4. Algèbre de Chow.....	86
3.5. Lien avec l'algèbre des polytopes.....	87
3.6. Algèbre de Chow d'un éventail simplicial.....	88
3.7. Éclatements et fusions.....	91
3.8. Propriétés kählériennes et conséquences.....	93
4. Poids de Minkowski.....	96
4.1. Définition.....	96
4.2. Liens avec l'algèbre des polytopes et l'algèbre de Chow.....	98
4.3. Inverse d'un polytope.....	100
Conclusion.....	101
Références.....	102

Introduction

Ce texte a pour objectif de présenter de jolis résultats et des techniques de preuves élégantes en théorie des polytopes. Les polytopes sont la généralisation des polygones et polyèdres convexes en dimensions supérieures. Malgré l'apparente diversité des résultats que je vais présenter en premier lieu, un fil conducteur apparaîtra bientôt en laissant évoquer l'existence d'une algèbre des polytopes. Ce texte présente trois points de vue sur cette algèbre riche en propriétés, chaque facette étant mieux adaptée à certaines applications.

Bien sûr, je n'ai pas pour ambition d'introduire rigoureusement et précisément les nombreux objets que je mentionnerai. J'espère simplement que les nombreuses figures et les entraînements pour se familiariser avec ces notions donneront un aperçu suffisant pour éveiller la curiosité et donner une intuition des phénomènes sous-jacents.

NB. En conséquence, il faut prendre le terme *preuve* avec des pin-cettes. De nombreux détails techniques, potentiellement cruciaux, ayant pu être omis. D'autre part, nous conseillons de faire, au moins en partie, les *entraînements*. Par contre, les *exercices* correspondent plutôt à des exercices plus avancés ou à des remarques dont l'énoncé est intéressant, mais dont les détails peuvent être admis, bien qu'ils soient théoriquement abordables lorsque les concepts sont bien assimilés.⁽¹⁾

Dans l'introduction, nous présenterons rapidement les différents résultats que nous aborderons avec une approche historique. Les objets principaux et les théorèmes seront formulés explicitement dans la première partie, et certains corollaires y seront démontrés. L'algèbre des polytopes selon McMullen et les résultats qui découlent de cette présentation fera l'objet de la seconde partie. Enfin, nous verrons les deux autres points de vue — l'algèbre de Chow et, plus succinctement, les poids de Minkowski — ainsi que les dernières preuves dans les parties 3 et 4. Concernant la bibliographie, je vais rester simple en citant plutôt des textes permettant de retrouver les références historiques et techniques. Pour les résultats classiques, Wikipédia sera bien plus fiable que moi-même, et pour le reste, je m'appuie essentiellement sur l'introduction de l'algèbre des polytopes par McMullen [8] et sur mes propres travaux en collaboration avec Amini, notamment [3], qui, dans la continuité de nombreux autres travaux, généralisent les deux dernières sections. Bonne lecture !

Découpage. Dès 1807, Wallace [23] montre que si l'on se donne un polygone et une paire de ciseaux, alors on peut couper le polygone en un nombre fini de morceaux et les recoller entre eux pour former n'importe quel polygone de même aire (voir figure 1). En 1900, ayant en tête que cela pourrait permettre de définir une notion d'aire ou de volume, Hilbert demande dans l'un de ses fameux 23 problèmes si ce résultat se généralise pour les polyèdres [21, 24]. La même année, Dehn répond par la négative en introduisant l'invariant de Dehn,

⁽¹⁾Un corrigé et un erratum pouvant évoluer dans le futur sont disponibles au lien suivant : http://matthieu.piquerez.fr/partage/Corrige_erratum_algebre_et_volumes_des_polytopes_xups_2025.html



FIGURE 1. Découpage d'un carré en un triangle équilatéral de même aire.

ce qui permet de montrer que le cube et le tétraèdre régulier de même volume ne peuvent pas être découpés l'un en l'autre (ils ne sont pas *équidécomposables*). D'autres généralisations arrivent bien plus tardivement, par exemple avec l'étude des valuations par Hadwiger, nous en reparlerons (voire l'introduction de [8] sur ce sujet).

Nombre de faces. Revenons en arrière. Dehn s'intéresse à un autre aspect des polytopes : le nombre de ses faces de différentes dimensions. Rappelons qu'un polytope est la généralisation en dimensions supérieures des polygones et des polyèdres convexes. Formellement, il s'agit simplement de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans \mathbb{R}^n .

Euler savait déjà en 1758 qu'en dimension 3 le nombre de faces plus le nombre de sommets d'un polyèdre vaut le nombre d'arêtes plus 2 [12, 14]. Plus généralement, la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un polytope, par définition $\sum_i (-1)^i f_i$ où f_i est le nombre de faces de dimension i (en prenant en compte le polytope lui-même comme une face), vaut toujours 1.

De manière générale, caractériser complètement les f -vecteurs des polytopes est un problème très difficile (des théorèmes récents vont dans ce sens). Mais pour certains polytopes, les polytopes *simpliciaux* et les polytopes *simples*, le problème est plus accessible. Un polytope est simplicial si toutes ses faces propres sont des simplexes ; les simplexes étant les polytopes les plus simples, généralisant les triangles et les tétraèdres en dimensions supérieures. Les polytopes simples sont duaux aux polytopes simpliciaux : tous les sommets sont adjacents à n arêtes, c'est le minimum possible, où n est la dimension

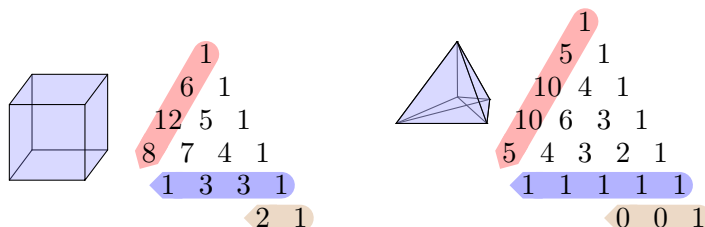


FIGURE 2. Deux polytopes simples (le cube et le simplexe de dimension 4) et leurs f (en rouge), h (en bleu) et g -vecteurs (en marron). En dehors du f -vecteur, chaque nombre est la différence des deux du dessus.

du polytope. En 1905, Dehn a trouvé une autre équation linéaire, en plus de la caractéristique d'Euler-Poincaré, vérifiée par les f -vecteurs (f_0, \dots, f_n) des polytopes simples (ou simpliciaux) de dimension 3 ou 4. Vingt ans plus tard, Sommerville la généralise en une famille de relations linéaires pour les polytopes simples de toute dimension [13]. Ces équations peuvent se formuler joliment en énonçant que le h -vecteur du polytope est symétrique. Ce h -vecteur s'obtient par la méthode indiquée en figure 2.

Ce n'est qu'en 1970 que McMullen énonce la g -conjecture censée proposer une caractérisation complète des f -vecteurs des polytopes simples [15]. La formulation initiale était plutôt compliquée (une série d'inégalités entre sommes de coefficients binomiaux), mais peut s'exprimer plus simplement en disant que le g -vecteur, cette fois-ci, correspond aux dimensions des gradués d'une algèbre polynomiale $G^\bullet = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]/I$ où I est un idéal engendré par des polynômes homogènes. Il faut alors que g_k soit la dimension de G^k , c'est-à-dire le sous-espace des polynômes de degré k .

Le fait que de tels g -vecteurs correspondent à des polytopes simples est démontré neuf ans plus tard par Billera et Lee, et l'autre sens est résolu par Stanley quasiment au même moment dans un article de deux pages. Stanley utilise la théorie des variétés toriques, qui forme un pont entre combinatoire des polytopes et géométrie algébrique, et explicite l'algèbre G^\bullet (dans le cas rationnel) comme étant un quotient de l'algèbre cohomologique de certaines variétés complexes projectives lisses.

Depuis, des preuves plus directes et plus élémentaires ont été apportées, par exemple par McMullen en 1993 [9]. Les méthodes combinatoires ainsi développées se sont révélées très utiles pour généraliser ce théorème. En 2018, Adiprasito réussit ainsi à généraliser le théorème pour des sphères simpliciales (chaque polytope simplicial peut être vu comme une triangulation de la sphère, mais la réciproque n'est pas vraie).

Volume. Les volumes des polytopes, et des corps convexes en général, présentent des propriétés de concavité très particulières. Par exemple, si l'on fixe un polytope P de dimension n ainsi qu'un axe, et que l'on regarde la racine $(n-1)^{\text{ème}}$ du volume des tranches de P perpendiculairement à l'axe (voir figure 3), on obtient une fonction concave.

Pour comprendre comment se comportent les tranches, on utilise une opération très classique en théorie des polytopes nommée la *somme de Minkowski*. Si A et B sont deux sous-ensembles dans \mathbb{R}^n , alors $A \boxplus B$ désigne simplement l'ensemble $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Dans ce cas, si A et B sont deux tranches d'un corps convexe, la tranche du milieu contient la moyenne de Minkowski $D_{1/2}(A \boxplus B)$, où D_λ désigne la dilatation par un facteur λ . La concavité du volume des tranches se déduit alors directement de l'inégalité de Brunn-Minkowski [11], qui énonce justement que pour tous polytopes P et Q de dimension n ,

$$\text{Vol}(D_{1/2}(P \boxplus Q))^{1/n} \geq \frac{\text{Vol}(P)^{1/n} + \text{Vol}(Q)^{1/n}}{2},$$

le cas d'égalité n'intervenant que lorsque P et Q sont obtenus par dilatation et translation l'un de l'autre.

La somme de Minkowski et le volume font bon ménage. En effet, on peut montrer que si P_1, \dots, P_r sont des polytopes et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels strictement positifs, alors $\text{Vol}(D_{\lambda_1}P_1 \boxplus \dots \boxplus D_{\lambda_r}P_r)$ est un polynôme en les λ_i dont les coefficients sont donnés par une fonction *Volm* appelée *volume mixte* et ayant pour arguments n polytopes [16] :

$$(1) \quad \text{Vol}(D_{\lambda_1}P_1 \boxplus \dots \boxplus D_{\lambda_r}P_r) = \sum_{i_1=1}^r \dots \sum_{i_n=1}^r \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} \text{Volm}(P_{i_1}, \dots, P_{i_n}).$$

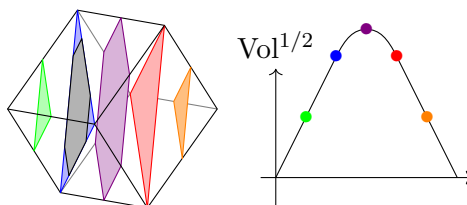


FIGURE 3. Les tranches du cube dans une direction et la racine carrée de leur volume. La forme noire est la moyenne de Minkowski de la tranche verte et de la tranche hexagonale. Elle est bien incluse dans la tranche médiane.

Notez que la formule est similaire au développement de

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r)^n.$$

On peut également approcher le volume d'un polytope en comptant le nombre de points entiers à l'intérieur. Pour les polytopes à sommets entiers, ce nombre de points entiers est également donné une formule polynomiale similaire à la formule ci-dessus (mais le polynôme n'est plus homogène, les coefficients ne sont pas forcément positifs, etc.). Revenons au volume mixte. C'est une fonction symétrique multilinéaire positive (dans un sens que nous préciserons). De plus, l'inégalité de Brunn-Minkowski que nous avons vue ci-dessus est en fait un corollaire d'une inégalité plus générale sur le volume mixte appelée inégalité d'Alexandrov-Fenchel [16], et qui ressemble fort à une inégalité de Cauchy-Schwarz renversée. Soient $P_1, \dots, P_{n-2}, P, Q$ des polytopes de dimension n dans \mathbb{R}^n . Alors

$$\begin{aligned} \text{Volm}(P_1, \dots, P_{n-2}, P, P) \cdot \text{Volm}(P_1, \dots, P_{n-2}, Q, Q) \\ \leq \text{Volm}(P_1, \dots, P_{n-2}, P, Q)^2. \end{aligned}$$

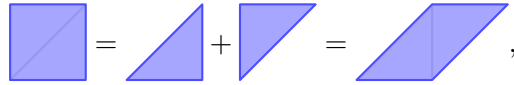
Problème de Minkowski. La concavité d'une fonction permet parfois de résoudre des problèmes d'optimisation et ainsi de montrer que certaines équations ont une unique solution. C'est exactement ce qu'il se produit pour le volume et le problème de Minkowski.

Soit P un polytope de dimension n dans \mathbb{R}^n . Pour chacune de ses faces de dimension $n - 1$, on peut prendre un vecteur normal à la face, pointant vers l'extérieur et de norme le volume de la face.

On peut alors montrer que la somme des vecteurs obtenus fait 0 (cela se voit bien pour un polygone). Le problème de Minkowski consiste à résoudre le problème inverse : étant donnés des vecteurs dont la somme fait zéro, peut-on trouver un polytope dont ils proviennent ? La réponse est oui (sous certaines contraintes triviales), et ce polytope est unique à translation près. Le polytope correspondant est en fait celui de volume maximal vérifiant certaines contraintes. L'unicité provient du caractère (presque) strictement concave du volume dans l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Une algèbre cachée ? En regardant de plus près, presque tous les résultats que nous avons mentionnés font penser qu'une algèbre se cache derrière les polytopes. En effet,

- pour étudier les problèmes de découpage, il est naturel d'introduire un groupe où



- le g -théorème, et la preuve d'une de ses directions par Stanley, font explicitement référence à une algèbre dont les dimensions donnent le g -vecteur,

- la formule (1) du volume de la somme de Minkowski $D_{\lambda_1} P_1 \boxplus \cdots \boxplus D_{\lambda_r} P_r$ fait penser au développement de $(\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r)^n$,

- les formules de convexité du volume sont liées à des inégalités de concavité en théorie des diviseurs apparaissant en géométrie torique, et plus généralement en géométrie algébrique, théorie qui fait apparaître différentes structures algébriques dont l'anneau de Chow [19, 18, 10].

Et en effet, en 1989, McMullen introduit l'algèbre des polytopes [8] : c'est le groupe libre engendré par les polytopes et quotienté par translations et valuations (c'est-à-dire plus ou moins à découpage/recollage près, sauf que l'on interdit les rotations). Ce groupe est naturellement, mais non trivialement, muni d'une structure de \mathbb{R} -algèbre (un carré peut être coupé en 4 carrés identiques facilement, ou en 3 rectangles identiques, mais en $\sqrt{2}$ morceaux identiques, ce n'est pas très clair). McMullen montre également dans cet article une présentation duale par des poids de Minkowski qui se souviennent

des « directions » des faces et de leurs volumes. Une troisième présentation, introduite par Brion [4], est un quotient des fonctions polynomiales par cônes sur \mathbb{R}^n . Cette présentation est plus proche de la théorie des variétés toriques, et l'on obtient une algèbre dont certaines sous-algèbres présentent des résultats remarquables, comme la dualité de Poincaré, ou encore les propriétés kählériennes qui sont classiquement obtenues par la théorie de Hodge, théorie qui étudie originellement les variétés complexes.

Bien que les travaux de McMullen et de Brion datent du siècle dernier, cette algèbre et ses deux versions adjointes, les questions soulevées et les méthodes introduites dans les divers travaux associés, connaissent aujourd'hui généralisations, extensions et perfectionnements, permettant des avancées majeures. C'est le domaine souvent nommé « théorie de Hodge combinatoire ». On peut notamment citer la preuve de la g -conjecture pour les sphères simpliciales par Adiprasito [1] et la résolution de la conjecture de Héron-Rota-Welsh pour les matroïdes par Adiprasito-Huh-Katz [2] (un vecteur associé aux matroïdes, les matroïdes étant la généralisation combinatoire des matrices, possède des propriétés remarquables similaires à celles des h -vecteurs des polytopes simples).

Les objets que nous présenterons ici sont toutefois un peu plus anciens, mais restent très proches, tout en étant plus simples, que ceux utilisés dans les résultats modernes. Nous bénéficions de plus des simplifications de présentations des objets issues de ces nouvelles recherches.

1. Les polytopes et leur volume

1.1. Polytopes, polyèdres, faces. Dans toute la suite, on fixe un espace vectoriel $V \simeq \mathbb{R}^n$ de dimension n , et son espace vectoriel dual V^* . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ l'accouplement de dualité. Un *polytope de V* (sous-entendu convexe) est l'enveloppe convexe d'un nombre fini non nul de points dans V , c'est-à-dire un ensemble de la forme $\text{conv}(S)$ où S est un ensemble fini dans V . C'est la généralisation des polygones et des polyèdres convexes en toute dimension. Des exemples de polytopes sont présentés en figure 4.

Fixons un polytope P . La *dimension de P* , notée $\dim(P)$, est par définition la dimension de l'espace affine engendré par P . Si $u \in V^*$, la *face de P dans la direction u* , notée $F_u P$, est l'ensemble des points de P où $\langle u, \cdot \rangle|_P$ atteint son maximum. Nous appellerons ce maximum lui-même la valeur de la *fonction support de P dans la direction u* . Notons que $F_0 P$ n'est autre que P lui-même. Les faces de codimension 1 (c'est-à-dire de dimension $\dim(P) - 1$) sont appelées *facettes*, celles de dimension 1, *arêtes*, et celles de dimension 0, *sommets*. Il peut parfois être utile de considérer que l'ensemble vide est une face de dimension -1 . Dans ce cas, l'intersection de deux faces de P est elle-même une face de P .

Soient m un entier, $\underline{u} = (u_1, \dots, u_m)$ une famille d'éléments de V^* et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ un m -uplet de nombres réels. On définit (voir figure 5)

$$P_{\underline{u}}(\underline{a}) = P_{\underline{u}}(a_1, \dots, a_m) := \{x \in V \mid \langle u_i, x \rangle \leq a_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

Autrement dit, $P_{\underline{u}}(\underline{a})$ est l'intersection de m demi-espaces affines. Si on modifie un petit peu a_i , et qu'il y a une facette de $P_{\underline{u}}(\underline{a})$ dans la direction u_i , cette facette va légèrement bouger sans tourner. Un ensemble non vide de la forme ci-dessus est appelé un *polyèdre*. Le théorème fondamental de la théorie des polytopes énonce que les polytopes sont exactement les polyèdres bornés. Plus précisément, si P est un polytope, alors $P = P_{\underline{u}}(\underline{a})$ où \underline{u} est donnée par les directions des facettes de P , et les \underline{a} sont les valeurs de la fonction support en les directions respectives. Il s'agit d'une représentation minimale de P en tant que polyèdre, mais il y en a beaucoup d'autres. Notons que, de manière générale, si les u_i engendrent positivement V^* , alors $P_{\underline{u}}(\underline{a})$ est toujours borné.

1.2. f -vecteur et g -théorème. Si P est un polytope de dimension n dans V , on appelle (f_0, \dots, f_n) , où f_i est le nombre de faces de P de dimension i , le *f -vecteur* de P . Le polynôme $F_P(x) := \sum_i f_i x^i$ est appelé le *f -polynôme* de P .

Les polytopes les plus simples sont les *simplexes* (par exemple, les points, les segments, les triangles, les tétraèdres, etc.). Par définition, un simplexe est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points

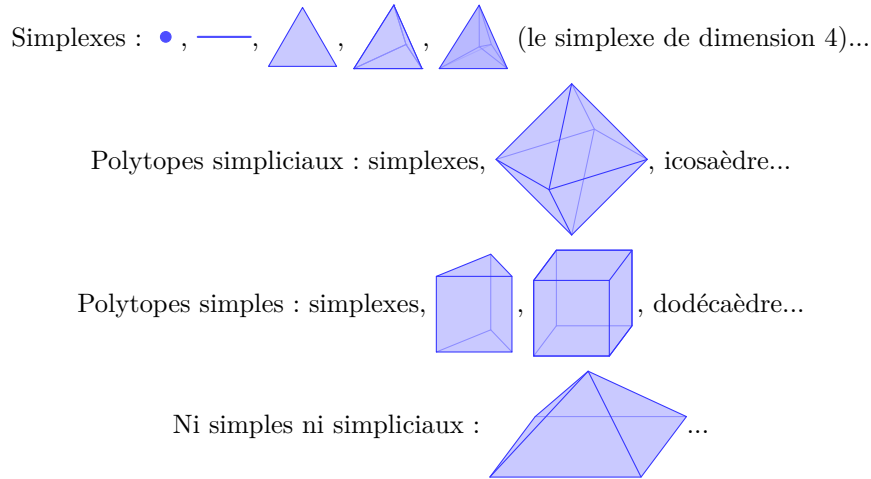


FIGURE 4. Quelques polytopes.

affinement indépendants dans \mathbb{R}^n . Chaque sous-ensemble non vide S de sommets d'un simplexe correspond à une face de dimension $\text{card}(S) - 1$ qui est elle-même un simplexe.

Les polytopes dont toutes les faces propres sont des simplexes sont dits *simpliciaux* (par exemple, les simplexes, l'octaèdre, l'icosaèdre). La notion duale (via la polarisation dont nous ne parlerons pas) est la notion de *polytopes simples* (par exemple, les simplexes, le cube, les prismes, le dodécaèdre). Ce sont les polytopes de dimension d quelconque dont chaque sommet appartient à un nombre minimum de facettes, à savoir d . Ils appartiennent également à d arêtes. Si l'on tranche un polytope simple au niveau d'un sommet, la nouvelle face sera un simplexe. Si l'on considère le f -vecteur d'un polytope simple de dimension n , alors $(f_{n-1}, \dots, f_0, f_n)$ sera le f -vecteur d'un polytope simplicial et réciproquement. Le g -théorème se formule mieux pour les polytopes simples, mais est valable également, via la dualité, pour les polytopes simpliciaux. Pour un polytope simple P , on définit son h -polynôme par $H_P(x) := F_P(x - 1)$, et son h -vecteur par les coefficients de H_P , c'est-à-dire par le vecteur (h_0, \dots, h_n) tel que $H_P(x) = \sum_{i=0}^n h_i x^i$. On définit son g -vecteur, de taille $\lfloor n/2 \rfloor + 1$,

par $g_i = h_i - h_{i-1}$ pour $0 \leq i \leq n/2$ entier (en posant $h_{-1} = 0$). Un énoncé très succinct du g -théorème est le suivant.

Théorème 1.1 (g -théorème). *Un vecteur $(g_0, \dots, g_{\lfloor n/2 \rfloor})$ est le g -vecteur d'un polytope simple si et seulement si il existe une \mathbb{R} -algèbre graduée G^\bullet engendrée par G^1 telle que $\dim(G^i) = g_i$ pour tout i (en posant $g_i = 0$ en dehors de l'intervalle $[0; n/2]$). \diamond*

Ici, une \mathbb{R} -algèbre graduée est une \mathbb{R} -algèbre où $G^\bullet = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} G^k$ en tant qu'espace vectoriel, avec $G^0 \simeq \mathbb{R}$ et pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in G^k$ et $\beta \in G^\ell$, le produit $\alpha \cdot \beta$ appartient à $G^{k+\ell}$.

Ce théorème cache plusieurs propriétés connues comme la caractéristique d'Euler-Poincaré (dont la formule d'Euler) et les équations de Dehn-Sommerville. Nous n'entrons pas dans les détails maintenant, les personnes intéressées peuvent d'ores et déjà jeter un coup d'œil à la section 3.8.

1.3. Volume. Bien que nous tenons à distinguer V et son espace dual, afin de définir facilement des volumes cohérents en toute dimension, on se donne un produit scalaire sur V , et le produit scalaire dual sur V^* . Le *volume d'un polytope* $P \subset V$, noté $\text{Vol}(P)$, est simplement l'intégrale de la fonction caractéristique $\mathbb{1}_P$ du polytope. Si u est un élément non nul de V^* , u^\perp est muni du produit scalaire induit, et on peut définir le *volume de la facette de P dans la direction u* comme l'intégrale de la fonction caractéristique de (n'importe quel translate de) $F_u P$ dans u^\perp . Ce volume est noté $\text{Vol}_u(F_u P)$ et vaut zéro exactement lorsque $\dim(F_u P) < n - 1$. Notamment, les facettes de P sont exactement les $F_u P$ tels que $\text{Vol}_u(F_u P) > 0$. Nous admettrons la proposition raisonnable suivante.

Proposition 1.2. *Soient m un entier et $\underline{u} \in (V^*)^m \setminus \{0\}$. Supposons de plus que les u_i sont deux à deux non positivement colinéaires ($u_i = \lambda u_j$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ implique $i = j$), et qu'ils engendrent positivement tout V^* . Alors $\text{Vol}(P_{\underline{u}}(\cdot)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 sur l'espace sur lequel $\mathcal{P}_{\underline{u}}(\cdot)$ est non vide, et*

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \text{Vol}(P_{\underline{u}}(\underline{a})) = \frac{1}{\|u_i\|} \text{Vol}_{u_i}(F_{u_i} P_{\underline{u}}(\underline{a})). \quad \diamond$$

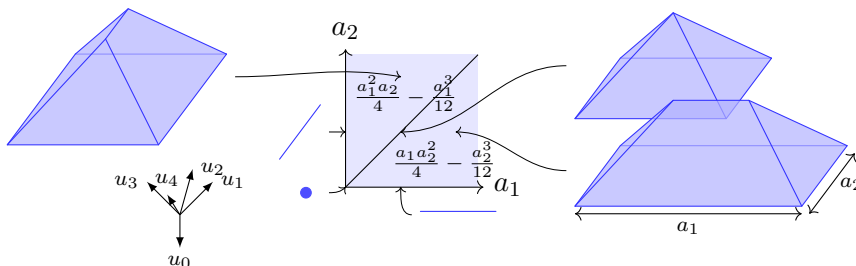


FIGURE 5. Volume du toit $P_{\underline{u}}(\underline{a})$ pour les directions $u_0 = (0, 0, -1), u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (-1, 0, 1), u_4 = (0, -1, 1), a_0 = a_3 = a_4 = 0$ (fixe le polytope à translation près), $a_1, a_2 \geq 0$ variables. Les directions ont été choisies pour simplifier les calculs : les dimensions de la base du toit sont alors exactement $a_1 \times a_2$.

En réalité, la fonction $\text{Vol}(P_{\underline{u}}(\cdot))$ est C^∞ par morceaux. Sur chaque morceau, elle est égale à un polynôme homogène de degré n en les a_i . On change de morceaux lorsque la structure combinatoire du polytope change. Nous verrons plus précisément ce que cela signifie dans la remarque 3.20. En attendant, la figure 5 sur le « flip » du toit donne une intuition du phénomène.

1.4. Somme de Minkowski. Si P et Q sont deux polytopes dans V (ou plus généralement deux ensembles), on définit la *somme de Minkowski de P et Q* par l'ensemble

$$P \boxplus Q := \{x + y \mid x \in P, y \in Q\}.$$

Une façon de se représenter la somme de Minkowski de P et Q est d'imaginer le processus suivant (représenté en figure 6). On enduit Q de peinture, on choisit un point de Q , on déplace Q pour que ce point parcourt tout P , et la zone peinte correspond (à translation près) à la somme $P \boxplus Q$. Par exemple, si $t \in V$ est un point, alors $P \boxplus \{t\}$ est le translaté de P par le vecteur t . Un autre exemple simple est $P \boxplus P$, qui n'est autre que D_2P , c'est-à-dire la *dilatation par un facteur 2 de P* .

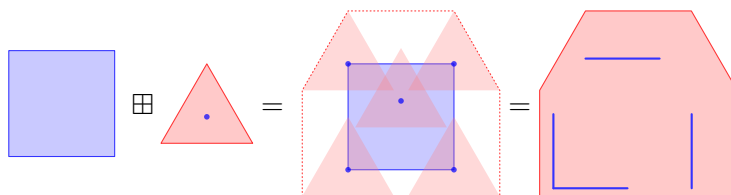


FIGURE 6. Visualisation de la somme de Minkowski d'un triangle et d'un carré

On peut constater, dans le cas de la dimension deux, que les arêtes de la somme sont simplement l'« entrelacement » des arêtes de P avec celles de Q (voir figure 6).

Exercice 1.3

(1) Montrez que, en toute dimension, la fonction support de $P \boxplus Q$ dans une direction u est la somme des fonctions support de P et de Q dans la direction u .

(2) Généralisez le cas des polygones en montrant plus généralement que, pour $u \in V^*$, $F_u(P \boxplus Q) = F_u P \boxplus F_u Q$.

(3) Montrez que pour $m \in \mathbb{N}$, $\underline{u} \in (V^*)^m$ et $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$,

$$P_{\underline{u}}(\underline{a}) \boxplus P_{\underline{u}}(\underline{b}) \subset P_{\underline{u}}(\underline{a} + \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_m + \underline{b}_m).$$

(4) Donnez un exemple dans lequel il n'y a pas égalité.

(5) Montrez que la somme de Minkowski de deux polytopes est un polytope. (*Indice* : ne pas utiliser les questions précédentes.) \diamond

1.5. Concavité du volume : l'inégalité de Brunn-Minkowski

On peut naturellement se demander que vaut le volume de la somme de Minkowski de deux polytopes.

Exemple 1.4. Par exemple, en dimension deux,

$$\text{Vol}(\triangle \boxplus \triangle) = \text{Vol}\left(\begin{array}{c} \triangle \\ \triangle \\ \triangle \end{array}\right) = 4 \text{Vol}(\triangle),$$

et plus généralement, $\text{Vol}(P \boxplus P) = 2^n \text{Vol}(P)$ si P est de dimension n . Par contre,

$$\text{Vol}(\triangle \boxplus \nabla) = \text{Vol}\left(\begin{array}{c} \triangle \\ \square \\ \nabla \end{array}\right) = 6 \text{Vol}(\triangle).$$

Si l'on regarde plutôt la « moyenne de Minkowski », nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D_{1/2}(\triangle \boxplus \triangle)) &= \text{Vol}(\triangle) \\ &< \text{Vol}(D_{1/2}(\triangle \boxplus \nabla)) = \frac{3}{2} \text{Vol}(\triangle). \quad \diamond \end{aligned}$$

Nous voyons dans cet exemple que la moyenne de Minkowski semble faire grossir le volume. Le théorème exact et précis, que nous démontrerons en section 1.7, est le suivant.

Théorème 1.5 (inégalité de Brunn-Minkowski). *Si P et Q sont deux polytopes de V de dimension n , alors*

$$\text{Vol}(P \boxplus Q)^{1/n} \geq \text{Vol}(P)^{1/n} + \text{Vol}(Q)^{1/n},$$

le cas d'égalité est atteint exactement lorsque Q est obtenu par translation et dilatation de P par un facteur positif. \diamond

En divisant par deux de chaque côté, on obtient une inégalité de concavité

$$\text{Vol}(D_{1/2}(P \boxplus Q))^{1/n} \geq \frac{\text{Vol}(P)^{1/n} + \text{Vol}(Q)^{1/n}}{2}.$$

De plus, le cas d'égalité n'intervient que dans les cas triviaux. Nous parlerons donc, en simplifiant grossièrement, de *stricte concavité du volume*.

Exercice 1.6. Se convaincre que l'inégalité de Brunn-Minkowski implique la concavité de la racine $(n-1)^{\text{ème}}$ du volume des tranches, comme évoqué dans l'introduction : voir la section « Volume » de celle-ci et la figure 3. \diamond

Remarque 1.7 (inégalités de Brunn-Minkowski pour $P_{\underline{u}}(\cdot)$)

Si l'on se fixe un m -uplet \underline{u} d'éléments de $V^* \setminus \{0\}$ engendrant positivement V^* , alors, par l'explicitation de la somme de Minkowski énoncée dans l'exercice 1.3, $\text{Vol}(P_{\underline{u}}(\cdot))^{1/n}$ est en effet concave sur le sous-ensemble de \mathbb{R}^m sur lequel $P_{\underline{u}}(\cdot)$ est non vide. \diamond

L'inégalité de Brunn-Minkowski est en fait une conséquence d'une inégalité également très importante : l'inégalité d'Alexandrov-Fenchel. Elle s'exprime en termes de volumes mixtes.

1.6. Volume mixte et polynomialité. Le volume mixte apparaît dans la propriété remarquable suivante portant sur le volume des polytopes (et plus généralement des corps convexes).

Théorème 1.8 (polynomialité du volume d'une somme de Minkowski)

Soient $r \in \mathbb{N}^$, P_1, \dots, P_r des polytopes dans V et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des variables réelles positives. Alors, $\text{Vol}(D_{\lambda_1}P_1 \boxplus \dots \boxplus D_{\lambda_r}P_r)$ est un polynôme en les λ_i , homogène de degré n et à coefficients positifs.*

Plus précisément, ces coefficients sont donnés par une fonction Volm appelée volume mixte :

$$(2) \quad \text{Vol}(D_{\lambda_1}P_1 \boxplus \dots \boxplus D_{\lambda_r}P_r) \\ = \sum_{i_1=1}^r \dots \sum_{i_n=1}^r \text{Volm}(P_{i_1}, \dots, P_{i_n}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}.$$

Le volume mixte est une fonction de domaine les n -uplets de polytopes dans V et à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Cette fonction est multilinéaire et symétrique dans le sens suivant. Pour tout n -uplet P_1, \dots, P_n de polytopes :

- $\text{Volm}(P_1, \dots, P_n)$ est un nombre réel positif;
- si σ est une permutation de taille n ,

$$\text{Volm}(P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(n)}) = \text{Volm}(P_1, \dots, P_n);$$

- et si λ_1 est un facteur réel positif et P'_1 est un polytope, alors

$$\text{Volm}(D_{\lambda_1}P_1 \boxplus P'_1, P_2, \dots, P_n) \\ = \lambda_1 \text{Volm}(P_1, \dots, P_n) + \text{Volm}(P'_1, P_2, \dots, P_n). \quad \diamond$$

Remarquons que, dans l'équation (2), de nombreux termes apparaissent, à permutation près, de nombreuses fois. Notons également l'importance de prendre des coefficients positifs. En effet, comme nous avons pu le constater dans l'exemple 1.4,

$$\text{Vol}\left(\triangle \boxplus D_{-1}\triangle\right) \neq -\text{Vol}\left(\triangle \boxplus \triangle\right).$$

Exemple 1.9. Vérifions la formule (2) dans le cas simple où $P_1 = \dots = P_r$. Pour un polytope P et des coefficients positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_r$,

on vérifie directement que

$$D_{\lambda_1}P \boxplus \cdots \boxplus D_{\lambda_r}P = D_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_r}P.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D_{\lambda_1}P \boxplus \cdots \boxplus D_{\lambda_r}P) &= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)^n \text{Vol}(P) \\ &= \sum_{i_1=1}^r \cdots \sum_{i_n=1}^r \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} \text{Vol}(P). \end{aligned}$$

On en déduit que (2) est correcte si l'on pose $\text{Volm}(P, \dots, P) = \text{Vol}(P)$. \diamond

Le théorème 1.8 qui précède est alors une conséquence du théorème suivant par un développement direct du produit multilinéaire.

Théorème 1.10 (existence et unicité du volume mixte)

Il existe une unique fonction volume mixte qui est multilinéaire symétrique positive dans le sens ci-dessus et telle que $\text{Volm}(P, \dots, P) = \text{Vol}(P)$ pour tout polytope P dans V . \diamond

Polynôme d'Ehrhart : compter le nombre de points entiers. Pour la culture générale, il existe un théorème sur le nombre de points entiers inclus dans un polytope qui est très similaire au théorème 1.8.

Prenons un réseau $M \simeq \mathbb{Z}^n$ dans V engendré par une base de V . Appelons un polytope *entier* si ses sommets sont dans M .

Théorème 1.11 (polynomialité du nombre de points dans une somme de polytopes entiers)

Pour $r \in \mathbb{N}$, P_1, \dots, P_r des polytopes entiers et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}$, le nombre de points entiers dans $D_{\lambda_1}P_1 \boxplus \cdots \boxplus D_{\lambda_r}P_r$ est un polynôme de degré au plus n en les λ_i . \diamond

Notons que le polynôme n'a plus nécessairement des coefficients positifs et n'est pas homogène en général.

Le cas $r = 1$ est déjà non trivial et a été démontré par Ehrhart en 1962 [20]. Le polynôme est alors appelé *polynôme d'Ehrhart de P_1* . Le cas $r = 1$ en dimension 2 est une conséquence du théorème de Pick [22] : le nombre de points entiers dans un polygone de sommets entiers (non forcément convexe) est égal à son aire plus la moitié du

nombre de points entiers sur son périmètre, plus un. Plus généralement, le coefficient dominant du polynôme d'Ehrhart est égal au volume du polytope (s'il est de dimension n et si M est engendré par une base de déterminant 1), et le coefficient constant vaut 1. Comprendre les propriétés des autres coefficients est une tâche compliquée qui a donné, et continue de donner, lieu à de nombreux sujets de recherche.

Nous ne donnerons pas ici la preuve de ce théorème (voir par exemple [6]), mais une preuve possible suit globalement la preuve que nous allons donner dans le cas du volume (théorème 1.8).

1.7. Inégalité d'Alexandrov-Fenchel. Nous pouvons désormais énoncer l'inégalité suivante, qui implique l'inégalité de Brunn-Minkowski et qui ressemble à une inégalité de Cauchy-Schwarz renversée (nous verrons pourquoi avec la preuve en section 3.8).

Théorème 1.12 (inégalité d'Alexandrov-Fenchel)

Soient $P_1, \dots, P_{n-2}, P, Q$ des polytopes de dimension n dans V . Alors

$$\begin{aligned} \text{Volm}(P_1, \dots, P_{n-2}, P, P) \cdot \text{Volm}(P_1, \dots, P_{n-2}, Q, Q) \\ \leq \text{Volm}(P_1, \dots, P_{n-2}, P, Q)^2. \end{aligned}$$

Il y a égalité si et seulement si Q est obtenu à partir de P par translation et dilatation par un facteur strictement positif. \diamond

En admettant ce théorème ainsi que le théorème 1.8, on obtient l'inégalité de Brunn-Minkowski de la manière suivante.

Preuve de l'inégalité de Brunn-Minkowski. Soient P et Q deux polytopes de dimension n dans V . Pour $0 \leq k \leq n$, on pose

$$a_k := \text{Volm}(\underbrace{P, \dots, P}_k, \underbrace{Q, \dots, Q}_{n-k}).$$

L'inégalité d'Alexandrov-Fenchel implique que $a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}$ pour $0 < k < n$, ou encore que

$$\log(a_k) \geq \frac{\log(a_{k-1}) + \log(a_{k+1})}{2}.$$

On dit que la suite $(a_k)_k$ est *log-concave*. Ce terme est justifié car si l'on considère la fonction affine par morceaux f sur $[0; n]$ obtenue en interpolant $f(i) = \log(a_i)$, alors les inégalités ci-dessus fournissent la concavité locale de f exactement aux endroits où elle est potentiellement non linéaires. Ainsi, f est localement concave partout, donc globalement concave.

En élevant à la puissance n l'inégalité de Brunn-Minkowski et en développant le membre de gauche grâce aux volumes mixtes, cette dernière inégalité est équivalente à

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \geq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_0^{(n-k)/n} a_n^{k/n}.$$

Il suffit de montrer que $a_k \geq a_0^{(n-k)/n} a_n^{k/n}$ pour tout k . On conclut en passant au logarithme, et en utilisant la concavité de la fonction f décrite ci-dessus. Le cas d'égalité s'obtient directement. \square

1.8. Problème de Minkowski. Pour finir cette première partie énonçant les principaux résultats que nous allons considérer, illustrons l'importance de l'inégalité de Brunn-Minkowski par un théorème de Minkowski et par quelques commentaires.

Théorème 1.13 (problème de Minkowski). *Soient u_1, \dots, u_m des éléments de $V^* \setminus \{0\}$ de norme 1, deux à deux non positivement colinéaires et qui engendrent positivement V^* . Alors, pour tout m -uplet \underline{a} ,*

$$\sum_i \text{Vol}_{u_i}(P_{\underline{a}})u_i = 0.$$

Réciproquement, soient A_1, \dots, A_m des réels strictement positifs tels que $\sum_i A_i u_i = 0$. Alors, il existe un unique polytope P à translation près tel que les facettes de P soient exactement les $F_{u_i}P$ et tel que chaque $F_{u_i}P$ a pour volume A_i . \diamond

Le nom du théorème permet de le différencier d'autres théorèmes de Minkowski. Ce « problème » connaît plusieurs généralisations, par exemple aux corps convexes, et est relié à l'équation de Monge-Ampère. Cette dernière, également très importante, cherche à trouver des fonctions convexes sur des sous-domaines de \mathbb{R}^n , ou des espaces

plus compliqués, étant donné le déterminant de la hessienne de la fonction convexe.

Voici quelques exercices pour bien comprendre le théorème dans des cas simples.

Entraînement 1.14 (problème de Minkowski en dimension 2)

Dans le cas $V = \mathbb{R}^2$, et en identifiant V et V^* via le produit scalaire standard, interprétez le sens direct du problème de Minkowski pour des polygones. Expliquez comment construire le polygone solution en fonction des A_i . \diamond

Entraînement 1.15 (problème de Minkowski pour le toit)

Se convaincre de la véracité du problème de Minkowski dans le cas du toit, figure 5. \diamond

Le sens direct du problème de Minkowski n'est pas très compliqué et connaît beaucoup de preuves. Par exemple, l'une d'elles utilise le théorème de Stokes. Nous proposons une preuve plus élémentaire dans l'exercice suivant.

Exercice 1.16 (sens direct du problème de Minkowski)

On utilise les notations du théorème 1.13.

(1) Soit $x \in V$ un point. Montrez que

$$P_{\underline{a}} \boxplus x = P_{\underline{a}}(a_1 + \langle u_1, x \rangle, \dots, a_m + \langle u_m, x \rangle).$$

(2) En calculant la dérivée de $t \mapsto \text{Vol}(P_{\underline{a}} \boxplus D_t x)$ en 0 de deux manières différentes, montrez que

$$\sum_i \langle u_i, x \rangle \text{Vol}_{u_i}(P_{\underline{a}}) = 0.$$

(3) Conclure. \diamond

Voici maintenant la preuve de la réciproque. Nous ne nous attarderons pas sur les détails techniques, mais présenterons plutôt l'idée de la preuve. Comme on l'a vu, le volume est concave. On peut donc s'appuyer sur des outils d'optimisation convexe.

Idée de la preuve du sens difficile du problème de Minkowski

On se fixe des réels strictement positifs A_1, \dots, A_m tels que $\sum_i A_i u_i = 0$. Si P est un polytope de la forme $P_{\underline{a}}$, on pose

$$\phi(P) := a_1 A_1 + \dots + a_m A_m.$$

Si t est un point de V , alors, en suivant l'exercice précédent, on obtient

$$\phi(P \boxplus t) - \phi(P) = \sum_i \langle u_i, t \rangle A_i = \langle \sum_i A_i u_i, t \rangle = 0.$$

Donc ϕ , à l'instar du volume, est invariant par translation. Dans la suite, nous allons, sans perdre de généralité, nous concentrer sur les polytopes de la forme $P_{\underline{a}}$ contenant l'origine, c'est-à-dire tels que les a_i soient positifs.

Soit P_0 un polytope de volume 1 minimisant $\phi(P)$ parmi les polytopes de volume 1. Un tel minimum est atteint, car $\phi(P)$ est clairement positive vu que les a_i sont positifs, et car $\phi(P)$ diverge vers $+\infty$ lorsque n'importe lequel des a_i tend vers $+\infty$.



Comme la fonction $\text{Vol}(P(\cdot))^{1/n}$ est concave et C^1 , nous obtenons (voir la méthode des multiplicateurs de Lagrange [17]) que les gradients de $\text{Vol}^{1/n}$ et de ϕ sont colinéaires en P_0 . Or le premier gradient vaut $\frac{1}{n}(\text{Vol}_{u_1}(P_0), \dots, \text{Vol}_{u_m}(P_0))$ et le second vaut (A_1, \dots, A_m) . Donc une dilatation de P_0 nous donne le polytope souhaité.

L'unicité du polytope à translation près se déduit de la stricte concavité du volume (autrement dit du cas d'égalité dans Brunn-Minkowski). \square

2. Algèbre des polytopes

2.1. Motivation : le troisième problème de Hilbert. Introduisons cette partie en motivant la définition de l'algèbre des polytopes par des résultats antérieurs évoqués dans l'introduction. Nous avons vu que n'importe quel polygone peut être découpé en morceaux et recomposé pour former n'importe quel autre polygone de même aire (voir la figure 1). On dit que les polygones de même aire sont *équidécomposables*. Clairement, l'aire est conservée par l'équidécomposition.

Exercice 2.1 (équidécomposabilité des polygones de même aire)

Montrez que l'on peut découper n'importe quel polygone en triangles. Montrez que tout triangle est équidécomposable en un rectangle. Montrez que tout rectangle est équidécomposable en un rectangle dont le ratio entre la longueur et la largeur vaut au plus deux. Montrez qu'un tel rectangle est équidécomposable en un carré (*indice* : dessinez le rectangle et le carré ensembles sous cette forme ). Montrez que toute paire de carrés est équidécomposable en un unique carré (*indice* : dessinez les deux carrés côte à côte , puis dessinez le grand carré en vous appuyant sur les deux petits carrés). Conclure. \diamond

Hilbert a demandé si l'on pouvait généraliser ce résultat en dimension 3.

Problème 2.2 (troisième problème de Hilbert). Deux polyèdres de même volume sont-ils équidécomposables ? \diamond

Dehn a répondu par la négative en introduisant l'invariant de Dehn. Si l'on se fixe un produit scalaire, à chaque polyèdre de dimension trois, on associe un élément de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ égal à

$$\sum_e \|e\| \otimes \angle e,$$

où la somme porte sur les arêtes e du polyèdre, $\|e\|$ est la longueur de l'arête, et $\angle e$ est l'angle diédral modulo π entre les deux facettes contenant e (c'est-à-dire π moins l'angle entre les vecteurs extérieurs normaux aux facettes).

Exercice 2.3 (non-équidécomposabilité du cube en le tétraèdre régulier)

Montrez que l'invariant de Dehn est stable par équidécomposition. Montrez que le cube a un invariant de Dehn nul, alors que le tétraèdre régulier a un invariant de Dehn non nul. Conclure. \diamond

En 1965, Sydler montre la réciproque.

Théorème 2.4 (Sydler 1965). Deux polyèdres sont équidécomposables si et seulement si ils ont le même volume et le même invariant de Dehn. \diamond

L'algèbre des polytopes que nous allons introduire s'appuie également sur ce type de découpage, sauf que nous identifierons deux polytopes à translation près, mais pas à rotation près. Bien que cela puisse paraître moins naturel au premier abord, cela présente l'avantage d'être compatible avec la somme de Minkowski, qui est une opération importante, et la théorie qui en découle se révèle bien plus riche et est reliée à bien d'autres domaines des mathématiques.

2.2. Définition de l'algèbre des polytopes. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la section 2, nous nous appuyons sur la référence [8] où peuvent être trouvés tous les détails.

Nous reprenons les notations de la première section : V est un espace vectoriel réel de dimension n et V^* désigne son dual. Nous allons définir l'algèbre des polytopes $\Pi(V)$ comme le groupe abélien libre engendré par les polytopes de V quotienté par translations et valuations. Une valuation est une façon de dire « à découpage près ». Formellement, une fonction f est une *valuation* si pour tous polytopes P et Q (pas forcément de dimensions maximales) dont l'union est un polytope, alors $f(P \cup Q) + f(P \cap Q) = f(P) + f(Q)$. Cela est en fait équivalent à demander que pour tout polytope P et tout hyperplan affine H , $f(P \cap H_+) + f(P \cap H_-) = f(P) + f(P \cap H)$, où H_+ et H_- sont les deux demi-espaces définis par H . La somme de Minkowski jouera le rôle du produit interne.

Le résultat remarquable est que $\Pi(V)$ est (presque) une \mathbb{R} -algèbre graduée $\Pi(V) = \bigoplus_{i=0}^n \Pi^i(V)$, c'est-à-dire que chaque $\Pi^i(V)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel (sauf $\Pi^0(V)$ qui est isomorphe à \mathbb{Z}), et si $\gamma \in \Pi^i$ et $\delta \in \Pi^j$, alors $\gamma \cdot \delta \in \Pi^{i+j}$. Notons que ce résultat n'est pas du tout évident. En effet, pour un polytope P , $2P = P + P$ par définition, mais il n'est pas du tout clair comment décomposer $\frac{3}{2}P$ en une somme de polytopes (en fait, ce n'est pas possible, comme nous allons le voir, par contre, $\frac{3}{2}(P - Q)$ peut se décomposer en somme de polytopes). Pour insister sur ce point, notons également que D_2P n'est pas égal à $2P$, ni même à $2^{\dim(P)}P$ en général.

Passons à la définition et exerçons-nous avec. Nous énoncerons dans la prochaine section les principales propriétés de l'algèbre. Nous en avons déjà mentionnées quelques-unes.

Définition formelle

Définition 2.5 (algèbre des polytopes). L'algèbre des polytopes $\Pi(V)$ est définie par le groupe abélien libre engendré par les polytopes de V , muni pour le produit interne (noté \cdot) de la somme de Minkowski et quotienté par les deux idéaux suivants :

- l'idéal des translations $I_T = ((t - 1)_{t \in V})$, où $1 := \{0\}$ est l'unité pour la somme de Minkowski, et où t parcourt tous les points de V et est vu comme un polytope,

- l'idéal des valuations $I_V = ((P \cup Q) + (P \cap Q) - P - Q)_{P, Q}$ où P et Q parcourent les paires de polytopes tels que $P \cup Q$ est convexe.

Le produit externe sera défini ultérieurement. \diamond

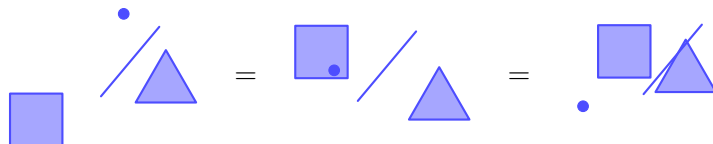
Les fonctions définies sur les polytopes qui s'étendent en un morphisme de groupe à tout $\Pi(V)$ sont appelées *valuations stables par translations*. Cela comprend notamment les opérateurs volumes Vol et Vol_u , l'opérateur de dilatation D_λ , les transformations affines sur V , ou encore F_u .

Exercice 2.6 (compatibilité du produit avec les valuations)

Montrez que pour tous polytopes P, Q, R tels que $P \cup Q$ est un polytope,

$$(P \boxplus R) \cup (Q \boxplus R) = (P \cup Q) \boxplus R \text{ et } (P \boxplus R) \cap (Q \boxplus R) = (P \cap Q) \boxplus R. \diamond$$

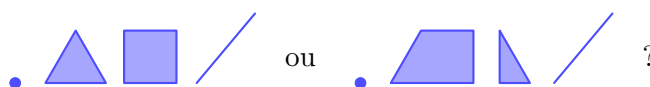
Exemples et notations. Essayons de comprendre ce qu'il se passe avec une bonne série d'exemples. Commençons par l'idéal des translations. Si le nom n'est pas clair pour vous, rappelons que si t est un point de V (dans la suite, nous identifierons tout point de V avec le polytope réduit à ce point) et si P est un polytope, alors $P \cdot t$ est le translaté de P par le vecteur t . En particulier, $P \cdot 1 = P$. Donc, quotienter par l'idéal $(t - 1)_{t \in V}$ revient à identifier P avec ses translatés. Donc, dans l'algèbre des polytopes, les trois figures ci-dessous, qui représentent la somme d'un triangle, d'un carré, d'un segment et d'un point, sont égales :



On aurait aussi pu représenter cet élément comme l'élément à gauche ci-dessous, mais il y a une ambiguïté :

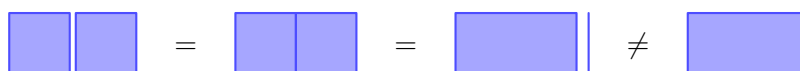


représente-t-il



C'est là qu'intervient le second idéal selon lequel les trois éléments ci-dessus sont de toute façon égaux.

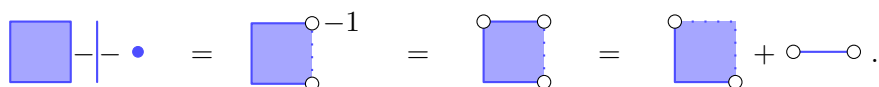
Attention, contrairement à l'équidécomposabilité étudiée dans le chapitre précédent, ici les polytopes de dimensions non maximales ne doivent pas être ignorés :



Pour être clair, nous indiquerons des poids lors de superposition. Par exemple ici, le second dessin sera plutôt représenté par



Nous pouvons aussi nous intéresser aux soustractions.



Ici les ronds blancs indiquent un point avec un poids 0 (ou un poids négatif, qui est alors précisé), et les traits pointillés indiquent un segment avec un poids zéro (ou négatif si précisé).

Remarque 2.7 (non ambiguïté de la notation). Ajoutons que la notation ci-dessus est non ambiguë dans le sens suivant. À chaque polytope P de V , on peut associer sa fonction caractéristique $\mathbb{1}(P) = \mathbb{1}_P$ dans l'espace $\mathcal{F}(V, \mathbb{Z})$ des fonctions de V dans \mathbb{Z} . On peut prolonger $\mathbb{1}$ aux sommes formelles de polytopes. Clairement,

$$\mathbb{1}_P + \mathbb{1}_Q - \mathbb{1}_{P \cap Q} - \mathbb{1}_{P \cup Q} = 0.$$

Donc, en utilisant l'exercice 2.6, on obtient que l'idéal I_V est dans le noyau de $\mathbb{1}$. Le résultat de non-ambiguïté [8, §3] affirme que l'application induite par $\mathbb{1}$ de $\Pi(V)$ dans $\mathcal{F}(V, \mathbb{Z})/\mathbb{1}(I_T)$ est injective.

Dans la suite, nous nous permettrons donc de décrire un élément x de $\Pi(V)$ en décrivant un ensemble S tel que $\mathbb{1}(x) = \mathbb{1}_S$ dans $\mathcal{F}(V, \mathbb{Z})/\mathbb{1}(I_T)$. Par exemple, $[0; 1[\times [0; 1[$ correspond à l'élément de $\Pi(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{array}{c} \circ \\ \square \\ \circ \end{array} = \square - \bullet\text{---}\bullet - \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 1. \quad \diamond$$

Essayons ensuite de comprendre le produit. L'important est de bien faire attention à appliquer la somme de Minkowski uniquement sur des polytopes, et non pas sur des fonctions caractéristiques. En effet,

$$\begin{aligned} \bullet\text{---}\bullet \cdot \bullet\text{---}\circ &= \bullet\text{---}\bullet \cdot (\bullet\text{---}\bullet - 1) \\ &= \bullet\text{---}\bullet + \bullet\text{---}\bullet - \bullet\text{---}\bullet \\ &= \bullet\text{---}\circ, \quad \text{alors que} \\ \bullet\text{---}\bullet \boxplus \bullet\text{---}\circ &= \bullet\text{---}\bullet + \bullet\text{---}\circ. \end{aligned}$$

Entraînement 2.8 (quelques calculs). Calculez les opérations suivantes.

- (1) $\square - \square$
- (2) $\bullet\text{---}\circ \cdot \bullet\text{---}\circ$,
- (3) $\begin{array}{c} \circ \\ \square \\ \circ \end{array} \cdot \begin{array}{c} \circ \\ \square \\ \circ \end{array}$,
- (4) $\triangle \cdot \triangle$. ◇

2.3. Structure de l'algèbre des polytopes et applications

Nous pouvons maintenant décrire plus précisément la structure de l'algèbre des polytopes. Nous retrouverons des structures similaires pour les deux autres présentations de l'algèbre que nous introduirons en sections 3 et 4.

Théorème 2.9 (théorème de structure). *L'algèbre des polytopes $\Pi(V)$ vérifie les propriétés suivantes.*

(1) $\Pi(V) = \bigoplus_{i=0}^n \Pi^i(V)$ où $\Pi^i(V) \subset \Pi(V)$ est appelé le $i^{\text{ème}}$ espace des poids et est défini comme l'ensemble des éléments x tels que $D_k x = k^i x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec $0^0 = 1$). Dans la suite, on note $\xi_i : \Pi(V) \rightarrow \Pi^i(V)$ la projection, et on note $Z_1(V) = \bigoplus_{i=1}^n \Pi^i(V)$ le noyau de ξ_0 .

(2) $\Pi^0(V) \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par 1. De plus, $\xi_0 = D_0$.

(3) L'application volume induit un isomorphisme entre $\Pi^n(V)$ et \mathbb{R} , et la projection ξ_n préserve le volume.

(4) Le produit respecte la graduation : $xy \in \Pi^{i+j}(V)$ pour tous $x \in \Pi^i(V)$, $y \in \Pi^j(V)$ et tous i, j tels que $0 \leq i, j \leq n$.

(5) On peut munir $Z_1(V)$ d'un produit externe par les éléments de \mathbb{R} en posant, pour $i \geq 1$, $\lambda \geq 0$ et $x \in \Pi^i(V)$, $\lambda x = D_{\sqrt[\lambda]{\lambda}} x$ et $(-\lambda)x = -(\lambda x)$. Ce produit vérifie les propriétés attendues pour une algèbre, notamment, $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$ pour tous $x, y \in Z_1(V)$.

(6) $\Pi(V)$ est engendrée, en tant qu'algèbre, par $\Pi^1(V)$.

(7) Les éléments inversibles de $\Pi(V)$ sont exactement les x tels que $\xi_0(x) \in \pm 1$. En particulier, l'inverse d'un polytope P est l'élément $\text{relint}(D_{-1}P)$, où $\text{relint}(Q)$ désigne l'intérieur relatif de Q (voir le point (4) de l'entraînement 2.8 pour un exemple). \diamond

Preuve. Nous allons démontrer le point (1) au paragraphe 2.4 en décomposant chaque polytope P selon les $\Pi^i(V)$. Notamment, $\xi_0(P)$ sera toujours 1, ce qui implique le second point du théorème, et $\xi_n(P)$ sera un pavé semi-ouvert de dimension n et de volume $\text{Vol}(P)$ (voir questions (2) et (3) de l'exercice 2.8 pour des exemples de pavés semi-ouverts de dimensions respectives un et deux). La preuve du point (3) sera conclue par l'exercice 2.17 : tous les pavés semi-ouverts de dimension n sont proportionnels dans $\Pi(V)$. De plus, il deviendra clair que P appartiendra à l'idéal engendré par $\xi_1(P)$, ce qui implique immédiatement le point (6).

Le point (4) découle immédiatement de la définition des $\Pi^i(V)$:

$$D_i xy = D_i x \cdot D_i y = (i^k x)(i^l y) = i^{k+l} xy.$$

Le point (5) est très technique. Comme pour l'équidécomposabilité, il faut astucieusement découper les polytopes et les recoller, mais il faut ajouter à cela de nombreux autres ingrédients. Cela va au-delà de la portée de ce texte, et nous l'admettrons dans la suite.

Enfin, le dernier point peut être démontré grâce aux poids de Minkowski, à savoir la troisième représentation de l'algèbre des polytopes, voir section 4. \square

2.4. Logarithme d'un polytope. Passons à la démonstration du premier point du théorème de structure (théorème 2.9). L'idée de la preuve est d'expliciter $\xi_1(P)$, pour tout polytope P , ainsi que la fonction inverse qui, à partir de $\xi_1(P)$, permet de retrouver P . Aussi étrange que cela puisse paraître, $\xi_1(P) = \log(P)$, et donc $P = \exp(\xi_1(P))$. Par $\log(P)$, on entend tout simplement la série entière de $\log(1+x)$ appliquée à $P-1$. Pour justifier que cela est bien défini, nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 2.10 (fraction entière de polytope). *Pour tout polytope P et tout entier m non nul, il existe un unique élément x de $\Pi(V)$ tel que $mx = P$.* \diamond

Nous ne montrerons que l'existence, et nous noterons cet élément $\frac{1}{m}P$. En fait, l'unicité découle du fait que $\Pi(V)$ est sans torsion, ce que nous admettons.

Lemme 2.11 (quasi-nilpotence des polytopes). *Pour tout polytope P , $(P-1)^{n+1} = 0$.* \diamond

Admettons pour le moment ces deux lemmes. Ainsi, la série entière se transforme en un polynôme de degré n , qui est bien défini :

$$\log(P) = (P-1) - \frac{(P-1)^2}{2} + \frac{(P-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(P-1)^n}{n}.$$

Comme $p := \log(P)$ est un multiple de $P-1$, on en déduit que $p^{n+1} = 0$ et donc on peut poser

$$\exp(p) = 1 + p + p^2/2 + \dots + p^n/n!.$$

Il y a plusieurs remarques utiles à énoncer avant de passer à la preuve. En admettant les deux lemmes ci-dessus, on a

$$\exp(\log(P)) = P,$$

puisque cela est vrai formellement. De même, pour $k \in \mathbb{N}$, comme $D_k(P - 1) = D_k P - 1$, et comme $D_k(xy) = (D_k x)(D_k y)$, pour $k \geq 0$,

$$D_k \log(P) = \log(D_k P) = \log(P^k) = k \log(P),$$

donc $\log(P) \in \Pi^1(V)$. Par ailleurs, on obtient un inverse pour P , à savoir $\exp(-\log(P))$ (qui n'est autre que l'élément décrit dans le point (7) du théorème de structure, comme nous le verrons au paragraphe 4.3). Remarquons également que

$$D_k(p^i/i!) = (D_k p)^i/i! = k^i p^i/i!,$$

donc le terme $p^i/i!$ de $\exp(p)$ appartient à $\Pi^i(V)$. Nous obtenons bien une décomposition de P en les $\Pi^i(V)$: $\xi_i(P) = \log(P)^i/i!$. Comme les polytopes engendrent $\Pi(V)$, nous en déduisons le premier point du théorème de structure, ainsi que le second puisque $\xi_0(P) = 1$ et le point 6. comme $\xi_i(P)$ est dans la sous-algèbre engendrée par $p \in \Pi^1(V)$.

Exercice 2.12 (Cas du triangle). Posons $P := \triangle = D_2 \triangle$. Trouvez la moitié de $P - 1$ comme une somme explicite de polytopes. Trouvez le tiers. Vérifiez que $(P - 1)^3 = 0$. Montrez que la décomposition de P en les $\Pi^i(V)$ est donnée par

$$1 + (P - 1 - x) + x$$

où $x := \triangle$.

◇

Schéma global de la preuve des lemmes. Passons à la preuve des deux lemmes. Pour cela, nous allons décomposer chaque polytope en simplexes semi-ouverts (voir définition ci-dessous), puis découper les dilatations de chaque simplexe en un certain nombre de polytopes semi-ouverts en des quantités bien précises. Pour tout entier k , on pourra trouver une bonne dilatation telle que chaque quantité soit divisible par k , ce qui nous fournira le premier lemme (seulement l'existence

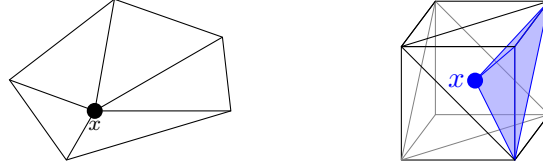


FIGURE 7. Triangulation d'un polygone et triangulation en cours d'un cube.

en fait). Le second lemme découlera d'un calcul direct en développant $(P - 1)^{n+1}$, puis en décomposant chaque puissance de P en les morceaux de simplexes semi-ouverts correspondants.

Triangulation d'un polytope. Par *simplexe semi-ouvert standard de dimension k* , $k \geq 1$, nous entendons l'ensemble

$$\Delta_k := \text{conv}(\{e_1, \dots, e_{k+1}\}) \setminus \text{conv}(\{e_1, \dots, e_k\})$$

dans \mathbb{R}^{k+1} , où (e_1, \dots, e_{k+1}) est la base standard de \mathbb{R}^{k+1} . Nous nommerons de la même manière l'élément correspondant dans $\Pi(\mathbb{R}^{k+1})$. Par *simplexe semi-ouvert de dimension k* , nous entendons n'importe quelle image de Δ_k par une application affine $\Phi : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow V$ dont la restriction à Δ_k est injective. Une *triangulation*, au sens classique, d'un polytope P de dimension d est un ensemble de simplexes de dimension d dont l'union est P et tel que l'intersection de deux simplexes est soit vide, soit une face propre (de dimension au plus $d - 1$) commune aux deux simplexes. Une telle triangulation se construit très facilement. Par exemple, on choisit un point x à l'intérieur de P , on triangule chaque facette de P par récurrence, puis on considère les pyramides de sommet x et de bases respectives chaque simplexe σ de chaque facette : cf. figure 7.

Nous allons nous appuyer sur une telle triangulation pour écrire $P - 1$ comme une somme algébrique de simplexes semi-ouverts. Tout d'abord, nous pouvons écrire P comme une somme algébrique des simplexes de différentes dimensions apparaissant dans la triangulation grâce à un argument d'inclusion-exclusion (on fait la somme des simplexes de dimensions d , on retire les simplexes de dimensions $d - 1$ en trop, on rajoute le bon nombre de simplexes de dimensions $d - 2$, etc.).

Exercice 2.13. Explicitez la décomposition du polygone et du cube dans la figure 7 en sommes algébriques de simplexes. \diamond

Ensuite, chaque simplexe peut se décomposer en une somme de simplexes semi-ouverts plus un point : si on pose

$$S_i := \text{conv}(\{e_1, \dots, e_i\}),$$

alors S_k se décompose en

$$(S_k - S_{k-1}) + (S_{k-1} - S_{k-2}) + \dots + (S_2 - S_1) + 1.$$

Nous avons donc écrit $P - 1$ comme une somme de simplexes semi-ouverts plus un certain nombre de points. Or $D_0Q = 1$ pour tout polytope, donc $D_0\sigma = 0$ pour tout simplexe semi-ouvert σ et $D_01 = 1$. Donc le nombre de points apparaissant dans la décomposition de $P - 1$ vaut $D_0(P - 1) = 0$.

Finalement, nous avons bien décomposé $P - 1$ en une somme de simplexes semi-ouverts.

Réduction au cas d'un simplexe semi-ouvert. Nous pouvons donc écrire $P - 1$ sous la forme d'une somme pondérée $\sum_{\sigma} b_{\sigma} \sigma$ où les σ sont des simplexes semi-ouverts. Montrons que cela nous permet de nous ramener à l'étude de tels simplexes, et donc à celle des simplexes semi-ouverts standards. Il est clair que démontrer le premier lemme pour chaque simplexe impliquera le lemme pour $P - 1$, en tout cas concernant l'existence des fractions entières de $P - 1$. Pour le second lemme, on peut utiliser la formule suivante :

$$\begin{aligned} (P - 1)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k P^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k D_k P \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(1 + \sum_{\sigma} b_{\sigma} D_k \sigma\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k + \sum_{\sigma} b_{\sigma} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k D_k \sigma. \end{aligned}$$

Le premier terme vaut $(1 - 1)^{n+1} = 0$. Le second lemme se ramène donc à montrer que, pour chaque σ , la somme tout à droite est nulle.

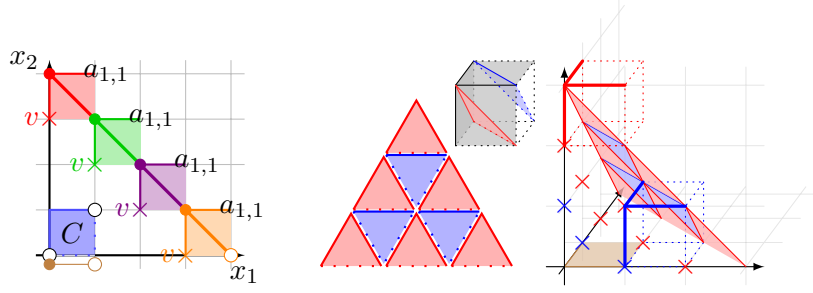


FIGURE 8. Décompositions des dilations de simplexes semi-standard $D_3\Delta_1 = 4a_{1,1}$ et $D_3\Delta_2 = \binom{3}{2}a_{2,2} + \binom{4}{2}a_{1,2}$ par intersection avec des cubes semi-ouverts

Décomposition d'un simplexe semi-ouvert standard

Nous allons maintenant découper les dilations du simplexe semi-ouvert standard Δ_d en différents morceaux :

$$D_k\Delta_d = \binom{k}{d}a_{d,d} + \binom{k+1}{d}a_{d-1,d} + \cdots + \binom{k+d-1}{d}a_{1,d}.$$

Décrivons les $a_{i,d}$ comme des polytopes semi-ouverts. Pour cela, introduisons le cube semi-ouvert

$$C = \{0 \leq x_1, \dots, x_d < 1, 0 < x_{d+1} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

(voire figure 8). On pose alors

$$a_{i,d} = \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \in C \mid x_1 + \cdots + x_{d+1} = i\}.$$

Ensuite, nous allons traduire C par des vecteurs entiers, et étudier l'intersection avec $D_k\Delta_d$. Soit v un vecteur entier. Pour que $C \boxplus v$ intersecte Δ_d , il faut et il suffit que toutes les coordonnées de v soient positives et que la somme s des coordonnées de v soit comprise entre $k-d$ et $k-1$. Comme il y a $d+1$ coordonnées, le nombre de tels vecteurs entiers positifs dont la somme des coordonnées vaut s est $\binom{d+s}{d}$ (on colorie d cases dans une rangée de $d+s$ cases, puis on pose v_1 le nombre de cases avant la première case coloriée, v_2 le nombre de cases entre la première et la deuxième case coloriées, etc.). De plus, l'intersection $(C \boxplus v) \cap \Delta_d$ est égale à $a_{k-s,d}$. Ce qui donne la décomposition ci-dessus.

Fin de la preuve. Pour diviser Δ_d par m , il suffit de trouver un k tel que $\binom{k}{d}, \binom{k+1}{d}, \dots, \binom{k+d-1}{d}$ soient divisibles par r . Le nombre $k = m \cdot d!$ convient puisque

$$\binom{k+i}{d} = \frac{(k+i) \cdot (k+i-1) \cdots (k+i-d+1)}{d!}$$

et que le numérateur contient toujours le facteur k . Cela conclut la partie existence du lemme 2.10. Nous admettrons l'unicité.

Pour le second lemme, on devait montrer que le membre de gauche ci-dessous est nul. On peut le développer et obtenir le membre de droite :

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} D_k \Delta_d = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=1}^d (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{k+d-i}{d} a_{i,d}.$$

Il nous reste à montrer que, pour $1 \leq i \leq d < n+1$,

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{k+d-i}{d} = 0.$$

Or, c'est la valeur de la dérivée $d^{\text{ème}}$ en 1 de $(x-1)^{n+1} x^{d-i} / d!$ puisque

$$\begin{aligned} \left(\frac{(x-1)^{n+1} x^{d-i}}{d!} \right)^{(d)} &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{(x^{k+d-i})^{(d)}}{d!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{(k+d-i)(k+d-i-1) \cdots (k-i+1) x^{k-i}}{d!}, \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \binom{k+d-i}{d} x^{k-i}, \end{aligned}$$

ce qui en 1 vaut bien la somme ci-dessus. Cette dérivée vaut clairement 0 comme $d < n+1$. Cela conclut la preuve des deux lemmes, et donc du premier point du théorème de structure. Voici en exercice une preuve alternative, par double comptage, de l'équation (3).

Exercice 2.14. Pour $1 \leq i \leq d < n+1$. Considérons une rangée de $n+1$ cases blanches suivi de $d-i$ cases rouges. Fixons k entre i et $n+1$, et colorions k cases blanches en rouge puis, parmi les $k+d-i$ cases rouges, colorions en d cases en bleue. En considérons la

transformation consistant à changer la couleur de la première case non bleue, en rouge si elle était blanche et en blanc si elle était rouge, montrer de nouveau l'équation (3). \diamond

2.5. Degré et volume. Nous allons maintenant montrer le troisième point du théorème de structure, à savoir qu'il existe un isomorphisme $\text{deg}: \Pi^n(V) \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant au volume. Nous avons vu que si P est un polytope, alors $\xi_n(P) = \frac{1}{n!} \log(P)^n$, mais cette forme n'est pas pratique pour notre propos. Dans l'exercice 2.12, nous avons vu que le second poids du triangle est en fait égal à un parallélogramme semi-ouvert. Un *parallélotope semi-ouvert de dimension d* est, par définition, un élément de l'algèbre des polytopes affinement isomorphe au cube semi-ouvert $[0; 1[^d \subset \mathbb{R}^d$ (dans le sens de la remarque 2.7 où l'on identifie un élément de $\Pi(V)$ et un ensemble si leurs fonctions caractéristiques sont les mêmes).

Nous allons voir que la preuve découle des deux lemmes suivants, puis nous étudierons les preuves de ces lemmes.

Lemme 2.15 (poids maximal d'un simplexe semi-ouvert)

$\xi_n(\Delta_d)$ vaut 0 si $d < n$ et est un parallélotope semi-ouvert de dimension n si $d = n$. \diamond

Lemme 2.16 (équidécomposabilité par translation des parallélotopes semi-ouverts)

Si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des parallélotopes semi-ouverts de dimension n tels que $\text{Vol}(\gamma_1) + \text{Vol}(\gamma_2) = \text{Vol}(\gamma_3)$, alors $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3$. \diamond

Preuve du point (3) du théorème de structure 2.9. Les deux lemmes permettent de conclure facilement. En effet, $\Pi^n(V)$ est engendrée par les ξ_n de polytopes. Ces derniers peuvent eux-mêmes se décomposer en une somme de ξ_n de simplexes semi-ouverts (plus des $\xi_n(1)$ qui valent zéro). Par le premier point ci-dessus, cette somme est une somme de parallélotopes semi-ouverts de dimension n , et par le second lemme, cette somme de parallélotopes peut être rassemblée en un seul parallélotope qui est un multiple d'un parallélotope γ_0 fixé de volume 1 (donc non nul puisque $\text{Vol}(0) = 0$). Donc $\Pi^n(V) = \mathbb{R}\gamma_0$.

Ensuite, si $x \in \Pi^d(V)$ avec $d < n$, alors $2^n \text{Vol}(x) = \text{Vol}(D_2x) = \text{Vol}(2^d x) = 2^d \text{Vol}(x)$. Donc $\text{Vol}(x) = 0$. Ainsi,

$$\text{Vol} = \text{Vol} \circ (\xi_0 + \cdots + \xi_n) = \text{Vol} \circ \xi_n.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Schéma de preuve du lemme 2.15. On sait que

$$\begin{aligned} D_k \Delta_d &= \binom{k}{d} a_{d,d} + \binom{k+1}{d} a_{d-1,d} + \cdots + \binom{k+d-1}{d} a_{1,d} \\ &= \xi_0(\Delta_d) + k\xi_1(\Delta_d) + k^2\xi_2(\Delta_d) + \cdots + k^n\xi_n(\Delta_d). \end{aligned}$$

Lorsque l'on développe les coefficients binomiaux dans le second membre, on obtient un polynôme en k de degré d dans $\mathbb{R}[\Pi(V)]$. On peut donc identifier les coefficients des deux derniers membres. Notamment, on obtient que $\xi_i(\Delta_d) = 0$ si $i > d$, et que

$$\xi_n(\Delta_n) = \frac{1}{d!} \sum_{i=1}^d a_{i,d}.$$

En regardant la figure 8, on constate que cette somme est exactement ce qui vit au-dessus du parallélotope semi-ouvert marron (il y a un vecteur entier pour chaque somme de coordonnées au-dessus de ce parallélotope), et c'est aussi une projection de ce parallélotope sur l'hyperplan, donc cette somme est simplement un parallélotope semi-ouvert. \square

Le second lemme est laissé en exercice.

Exercice 2.17 (équidécomposabilité par translations de parallélotopes semi-ouverts de même volume (lemme 2.16))

Je conseille de commencer par le cas $n = 2$. Pour toute base $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ de V , on définit le parallélotope semi-ouvert

$$\mathcal{P}(v_1, v_2, \dots, v_n) := [0; 1[v_1 \boxplus [0; 1[v_2 \boxplus \cdots \boxplus [0; 1[v_n.$$

(1) Montrez que, pour toute base \underline{v} ,

$$\mathcal{P}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{P}(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n)$$

dans $\Pi(V)$ pour tout $\lambda \in [0; 1]$.

(2) Montrez que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, dans $\Pi(V)$

$$\mathcal{P}((\lambda + \mu)v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{P}(\lambda v_1, v_2, \dots, v_n) + \mathcal{P}(\mu v_1, v_2, \dots, v_n).$$

(3) Démontrez le lemme 2.16. \diamond

2.6. Interprétation du volume mixte. Nous pouvons maintenant démontrer très simplement le théorème 1.8 qui décrit, en fonction des volumes mixtes, le volume d'une somme de Minkowski de polytopes dilatés. Pour tout n -uplet de polytopes P_1, \dots, P_n , on pose

$$\text{Volm}(P_1, \dots, P_n) := \frac{1}{n!} \text{Vol}(\log(P_1) \cdots \log(P_n)).$$

On a alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tous polytopes P_1, \dots, P_m et pour tous facteurs réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_m$,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D_{\lambda_1} P_1 \boxplus \cdots \boxplus D_{\lambda_m} P_m) &= \text{Vol}(\exp(\log(D_{\lambda_1} P_1) + \cdots + \log(D_{\lambda_m} P_m))) \\ &= \text{Vol}\left(\xi_n(\exp(\lambda_1 \log(P_1) + \cdots + \lambda_m \log(P_m)))\right) \\ &= \text{Vol}\left(\frac{1}{n!}(\lambda_1 \log(P_1) + \cdots + \lambda_m \log(P_m))^n\right). \end{aligned}$$

En développant, on retrouve bien un polynôme en les λ_i dont les coefficients sont les volumes mixtes. Toutes les propriétés du volume mixte sont claires, sauf la positivité, que nous verrons en section 3.8.

3. Éventail dual et algèbre de Chow

Pour les détails, les objets et résultats présentés dans cette section et la suivante s'appuient notamment sur les articles de recherche suivants : [4] pour les fonctions polynomiales par cônes, [5, 3] pour les preuves par éclatements et fusions, [7] pour un survol des conséquences des propriétés kählériennes en combinatoire, [8] pour le lien entre algèbre des polytopes et poids de Minkowski, et [6] pour diverses propriétés des poids de Minkowski.

Nous allons maintenant introduire une algèbre graduée $A^\bullet(V^*)$, que nous allons appeler *algèbre de Chow*. C'est le quotient, par l'idéal engendré par les formes linéaires, d'une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues à valeurs réelles sur V^* . Nous allons (en partie) montrer que $A^\bullet(V^*)$ est isomorphe à $\Pi(V)$, et plus précisément que $A^k(V^*) \simeq \Pi^k(V)$.

3.1. Fonction support et éventail normal d'un polytope

Soit P un polytope dans V . La *fonction support* de P est définie par

$$\begin{aligned} h_P: V^* &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ u &\longmapsto \max_P(\langle u, \cdot \rangle). \end{aligned}$$

Il est à peu près clair que cette fonction est continue et positivement homogène de degré 1, c'est-à-dire que $h_P(\lambda u) = \lambda h_P(u)$ pour $\lambda \geq 0$. De plus, h est convexe (cf. exercice 3.1).

Si F est une face de P , on définit le *cône normal* à F et on note σ_F l'ensemble suivant :

$$\sigma_F := \{u \mid \forall x \in F, h_P(u) = \langle u, x \rangle\}.$$

Alors h est linéaire sur σ_F , car égale à $\langle \cdot, x \rangle$ pour n'importe quel $x \in F$.

L'ensemble σ_F est un *cône polyédral convexe*, c'est-à-dire qu'il est de la forme $\sum_{i=1}^k \mathbb{R}_{\geq 0} u_i$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et certains vecteurs u_1, \dots, u_k . On dit que σ_F est *simplicial* si l'on peut choisir les u_i indépendants. À l'instar du cas des polytopes, on peut définir la *dimension* d'un cône σ , notée $\dim(\sigma)$, comme la dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre. Si $v \in V$, la *face dans la direction v de σ* est notée $F_v \sigma$ et correspond à l'ensemble des points de σ où $\langle \cdot, v \rangle$ atteint son maximum (à savoir 0 ou $+\infty$). Notons que cet ensemble peut être vide et, dans ce cas, nous ne considérerons pas qu'il s'agit d'une face de σ . Les cônes de dimensions 1 sont appelés *rayons*. On notera $\tau \prec \sigma$ si τ est une face de σ (possiblement $\tau = \sigma$). Si de plus $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$, on notera $\tau \prec \sigma$ et l'on dira que τ est une *facette* de σ . Si P est un polytope, on définit l'*éventail normal* à P , noté Σ_P , comme l'ensemble des σ_F où F est une face de P (voir figures 9 et 12). On dit que Σ_P est *complet*, car l'union de ses cônes est égale à l'espace tout entier. C'est un *éventail* dans le sens où c'est un ensemble non vide de cônes (polyédraux convexes) tels que si $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est à la fois une face de σ et une face de σ' . Pour être plus précis, dans le cas de Σ_P , si F et G sont des faces de P , $\dim(\sigma_F) = n - \dim(F)$, et G est une face de F si et seulement si $\sigma_F \prec \sigma_G$. Donc la structure de Σ_P est duale à celle de P .

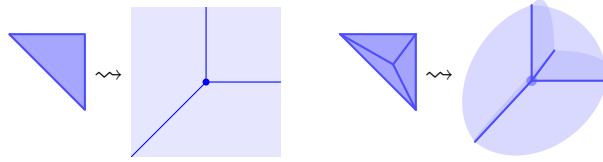


FIGURE 9. Des polytopes et leurs éventails normaux (les cônes de dimension 3 ne sont pas représentés).

Nous avons vu qu'un polytope P fournit une *fonction linéaire par cônes* h_P , c'est-à-dire qu'il existe un éventail complet Σ (par exemple Σ_P) tel que la restriction de h_P à n'importe quel cône de Σ est linéaire. Nous notons $\mathcal{L}(V^*)$ l'espace des fonctions linéaires par cônes, et $\mathcal{N}(V^*)$ le sous-espace des fonctions convexes de $\mathcal{L}(V^*)$. Si Σ est un éventail complet, nous posons $\mathcal{L}(\Sigma)$ et $\mathcal{N}(\Sigma)$ les sous-espaces respectifs des fonctions qui sont linéaires sur chaque cône de Σ . Les éléments de \mathcal{N} sont appelés *nef* (terme qui provient de *numériquement effectif*, c'est une notion analogue en géométrie algébrique). Nous notons $\mathcal{K}(\Sigma)$ l'espace des *fonctions amples sur Σ* , c'est-à-dire que $h \in \mathcal{K}(\Sigma)$ si, pour tout cône σ de Σ , il existe une forme linéaire ℓ sur V^* telle que $h - \ell$ vaut 0 sur σ et est strictement positive partout ailleurs (cf. figure 10). On dira alors que ℓ *supporte h sur σ* . Un éventail complet Σ tel que $\mathcal{K}(\Sigma)$ est non vide est dit *projectif* (car la variété torique associée est projective).

Exercice 3.1 (les fonctions support sont amples). Montrez que, pour tout polytope P , la fonction h_P est ample sur Σ_P (on pourra étudier, pour chaque face F , la forme linéaire $\langle \cdot, v \rangle$ où v est un point dans l'intérieur de F). Montrez que $\mathcal{K}(\Sigma) \subset \mathcal{N}(\Sigma)$. \diamond

Dans toute la suite, pour chaque éventail Σ , on note Σ_1 l'ensemble de ses rayons, et on fixe arbitrairement pour chaque rayon ρ un élément non nul $e_\rho \in \rho$. Notons qu'un élément $h \in \mathcal{L}(\Sigma)$ est déterminé par ses valeurs sur les e_ρ . Notamment, $\mathcal{L}(\Sigma)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

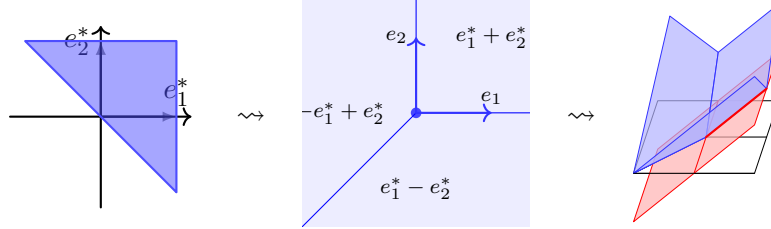


FIGURE 10. Un polytope P , son éventail dual Σ_P , sa fonction support dual h_P , le graphe de cette fonction et la forme linéaire e_1^* supportant h_P en un rayon.

3.2. Bijection entre fonctions nef et polytopes. On peut inverser la fonction $P \mapsto h_P$ en posant, pour $h \in \mathcal{N}(V^*)$,

$$P(h) := \{x \in V \mid \forall u \in V^*, \langle u, x \rangle \leq h(u)\}.$$

Proposition 3.2. *Pour toute fonction nef h , $h_{P(h)} = h$. Pour tout polytope P , $P(h_P) = P$. De plus, si Σ est un éventail, $h \in \mathcal{K}(\Sigma)$ si et seulement si $\Sigma = \Sigma_{P(h)}$. \diamond*

Esquisse de preuve. Soit $h \in \mathcal{N}(V^*)$ et soit Σ un éventail complet tel que $h \in \mathcal{N}(\Sigma)$. Alors on peut montrer par calcul direct que

$$P(h) = P_{e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_r}}(h(e_{\rho_1}), \dots, h(e_{\rho_r})),$$

où ρ_1, \dots, ρ_r sont les rayons de Σ .

Inversement, tout polytope P s'écrit sous la forme

$$P_{e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_r}}(a_1, \dots, a_r)$$

pour certains nombres réels a_1, \dots, a_r , et où ρ_1, \dots, ρ_r sont les rayons de Σ_P . Alors h_P est l'unique élément de $\mathcal{L}(\Sigma_P)$ qui vaut a_i en e_{ρ_i} pour $1 \leq i \leq r$.

Pour la dernière partie, on montre directement que $h_P \in \mathcal{K}(\Sigma_P)$ (voir exercice 3.1). De plus, si $h \in \mathcal{K}(\Sigma)$ pour un certain Σ , alors ce Σ est uniquement déterminé par h puisque Σ doit être exactement l'ensemble des cônes σ pour lesquels il existe une forme linéaire ℓ sur V^* telle que $h - \ell$ vaut 0 sur σ . \square

Voici des corollaires importants.

Corolaire 3.3. *Les éventails projectifs sont exactement les éventails normaux à un polytope.* \diamond

Corolaire 3.4. $\mathcal{N}(V^*)$ est en bijection avec les polytopes sur V^* . \diamond

De plus, nous aurons besoin de résultats classiques sur les subdivisions, que nous admettrons. Une *subdivision d'éventail complet* Σ est un éventail complet Σ' tel chaque cône de Σ' est inclus dans un cône de Σ . Un *éventail simplicial* est un éventail dont tous les cônes sont simpliciaux (c'est-à-dire engendrés positivement par des vecteurs indépendants). Si P est un polytope de dimension n , Σ_P est simplicial si et seulement si P est simple.

Lemme 3.5 (existence d'une subdivision commune)

Toute paire d'éventails complets admettent une subdivision commune. \diamond

Lemme 3.6 (existence d'une subdivision projective simpliciale)

Tout éventail complet admet une subdivision projective simpliciale. \diamond

Remarquons que nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(V^*) &= \bigcup_{\Sigma} \mathcal{L}(\Sigma), \\ \mathcal{N}(V^*) &= \bigcup_{\Sigma} \mathcal{N}(\Sigma) = \bigsqcup_{\Sigma} \mathcal{K}(\Sigma),\end{aligned}$$

où, pour les deux premières égalités, on peut se restreindre aux Σ simpliciaux.

3.3. Polytopes virtuels, fonctions linéaires par cônes et éléments de poids 1 dans l'algèbre des polytopes. Maintenant, nous souhaitons comparer $\mathcal{L}(V^*)$ avec $\Pi^1(V)$. Cela est naturel une fois que l'on a remarqué les résultats des exercices suivants.

Exercice 3.7 (fonctions nefes et somme de Minkowski)

Soient P, Q et R des polytopes de V . Montrez que

$$h_{P \boxplus Q} = h_P + h_Q.$$

Montrez que h_R est une forme linéaire sur V^* si et seulement si R est un point. En déduire que Q est un translaté de P si et seulement si $h_Q - h_P$ est linéaire sur V^* . \diamond

Exercice 3.8 (fonctions nefes et valuations). Soient P et Q deux polytopes de V tels que $P \cup Q$ est convexe. Montrez que

$$h_{P \cup Q} + h_{P \cap Q} = h_P + h_Q. \quad \diamond$$

Exercice 3.9 (fonctions nefes et dilatation). Si $h \in \mathcal{L}(V^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $D_\lambda h(u) = h(\lambda u)$. Montrez que, pour tout polytope P , $h_{D_\lambda P} = D_\lambda h_P$, et que si $\lambda \geq 0$, alors $D_\lambda h = \lambda h$. \diamond

Posons $A^1(V^*) := \mathcal{L}(V^*)/(V^{**})$, où $V^{**} \simeq V$ est l'ensemble des formes linéaires sur V^* . Par les exercices précédents, l'application $P \mapsto h_P$ s'étend en un morphisme de groupe $h: \Pi(V) \rightarrow A^1(V^*)$. De plus, le produit de deux polytopes est envoyé sur la somme de leurs images. Exactement comme pour ξ_1 .

Théorème 3.10. La fonction h induit un isomorphisme de $\Pi^1(V)$ dans $A^1(V^*)$. De plus, sur $\Pi(V)$, $h = h \circ \xi_1$. \diamond

Nous aurons besoin du lemme suivant. Si f et h sont deux éléments de $\mathcal{L}(V^*)$ tels que $f - h$ est nef, on dit que f domine h .

Lemme 3.11. Tout élément de $\mathcal{L}(V^*)$ s'écrit comme différence de deux fonctions nefes. Autrement dit, tout élément de $\mathcal{L}(V^*)$ est dominé par un élément nef. \diamond

Exercice 3.12 (preuve du lemme 3.11). Soient $h \in \mathcal{L}(\Sigma)$ avec Σ projectif, et f ample sur Σ . Montrez que $\lambda f - h$ est nef pour λ suffisamment grand. \diamond

Preuve du théorème 3.10. Décrivons l'inverse de la fonction h . Soient $h \in \mathcal{L}(V^*)$ et f une fonction nef qui domine h . Alors nous envoyons (la classe dans $A^1(V^*)$ de) h sur $\xi_1(P(f) - P(f - h))$. Montrons la bonne définition de cette application. Il suffit de montrer que si f et g sont deux fonctions nefes sur V^* qui dominent h , alors

$$\xi_1(P(g) - P(g - h)) = \xi_1(P(f) - P(f - h)),$$

ou encore que

$$\xi_1(P(g) + P(f - h)) = \xi_1(P(f) + P(g - h)).$$

Or,

$$\begin{aligned} \xi_1(P(g) + P(f - h)) &= \log(P(g)) + \log(P(f - h)) \\ &= \log((P(g) \boxplus P(f - h))) \\ &= \log(P(g + f - h)) \\ &= \xi_1(P(f) + P(g - h)). \end{aligned}$$

Donc l'application est bien définie. Ensuite, comme $h(D_\lambda P) = \lambda h(P)$, la fonction h est forcément nulle sur $\Pi^i(V)$, $i \neq 1$. Donc, par décomposition en poids, $h(P) = h(\xi_1(P))$. Terminons en montrant l'isomorphisme. Si $h \in \mathcal{N}(V^*)$, alors l'application décrite ci-dessus envoie h sur $\xi_1(P(h))$, et $h(\xi_1(P(h))) = h(P(h)) = h$. Comme tout polytope est de la forme $P(h)$ pour un $h \in \mathcal{N}(V^*)$, et que $\mathcal{N}(V^*)$ engendre $\mathcal{L}(V^*)$, on obtient bien l'isomorphisme. \square

Remarque 3.13 (polytopes virtuels). Si $h \in \mathcal{L}(V^*)$ est convexe, on peut associer à h le polytope $P(h)$. Dans le cas où h n'est pas convexe, on ne peut pas associer à h un polytope directement, mais on peut lui associer ce qu'on appelle un *polytope virtuel*. On peut voir les polytopes virtuels comme les fractions de deux polytopes dans $\Pi(V)$. Plus précisément, comme h est dominée par une fonction convexe f , on peut associer à h le polytope virtuel

$$P(f)/P(f - h) = \exp(\log(P(f)) - \log(P(f - h)))$$

(on peut aussi penser la fraction comme une « différence de Minkowski »). La preuve que nous venons de voir montre que la fraction ne dépend pas du f choisi. Ainsi, $\Pi^1(V)$, $A^1(V^*)$ et le groupe multiplicatif des polytopes virtuels modulo translations sont tous trois isomorphes. \diamond

3.4. Algèbre de Chow. Nous savons que $\Pi(V)$ est engendrée en tant qu'algèbre par $\Pi^1(V)$. De plus, $A^1(V^*)$ est isomorphe à $\Pi^1(V)$, et les fonctions sur V^* sont naturellement munies d'une structure d'algèbre. On peut donc penser que l'algèbre engendrée par $A^1(V^*)$ est isomorphe à $\Pi(V)$. Et c'est bien ce qu'il se produit dans les faits.

Soit $\mathcal{P}^\bullet(V^*)$ l'ensemble des fonctions h continues et polynomiales par cônes telles que $h(0) \in \mathbb{Z}$. Cet espace est naturellement gradué : $\mathcal{P}^\bullet(V^*) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^k(V^*)$ où $\mathcal{P}^k(V^*)$ est le sous-espace des fonctions qui sont positivement k -homogènes ($h(\lambda y) = \lambda^k h(y)$ pour tout $\lambda \geq 0$ et $y \in V^*$). Si Σ est un éventail, on note $\mathcal{P}^\bullet(\Sigma)$, resp. $\mathcal{P}^k(\Sigma)$, le sous-espace des fonctions continues qui sont polynomiales, resp. polynomiales homogènes de degré k , sur chaque cône de Σ . Soit $I(V^*)$ l'idéal engendré par les formes linéaires dans $\mathcal{P}^\bullet(V^*)$.

NB. Le fait que $\mathcal{P}^0(V^*)$ est isomorphe à \mathbb{Z} et non à \mathbb{R} , et donc que $\mathcal{P}^\bullet(V^*)$ n'est pas tout à fait une \mathbb{R} -algèbre, est un peu pénible. Nous l'avons défini de cette manière pour avoir l'isomorphisme avec l'algèbre des polytopes. Toutefois, dans la suite, nous considérerons souvent sans trop de précaution $\mathcal{P}^\bullet(V^*)$ comme une \mathbb{R} -algèbre.

Définition 3.14 (algèbre de Chow). Nous définissons l'algèbre de Chow de V^* par $A^\bullet(V^*) := \mathcal{P}(V^*)/I(V^*)$. Le sous-espace $A^k(V^*)$ désigne l'image de $\mathcal{P}^k(V^*)$ par la projection. Nous définissons de manière similaire les sous-espaces correspondants $A^\bullet(\Sigma) := \mathcal{P}(\Sigma)/I(\Sigma)$ et $A^k(\Sigma)$ pour tout éventail Σ . \diamond

3.5. Lien avec l'algèbre des polytopes. Comme attendu, nous avons l'isomorphisme suivant.

Théorème 3.15. *L'application $A^1(V^*) \rightarrow \Pi^1(V)$ se prolonge en un isomorphisme d'algèbre $A^\bullet(V^*) \xrightarrow{\simeq} \Pi(V)$, et $\Pi^k(V)$ est l'image de $A^k(V^*)$.* \diamond

Preuve partielle. Il faut d'abord expliquer pourquoi $\mathcal{L}(V^*)$ engendre $\mathcal{P}^\bullet(V^*)$ en tant qu'algèbre. On peut se contenter de montrer que $\mathcal{L}(\Sigma)$ engendre $\mathcal{P}^\bullet(\Sigma)$ pour tout Σ simplicial. Dans ce cas-là, le fait que $\mathcal{L}(\Sigma)$ engendre toute l'algèbre $\mathcal{P}^\bullet(\Sigma)$ découlera de l'étude plus détaillée de $A^\bullet(\Sigma)$ que nous entreprendrons dans la prochaine section. Il deviendra également clair que $A^\bullet(\Sigma) = \bigoplus_{k=0}^n A^k(\Sigma)$ se décompose en $n+1$ parties, et que cette algèbre est de dimension finie. Nous verrons aussi qu'il y a un isomorphisme $\deg: A^n(\Sigma) (\simeq A^n(V^*)) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$ qui est l'analogie de la fonction volume $\text{Vol}: \Pi^n(V) \rightarrow \mathbb{R}$.

Ensuite, remarquons que les formes linéaires sont clairement envoyées sur 0 : si h est linéaire, $P(h)$ est un point et $\xi_1(P(h)) = 0$. Donc l'idéal $I(V^*)$ est envoyé sur zéro, et l'on obtient bien une application $A^\bullet(V^*) \rightarrow \Pi(V)$. Celle-ci est surjective puisque chaque polytope P est l'image de

$$1 + h_P + \frac{1}{2!}h_P^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h_P^n.$$

Quant à l'injectivité, de nouveau, il suffit de la démontrer sur la restriction à $A^\bullet(\Sigma)$ pour Σ simplicial. Nous verrons (nous ne donnerons qu'une vague idée de la preuve) que $A^\bullet(\Sigma)$ vérifie la dualité de Poincaré, ce qui est équivalent à dire que pour tout k et tout $z \in A^k(\Sigma)$ non nul, il existe $z' \in A^{n-k}(\Sigma)$ tel que $\deg(z \cdot z') = 1$. Ainsi, l'image dans $\Pi(V)$ de $z \cdot z'$ a un volume non nul, donc l'image de z est non nulle. \square

3.6. Algèbre de Chow d'un éventail simplicial. Dans toute cette section, on considère un éventail *simplicial projectif* dans \mathbb{R}^n .

Théorème 3.16. *L'algèbre de Chow $A^\bullet(\Sigma)$ est isomorphe à l'algèbre polynomiale*

$$\mathbb{R}[(x_\rho)_{\rho \in \Sigma_1}]/(I + J),$$

avec

- I l'idéal engendré par les produits $x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_k}$ où ρ_1, \dots, ρ_k sont des rayons n'appartenant pas à un même cône de Σ , et
- J l'idéal engendré par les $x_\ell := \sum_{\rho \in \Sigma_1} \ell(e_\rho) x_\rho$ pour $\ell \in V^{**}$. \diamond

Notamment, $A^\bullet(\Sigma)$ est engendré par $A^1(\Sigma)$ et $A^\bullet(\Sigma) = \bigoplus A^k(\Sigma)$ est graduée par le degré du polynôme (car les idéaux I et J sont engendrés par des polynômes homogènes).

Preuve. Pour chaque rayon $\rho \in \Sigma_1$, on pose $z_\rho \in \mathcal{L}(\Sigma)$ la fonction qui vaut 1 sur e_ρ et 0 sur $e_{\rho'}$ pour tous les autres rayons ρ' . En envoyant x_ρ sur z_ρ , on obtient un morphisme d'algèbre de $\mathbb{R}[(x_\rho)_\rho]$ dans $\mathcal{P}(\Sigma)$. L'idée est ensuite de constater que si $h \in \mathcal{P}(\Sigma)$ et si $\sigma \in \Sigma$ est un cône de rayons ρ_1, \dots, ρ_k , alors $h|_\sigma$ s'écrit de manière unique comme un polynôme en les restrictions des z_{ρ_i} . Maintenant, pour une famille de rayons ρ'_1, \dots, ρ'_l , possiblement avec multiplicité, le coefficient dans h_σ

de $z_{\rho'_1} \cdots z_{\rho'_t}$ est le même pour tous les cônes σ qui contiennent tous ces rayons, et ce produit est nul si aucun cône ne contient tous ces rayons. En étudiant cela précisément, on obtient bien un isomorphisme entre $\mathbb{R}[(x_\rho)]/I$ et $\mathcal{P}(\Sigma)$. La préimage d'une forme linéaire ℓ est exactement $\sum_\rho \ell(e_\rho)x_\rho$, ce qui conclut la preuve du théorème. \square

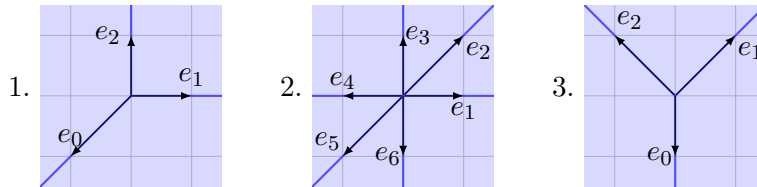
Dans la suite, si $\sigma \in \Sigma$ a pour rayons ρ_1, \dots, ρ_k , on pose $x_\sigma := x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_k} \in A^k(\Sigma)$. Si η est un cône de dimension n de rayons ρ_1, \dots, ρ_n , on pose $\text{deg}(x_\eta) := \text{Vol}(C_\eta)$, où C_η est le paralléloptope unité de V correspondant défini par :

$$C_\eta = P_{e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_n}, -e_{\rho_1}, \dots, -e_{\rho_n}}(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_n).$$

En fixant un produit scalaire compatible avec le volume, $\text{Vol}(C_\eta)$ est tout simplement la valeur absolue du déterminant de la base duale à $(e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_n})$, donc l'inverse de la valeur absolue du déterminant de $(e_{\rho_1}, \dots, e_{\rho_n})$.

L'application degré est bien définie, et correspond en fait au volume, comme l'explique la prochaine proposition. Mais avant d'énoncer la proposition, vérifions cela sur quelques exemples.

Entraînement 3.17. Considérons les éventails Σ^1 , Σ^2 et Σ^3 suivants.



Pour simplifier, on note x_i l'élément associé au rayon engendré par e_i .

(1) Dans l'algèbre $A^\bullet(\Sigma^1)$, montrez, pour tous i, j compris entre 0 et 2, $x_i = x_j$, que $x_i^2 = x_i x_j$ et que tous les monômes de degré 3 sont nuls.

(2) Toujours dans Σ^1 , en considérant le produit scalaire ayant pour base orthonormée (e_1, e_2) , calculez le degré de l'élément $\frac{1}{2}(a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)^2$ pour quelques valeurs de a_0, a_1 et a_2 . Dessinez le polytope $P_{e_0, e_1, e_2}(a_0, a_1, a_2)$ (en identifiant V et son dual) et calculez le volume. Comparez.

(3) Montrez que, pour l'éventail Σ_2 , (x_1, x_2, x_3, x_4) est une base de $A^1(\Sigma^2)$, que tous les x_σ sont égaux pour σ de dimension 2, et qu'ils sont égaux à $-x_i^2$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq 6$. En déduire que $A^2(\Sigma^2)$ est de dimension 1. Montrez que $A^3(\Sigma^2)$ est trivial.

(4) Calculez une base de $A^1(\Sigma^3)$. Montrez que $2x_1x_2 = x_2x_0 = x_1x_0$. Montrez que $A^2(\Sigma^3)$ est de dimension 1 et que $A^3(\Sigma^3)$ est trivial.

(5) Refaire la question 2. en remplaçant Σ^1 par Σ^3 et en prenant pour base orthonormée (e_0, e_1) . \diamond

Plus généralement, en s'appuyant sur le fait que Σ est simplicial, on peut montrer le lemme et la proposition suivantes.

Lemme 3.18. *L'algèbre $A^\bullet(\Sigma)$ est générée en tant qu'espace vectoriel par les monômes sans carré, c'est-à-dire par les monômes x_σ , $\sigma \in \Sigma$.* \diamond

Proposition 3.19. *Le gradué $A^k(\Sigma) = 0$ si $k > n$. De plus, l'application degré ci-dessus est bien définie et s'étend en un isomorphisme $\deg: A^n(\Sigma) \simeq \mathbb{R}$ qui est l'analogue du volume, dans le sens où le degré d'un élément de $A^n(\Sigma)$ est égal au volume de l'élément correspondant dans $\Pi^n(V)$.* \diamond

Nous admettons le lemme.

Esquisse de preuve de la proposition. La première partie de la proposition découle du lemme puisque les monômes x_σ ont degré au plus n . La deuxième partie se montre de proche en proche : si σ et σ' sont deux cônes de dimensions n qui partagent une face τ de dimension $n-1$, $x_\sigma/\deg(x_\sigma) - x_{\sigma'}/\deg(x_{\sigma'}) = x_\tau x_\ell$ où ℓ est une forme linéaire bien choisie qui vaut 0 sur τ . \square

Remarque 3.20. Pour Σ un éventail simplicial projectif fixé, et sous la condition que Σ subdivise Σ_P , le polytope $P := P_{(e_\rho)_{\rho \in \Sigma_1}}((a_\rho)_{\rho \in \Sigma_1})$ correspond à l'élément $\exp(\sum_\rho a_\rho x_\rho)$ de $A^\bullet(\Sigma)$, et donc

$$\text{Vol}(P) = \deg\left(\frac{1}{n!} \left(\sum_\rho a_\rho x_\rho\right)^n\right),$$

qui est un polynôme en les a_ρ .

Cela permet d'obtenir de nouveau la polynomialité du volume d'une somme de Minkowski (théorème 1.8) et les propriétés du volume mixte en prenant une subdivision commune aux éventails normaux des polytopes en question. On voit aussi que le volume de $P_{(e_\rho)_\rho}(\cdot)$ est polynomial par morceaux, chaque morceau correspondant à un éventail projectif dont les rayons sont les ρ . \diamond

L'algèbre de Chow d'un éventail simplicial projectif est très riche en propriétés. Nous allons en énoncer certaines parmi les plus importantes, dont les propriétés kählériennes, au paragraphe 3.8.

Il existe en général plusieurs façons de démontrer ces propriétés à divers degrés de généralité. Par exemple, on peut parfois utiliser la géométrie algébrique en associant à un éventail ce qu'on appelle sa variété torique complexe associée. Dans ce cas, l'algèbre de Chow correspond à l'algèbre cohomologique de la variété, dont la théorie de Hodge classique nous enseigne les nombreuses propriétés. Toutefois, une méthode qui fonctionne de manière très générale et qui fournit des preuves élémentaires est de travailler par récurrence en utilisant les éclatements, qui sont des sortes de subdivisions locales d'éventails que nous allons maintenant introduire.

3.7. Éclatements et fusions. Nous donnerons quelques exemples pour comprendre l'opération d'éclatement juste après la définition qui suit. Effectuer l'*éclatement* (*blow-up* en anglais) *d'un éventail le long d'un rayon* ρ , rayon qui n'appartient pas nécessairement à l'éventail, consiste à retirer tous les cônes qui contiennent ρ , et à les remplacer par les cônes $\rho \boxplus \sigma$ où σ est une face non retirée d'un cône qui contenait ρ . La *fusion* (*blow-down* en anglais) est l'opération inverse, c'est-à-dire que Σ est obtenue à partir de Σ' par une fusion le long de ρ si Σ' est l'éclatement de Σ le long de ρ (contrairement à l'éclatement, il peut y avoir plusieurs fusions possibles pour un même ρ).

La figure 11 ainsi que les flèches descendantes sur la partie droite de la figure 12 illustrent différents éclatements. En fait, on a déjà vu une opération similaire dans la figure 7 concernant les triangulations de polytopes. En effet, on peut aussi faire un éclatement d'un polytope le long d'un point. C'est une très bonne façon de trianguler un polytope

(il suffit de faire un éclatement par face, en commençant par les faces les plus grandes).

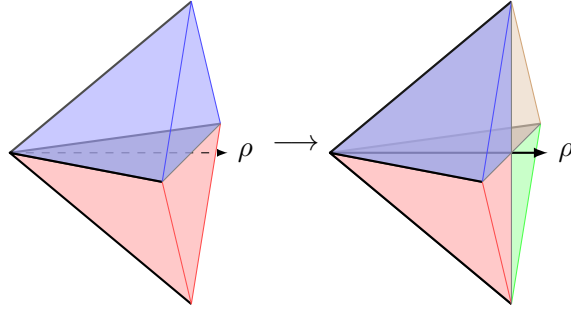


FIGURE 11. Éclatement le long du rayon ρ .

Le dual de l'éclatement se visualise sans doute mieux. Si $P_{\underline{a}}$ est un polytope de dimension n , on peut choisir une nouvelle direction u' et un grand nombre a' . Si a' est assez grand, $P_{\underline{a},u'}(\underline{a}, a')$ n'a pas de facette dans la direction u' , et $P_{\underline{a},u'}(\underline{a}, a')$ est égal à $P_{\underline{a}}$. Maintenant, on diminue a' petit à petit. À un moment, la facette

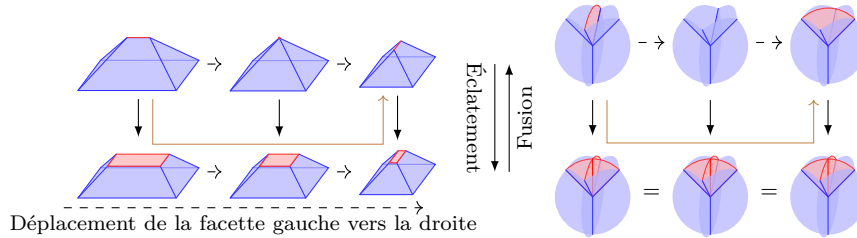


FIGURE 12. Déplacement d'une facette du toit, création d'une nouvelle facette, et transformation d'un « flip » en un éclatement le long du rayon rouge, puis une fusion le long du même rayon. À gauche du point de vue des polytopes, à droite du point de vue des éventails normaux correspondants (les cônes de dimension 3 ne sont pas représentés).

dans la direction u' va apparaître (voir les flèches verticales sur la figure 12, à gauche). À ce moment-là, l'éventail $\Sigma(\underline{a}, a') := \Sigma_{P_{\underline{a},u'}(\underline{a}, a')}$ va subir un éclatement le long du rayon engendré par u' . Si l'on

continue à diminuer a' , $\Sigma(\underline{a}, a')$ va potentiellement de nouveau changer. Cette fois-ci, cela ne correspondra pas forcément à un éclatement (cf. flèches horizontales du haut, où cette fois-ci l'on considère la facette de gauche, que l'on déplace, au lieu de la facette rouge). Ceci dit, si la direction de u' est suffisamment générique, il s'agit d'un « flip », que l'on peut astucieusement décomposer en un éclatement puis une fusion (en suivant plutôt la flèche marron). De plus, cette astuce préserve le fait d'être un éventail simplicial (ou, dualement, un polytope simple).

Maintenant, si on a un polytope simple P de dimension n et un simplexe générique $S = P_{\underline{u}}(\underline{a})$ contenu dans P , on peut partir de P et, pour chaque direction u_i dans \underline{u} , faire apparaître une facette via un éclatement dans la direction u_i , puis continuer à abaisser la facette jusqu'à ce que la fonction support dans la direction u_i soit a_i . En faisant de même pour toutes les directions de \underline{u} , on obtient S à partir de P . En appliquant l'astuce ci-dessus et en faisant un peu attention, on obtient la proposition bien utile suivante.

Proposition 3.21. *Deux éventails complets peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre par une série d'éclatements et de fusions. De plus, si les deux éventails sont tous deux simpliciaux et/ou projectifs, on peut demander que tous les éventails intermédiaires soient eux-mêmes simpliciaux et/ou projectifs.* \diamond

Ainsi, si l'on veut démontrer une propriété sur les polytopes, on peut la démontrer sur n'importe lequel d'entre eux, puis démontrer qu'elle est préservée par éclatement et par fusion et le tour est joué.

3.8. Propriétés kählériennes et conséquences. Le théorème suivant rassemble de nombreuses propriétés de l'algèbre de Chow d'un éventail projectif simplicial. Nous n'allons pas le démontrer, mais tout peut se faire grâce à la méthode des éclatements et fusions décrite précédemment.

Rappelons que, si P est un polytope simple de dimension n , son f -vecteur est le vecteur (f_0, \dots, f_n) où f_i est le nombre de faces de dimension i de P , son f -polynôme est $F_P(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n$,

son h -polynôme est $H_P(x) := F_P(x-1)$, son h -vecteur (h_0, \dots, h_n) est la liste des coefficients de H_P , et son g -vecteur est

$$(h_1 - h_0, h_2 - h_1, \dots, h_{\lfloor n/2 \rfloor} - h_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}).$$

Théorème 3.22 (propriétés kählériennes et autres)

Soit P un polytope simple de dimension n dans V et soit $\Sigma := \Sigma_P$. Alors,

- $h_k = \dim(A^k(\Sigma))$ pour $0 \leq k \leq n$;
- (Dualité de Poincaré) pour $0 \leq k \leq n$, l'accouplement

$$A^k(\Sigma) \times A^{n-k}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui envoie (α, β) sur $\deg(\alpha \cdot \beta)$ est parfait (autrement dit, il induit un isomorphisme entre $A^k(\Sigma)$ et le dual de $A^{n-k}(\Sigma)$) ;

- (Théorème de Lefschetz difficile (ou vache)) pour tout entier k entre 0 et $n/2$ et pour tous éléments amples $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2k}$ dans $A^1(\Sigma)$, l'application de $A^k(\Sigma)$ dans $A^{n-k}(\Sigma)$ envoyant un élément $\alpha \in A^k(\Sigma)$ sur $\alpha \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2k}$ est un isomorphisme ;

- (Relations bilinéaires de Hodge-Riemann) de plus, si λ est un autre élément ample, la forme bilinéaire sur $A^k(\Sigma)$ qui envoie (α, β) sur $(-1)^k \deg(\alpha \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2k} \cdot \beta)$ est définie positive sur le noyau de la multiplication par $\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2k} \cdot \lambda$ allant de $A^k(\Sigma)$ à $A^{n-k+1}(\Sigma)$. \diamond

Ce théorème est assez compliqué. Nous allons voir comment chaque partie permet de retrouver ou de démontrer une bonne partie des résultats importants que nous avons vus, en espérant que cela pourra aider un petit peu à appréhender ce théorème.

Preuve de la nécessité du g -théorème. Tout d'abord, certaines parties du g -théorème ou d'autres relations connues des polytopes découlent facilement du théorème 3.22. Reprenons les notations de celui-ci.

- (Caractéristique d'Euler-Poincaré) $h_0 = F_P(-1) = \sum_k (-1)^k f_k$ et, par le théorème ci-dessus, $h_0 = \dim(A^0(\Sigma_P)) = 1$: on retrouve la caractéristique d'Euler-Poincaré.

- Comme les h_i sont des dimensions, ils sont positifs (ce qui n'est pas trivial a priori).

- (Équations de Dehn-Sommerville) La dualité de Poincaré (et le théorème de Lefschetz difficile) impliquent que $h_i = h_{n-i}$.

• (*Unimodalité du h-vecteur*) Par le théorème de Lefschetz difficile, pour $k < n/2$ et λ un élément ample, comme la multiplication par λ^{n-2k} est injective sur $A^k(\Sigma)$, a fortiori la multiplication par λ de $A^k(\Sigma)$ dans $A^{k+1}(\Sigma)$ est injective. Donc $h_k \leq h_{k+1}$. De même, on peut montrer que la multiplication par λ est surjective de $A^{n-k-1}(\Sigma)$ dans $A^{n-k}(\Sigma)$. On obtient que le h-vecteur est unimodal (c'est-à-dire croissant puis décroissant) : $h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor n/2 \rfloor} = h_{\lceil n/2 \rceil} \geq h_{\lceil n/2 \rceil + 1} \geq \dots \geq h_n$.

• On peut également considérer l'algèbre $A^\bullet(\Sigma)$ quotientée par l'idéal (λ) où λ est un élément ample. Clairement, nous obtenons une algèbre graduée engendrée en dimension 1, et le k -ème gradué vaut $A^k(\Sigma)/(\lambda \cdot A^{k-1}(\Sigma))$ qui est de dimension $h_k - h_{k-1}$ si $k \leq n/2$ (lorsque la multiplication par λ est injective) et vaut 0 si $k > n/2$ (lorsque la multiplication par λ est surjective). Les dimensions de l'algèbre quotient correspondent donc aux coefficients du g -vecteur, ce qui conclut un sens du g -théorème (théorème 1.1).

Relations de Hodge-Riemann, positivité du volume mixte et inégalité d'Alexandrov-Fenchel. Passons maintenant à la partie plus compliquée, à savoir les relations de Hodge-Riemann. En réalité, nous n'utiliserons les relations que pour $k = 0$ et $k = 1$. Pour $k = 0$, les relations indiquent que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont amples, c'est-à-dire sont de la forme h_{P_1}, \dots, h_{P_n} avec P_1, \dots, P_n des polytopes dont l'éventail normal est Σ , alors $\deg(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ est positif. Mais avec l'étude que nous avons menée précédemment, nous savons que ce degré est égal à $\text{Vol}(\log(P_1) \cdots \log(P_n))$, qui n'est autre que le volume mixte, ou plus précisément $n! \cdot \text{Volm}(P_1, \dots, P_n)$. Donc, nous sommes tout simplement en train de dire que le volume mixte de P_1, \dots, P_n est strictement positif; et est positif de manière générale pour des polytopes quelconques avec un petit argument de densité (prenez un éventail simplicial projectif dual commun et ajoutez à tous vos polytopes un tout petit élément ample qui tend vers 0). On obtient le premier point sur les propriétés des volumes mixtes dans le théorème 1.8.

Pour $k = 1$, nous retrouvons l'inégalité d'Alexandrov-Fenchel! En effet, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \lambda$ et λ' des éléments amples avec λ et λ' non proportionnels. Regardons la forme bilinéaire B sur $A^1(\Sigma)$ définie

par $B(\alpha, \beta) := \deg(\alpha \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \cdot \beta)$. Elle est définie négative sur le noyau de la multiplication par $\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \lambda$, multiplication qui est surjective sur $A^n(\Sigma) \simeq \mathbb{R}$. Ce noyau est donc un hyperplan. Par le cas $k = 0$, on sait que $B(\lambda, \lambda) > 0$. Donc la signature de B est $(+, -, -, \dots, -)$. Maintenant restreignons B au plan engendré par λ et λ' . On a toujours que $B(\lambda, \lambda) > 0$. La signature de B ne peut donc être que $(+, -)$. Cela signifie que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} B(\lambda, \lambda) & B(\lambda, \lambda') \\ B(\lambda', \lambda) & B(\lambda', \lambda') \end{pmatrix}$$

est strictement négatif. Donc

$$\deg(\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \cdot \lambda \cdot \lambda) \cdot \deg(\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \cdot \lambda' \cdot \lambda') < \deg(\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2} \lambda \cdot \lambda')^2.$$

Ce qui, traduit en termes de volumes mixtes, donne l'inégalité d'Alexandrov-Fenchel (en utilisant un argument de densité; ceci dit, cela ne suffit pas pour avoir le cas d'égalité en toute généralité).

Sur un espace vectoriel euclidien, une preuve similaire permet d'obtenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sauf que, dans ce cas, le déterminant de la matrice est positif. Ici, la négativité du déterminant explique pourquoi nous obtenons une inégalité de type Cauchy-Schwarz renversée.

4. Poids de Minkowski

Comme ce texte est déjà très long, nous allons simplement décrire la dernière forme de l'algèbre des polytopes. Pour celles et ceux qui, comme moi, trouvent la formule de l'inverse d'un polytope (à savoir que l'inverse est, au signe près, l'intérieur du dilaté par -1 du polytope) très jolie et qui voudraient voir la preuve, qui s'appuie justement sur cette ultime forme, je la propose sous forme d'exercice.

4.1. Définition. On rappelle que l'on a fixé un produit scalaire sur V , qui permet de définir la fonction Vol (on peut s'en passer, mais cela simplifie la présentation). Les restrictions de ce produit scalaire à des sous-espaces vectoriels définissent des fonctions volumes induites. Soient P un polytope et Σ_P son éventail normal. À chaque cône σ de Σ , on associe un poids $w_P(\sigma)$ qui est égal au volume de sa face

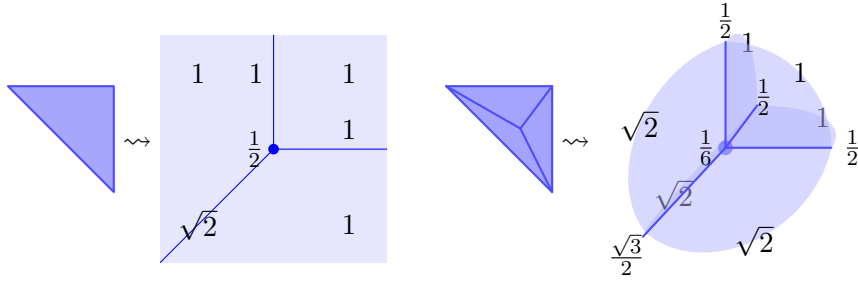


FIGURE 13. Poids de Minkowski associés à différents polytopes (les cônes de dimensions 3 ne sont pas représentés).

duale F , le volume étant calculé dans l'espace tangent à F , donc il n'est jamais nul (voir figure 13). Le volume d'un point dans \mathbb{R}^0 vaut toujours 1. On obtient ainsi une fonction poids $w_P: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

Par le problème de Minkowski, théorème 1.13, on sait que

$$\sum_{\rho \in \Sigma_1} w(\rho) e_\rho = 0,$$

où, vu les choix faits, on doit ici prendre les e_ρ de norme 1. Cette propriété se généralise en dimensions supérieures : pour tout cône τ de dimension au plus $n - 1$,

$$\sum_{\sigma \succ \tau} w(\sigma) \mathbf{n}_{\sigma/\tau} = 0,$$

où l'on rappelle que $\sigma \succ \tau$ signifie que τ est une face de codimension 1 de σ , et où $\mathbf{n}_{\sigma/\tau}$ est le vecteur unitaire normal à τ pointant vers σ . La propriété que nous venons d'énoncer est appelée *condition d'équilibre*. Les poids $w: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient cette condition sont appelés *poids de Minkowski sur Σ* , et l'on note l'espace vectoriel associé $\text{MW}_\bullet(\Sigma)$. Cet espace est gradué en définissant $\text{MW}_k(\Sigma)$ comme étant les poids de Minkowski qui sont nuls en dehors des cônes de dimension k .

En prenant des poids $w \in \text{MW}_{n-k}(\Sigma)$ et $w' \in \text{MW}_{n-\ell}(\Sigma)$, on peut calculer leur *produit d'intersection stable* $w \cdot w' \in \text{MW}_{n-\ell-k}(\Sigma)$ comme illustré figure 14. On considère les supports des poids (le support est l'union des cônes où le poids est non nul). Ensuite,

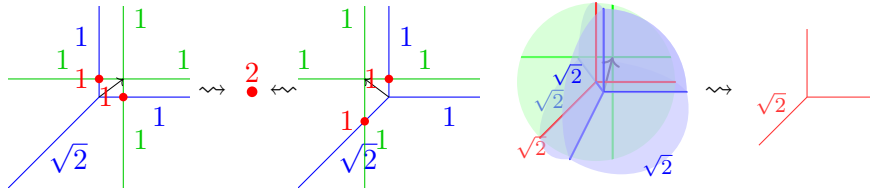


FIGURE 14. Calcul de deux produits dans les poids de Minkowski. Pour le premier produit, deux façons de converger vers la limite sont proposées. Pour le second produit, le poids vert est simplement un plan, et les poids non précisés valent 1.

on translate l'un des supports par petit vecteur générique t (la petite flèche noire sur la figure). On fait l'intersection, et l'on regarde la limite de l'intersection lorsque t tend vers 0. Le poids que l'on met sur la limite de l'intersection de deux cônes est le produit des poids des cônes multiplié par un facteur dépendant de la position relative des espaces tangents aux cônes. (Ce coefficient se calcule comme suit : si E_1, E_2 sont deux sous-espaces de V^* , quitte à se restreindre à $(E_1 + E_2) \cap (E_1 \cap E_2)^\perp$, on peut les supposer complémentaires ; le coefficient est alors le déterminant d'une base orthonormée de E_1 concaténée avec une base orthonormée de E_2 .)

4.2. Liens avec l'algèbre des polytopes et l'algèbre de Chow

Par ailleurs, il y a un produit de dualité entre $\text{MW}_k(\Sigma)$ et $A^k(\Sigma)$ défini par $\langle x_\sigma, w \rangle = w(\sigma)$ (nous n'avons donné la définition de x_σ que pour Σ simplicial, mais elle peut être étendue au cas général).

Théorème 4.1 (dualité entre les poids de Minkowski et l'algèbre de Chow)

Le produit de dualité entre $\text{MW}_k(\Sigma)$ et $A^k(\Sigma)$ est parfait, autrement dit, il induit un isomorphisme $A^k(\Sigma) \simeq \text{MW}_k(\Sigma)^$. \diamond*

Si Σ' est une subdivision de Σ , alors un poids w dans $\text{MW}_\bullet(\Sigma)$ induit un poids subdivisé w' dans $\text{MW}_\bullet(\Sigma')$ de la manière attendue. Plus précisément, soit $\sigma' \in \Sigma'$ et soit σ le plus petit cône de Σ contenant σ' . Si $\dim(\sigma) = \dim(\sigma')$, alors on pose $w'(\sigma') = w(\sigma)$, et sinon

on pose $w'(\sigma') = 0$. En identifiant un poids avec ses subdivisés dans la somme de tous les $\text{MW}_\bullet(\Sigma)$, on obtient l'espace des poids de Minkowski de V^* noté $\text{MW}_\bullet(V^*)$. Comme $\Pi^0(V) \simeq \mathbb{Z}$, on ne doit en fait considérer que les poids de Minkowski dont les poids associés aux cônes de dimension maximale sont entiers (ce qui implique que $\text{MW}_n(V^*) \simeq \mathbb{Z}$).

Théorème 4.2 (isomorphisme entre les poids de Minkowski et l'algèbre des polytopes)

L'application qui à P associe w_P définit un isomorphisme d'algèbre $\Pi(V) \xrightarrow{\simeq} \text{MW}_\bullet(V^)$ qui se restreint en un isomorphisme entre $\Pi^k(V)$ et $\text{MW}_{n-k}(V^*)$ pour tout k .* \diamond

En utilisant l'isomorphisme entre $A^\bullet(V^*)$ et $\Pi(V)$ (théorème 3.15), on obtient donc un isomorphisme $A^k(V^*) \simeq \text{MW}_{n-k}(V^*)$. On vérifie facilement qu'il se restreint en $A^k(\Sigma) \simeq \text{MW}_{n-k}(\Sigma)$ pour tout éventail Σ . Ainsi, en utilisant les deux théorèmes précédents, on obtient la dualité de Poincaré vue dans le théorème 3.22 :

$$A^{n-k}(\Sigma)^* \simeq \text{MW}_{n-k}(\Sigma) \simeq A^k(\Sigma).$$

Entraînement 4.3.

(1) Vérifiez sur la figure 13 que les poids vérifient la condition d'équilibre.

(2) Dans chaque cas, après avoir choisi une origine à V^* , calculez h_P et $\langle h_P, w_P \rangle$. Vous devriez trouver $\dim(P) \cdot \text{Vol}(P)$.

(3) Vérifiez que, si P est un polytope, $\lambda > 0$ un réel et k un entier, la partie de w_P vivant dans $\text{MW}_k(\Sigma_P)$ est multipliée par λ^{n-k} si P est dilaté d'un facteur λ . \diamond

Exercice 4.4.

(1) Se convaincre dans les deux exemples de la figure 13 que $w_P = \exp(\pi_{n-1}(w_P))$ où P désigne le polytope et $\pi_{n-1}(w_P)$ est la partie de w_P dans $\text{MW}_{n-1}(\Sigma)$.

(2) Montrez, en utilisant le théorème 4.2, que $\langle h_P, w_P \rangle$ vaut $\dim(P) \cdot \text{Vol}(P)$ pour tout polytope P . \diamond

4.3. Inverse d'un polytope. Dans cette ultime section, nous donnons les outils pour montrer que l'inverse d'un polytope P dans $\Pi(V)$, qui existe clairement puisqu'il s'agit de $\exp(-\log(P))$, est égal à $(-1)^{\dim(P)} \operatorname{relint}(D_{-1}P)$ où relint désigne l'intérieur relatif.

Exercice 4.5 (inverse d'un polytope). On note $W_{\bullet}(V^*)$ l'espace des poids, sans la condition d'équilibre, c'est-à-dire l'espace $\sum_{\Sigma} \mathcal{F}(\Sigma, \mathbb{R})$ où l'on identifie un poids et ses subdivisés.

Si σ est un cône et y est un point de V^* , on appelle *faces visibles depuis y* et l'on note $\operatorname{vis}_{\sigma}(y)$ l'ensemble des faces de la forme $F_v\sigma$, où v est une direction telle que $v(y) > 0$. On s'intéresse à la fonction $\chi_{\operatorname{vis},\sigma}(y) := \sum_{\gamma \in \operatorname{vis}_{\sigma}(y)} (-1)^{\dim(\gamma)}$.

(1) Justifiez la dénomination « faces visibles ».

(2) Supposons σ de dimension n . Montrez que si y est un point générique d'un espace tangent à une facette $\eta = F_vP$ et z est un point proche de y avec $v(z) > 0$, alors $\operatorname{vis}_{\sigma}(z) = \operatorname{vis}_{\sigma}(y) \sqcup (\mathcal{F}_{\eta} \setminus \operatorname{vis}_{\eta}(y))$, où \mathcal{F}_{η} est l'ensemble des faces de η et $\operatorname{vis}_{\eta}(y)$ est l'ensemble des faces de η visibles depuis y dans l'espace tangent à η .

(3) En déduire par récurrence sur la dimension que, pour tout σ dont le support n'est pas un sous-espace vectoriel de V^* , la fonction $\chi_{\operatorname{vis},\sigma}$ est nulle partout sauf dans l'intérieur de $D_{-1}\sigma$ où elle vaut $(-1)^{\dim(\sigma)+1}$, et que la caractéristique d'Euler-Poincaré de σ , à savoir $\chi_{\sigma} := \sum_{\tau} (-1)^{\dim(\tau)}$, vaut 0.

(4) (*Digression, caractéristique d'Euler-Poincaré d'un polytope*) Si P est un polytope de V , on peut prendre le cône dans $V \times \mathbb{R}$ engendré par $P \times \{1\}$. En considérant ce cône, retrouvez le fait que $\chi_P := \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$ où l'on fait la somme sur toutes les faces de P .

(5) Montrez que $P^* := \sum_F (-1)^{\dim(F)} F$ correspond à l'élément $(-1)^{\dim(P)} \operatorname{relint}(P)$ dans l'algèbre des polytopes. (*Indice* : on pourra relier la valeur de la fonction caractéristique de P^* en l'intérieur d'une face F de P à χ_{σ} , où σ est le cône dual à F dans Σ_P .)

(6) Montrez que l'élément $MW_{\bullet}(V^*)$ associé P^* peut s'écrire comme une somme d'éléments de $W_{\bullet}(V^*)$ indexés par les paires de faces (F, G) de P avec F une face de G , et où le terme indexé par (F, G) vaut 0 partout sauf sur le cône qui est le lieu des points où la

face associée à G dans le cône dual de F n'est pas visible où il vaut $(-1)^{\dim(G)} \text{Vol}(F)$.

(7) En déduire que l'application d'Euler qui envoie P sur P^* s'étend en un morphisme sur $\Pi(V)$ dont la restriction sur $\Pi^k(V)$ est égale à $(-1)^k D_{-1}$.

(8) Conclure. ◇

Remarque 4.6. Nous avons vu au paragraphe 1.6 que, pour un polytope P dont les sommets sont entiers, il existe un polynôme $\text{Ehr}(k)$ dont la valeur en $k \geq 0$ est égale au nombre de points entiers dans $D_k P$. Il se trouve que $(-1)^{\dim(P)} \text{Ehr}(-k)$ est égal au nombre de points entiers dans l'intérieur relatif de $D_k P$. Donc, on pourrait résumer cela en disant que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\text{Ehr}(k)$ est égal au nombre de points entiers dans P^k . ◇

Conclusion

Nous avons pu voir que de nombreuses propriétés des polytopes semblent provenir d'une structure algébrique. Dans certains cas, cette structure algébrique peut provenir de la géométrie algébrique. Par exemple, on peut parfois lier des propriétés des polytopes aux propriétés de l'algèbre cohomologique de certaines variétés dites toriques. On sait cela depuis plusieurs dizaines d'années. Pour obtenir des résultats plus généraux, il faut souvent utiliser des méthodes combinatoires, sans nécessairement oublier l'analogie avec la géométrie algébrique. Certaines méthodes sont particulièrement efficaces, par exemple les preuves par récurrence en utilisant des éclatements et des subdivisions, et nous continuons à mieux les comprendre de nos jours. Cette étude purement combinatoire a permis entre autres de révéler une jolie structure, l'algèbre des polytopes. Nous avons vu trois facettes de cette algèbre : l'algèbre des polytopes de McMullen, l'algèbre de Chow des fonctions polynomiales par cônes et les poids de Minkowski. Chacune a ses avantages et ses inconvénients. La dernière est très pratique pour distinguer deux éléments de l'algèbre, la deuxième permet de révéler les riches propriétés kählériennes et permet de faire le lien plus facilement avec la théorie des variétés

toriques, tandis que la première a une définition plus intuitive et évite d'avoir à choisir et changer d'éventail constamment.

On peut généraliser de manière directe l'algèbre de Chow et les poids de Minkowski d'un éventail, ou du support de cet éventail, lorsque cet éventail n'est plus complet (l'union des faces ne vaut pas V^* tout entier). En général, on s'intéresse à des éventails *purs*, c'est-à-dire que les cônes maximaux sont tous de la même dimension d potentiellement inférieure à n . Pour certaines familles d'éventails particulièrement intéressants (par exemple, les éventails tropicaux liés à la géométrie tropicale, ou encore les éventails de Bergman liés à la théorie des matroïdes), l'algèbre de Chow et les poids de Minkowski de l'éventail ou de son support possèdent certaines, voire la plupart pour certaines familles, des propriétés que nous avons vues dans le cas complet. Une question qui motive une partie de ma recherche actuelle est de comprendre ce qui jouerait le rôle de l'algèbre des polytopes lorsque Σ n'est pas complet. Il n'est même pas évident de savoir à quoi correspondrait V dans le cas où l'on remplace V^* par le support de Σ . Peut-on alors retrouver dans certains cas l'analogie de la dualité entre polyèdres bornés et polytopes, ainsi que le théorème fondamental de la théorie des polytopes ? Que se passe-t-il dans ce cadre-là pour le problème de Minkowski ? Une réponse à cette dernière question offrirait une meilleure compréhension des équations de Monge-Ampère sur les variétés tropicales, et permettrait ainsi d'avancer sur la conjecture SYZ liée à la symétrie miroir en physique théorique.

Références

- [1] K. ADIPRASITO – « Combinatorial Lefschetz theorems beyond positivity », 2018, [arXiv:1812.10454](#).
- [2] K. ADIPRASITO, J. HUH & E. KATZ – « Hodge theory for combinatorial geometries », *Annals of Mathematics. Second Series* **188** (2018), no. 2, p. 381–452.
- [3] O. AMINI & M. PIQUEREZ – « Hodge theory for tropical fans », 2023, [arXiv:2310.15367](#).
- [4] M. BRION – « Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry », in *Parameter spaces (Warsaw, 1994)*, vol. 36, Banach Center Publications, no. 1, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 1996, p. 25–44.
- [5] B. FLEMING & K. KARU – « Hard Lefschetz theorem for simple polytopes », *Journal of Algebraic Combinatorics* **32** (2010), no. 2, p. 227–239.
- [6] W. FULTON & B. STURMFELS – « Intersection theory on toric varieties », *Topology* **36** (1997), no. 2, p. 335–353.

- [7] J. HUH – « Combinatorial applications of the Hodge-Riemann relations », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. IV. Invited lectures* (Hackensack, NJ), World Scientific Publications, 2018, p. 3093–3111.
- [8] P. McMULLEN – « The polytope algebra », *Advances in Mathematics* **78** (1989), no. 1, p. 76–130.
- [9] ———, « On simple polytopes », *Inventiones Mathematicae* **113** (1993), no. 2, p. 419–444.
- [10] WIKIPÉDIA – « Bernstein–Kushnirenko theorem — Wikipédia, L’encyclopédie libre », https://en.wikipedia.org/wiki/Bernstein-Kushnirenko_theorem, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [11] ———, « Brunn–Minkowski theorem — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://en.wikipedia.org/wiki/Brunn-Minkowski_theorem, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [12] ———, « Caractéristique d’Euler — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://fr.wikipedia.org/wiki/Caractéristique_d’Euler, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [13] ———, « Dehn–Sommerville equations — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://en.wikipedia.org/wiki/Dehn-Sommerville_equations, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [14] ———, « Euler characteristic — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [15] ———, « G-conjecture — Wikipédia, l’encyclopédie libre », <https://en.wikipedia.org/wiki/G-conjecture>, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [16] ———, « Mixed Volume — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://en.wikipedia.org/wiki/Mixed_volume, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [17] ———, « Multiplicateur de Lagrange — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://fr.wikipedia.org/wiki/Multiplicateur_de_Lagrange, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [18] ———, « Newton–Okounkov bodies — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Okounkov_body, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [19] ———, « Newton polytope — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polytope, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [20] ———, « Polynôme d’Ehrhart — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme_d’Ehrhart, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [21] ———, « Problèmes de Hilbert — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://fr.wikipedia.org/wiki/Problèmes_de_Hilbert, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [22] ———, « Théorème de Pick — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Pick, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [23] ———, « Théorème de Wallace–Bolyai–Gerwien — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Wallace-Bolyai-Gerwien, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].
- [24] ———, « Troisième problème de Hilbert — Wikipédia, l’encyclopédie libre », https://fr.wikipedia.org/wiki/Troisième_problème_de_Hilbert, [En ligne ; consulté le 9 avril 2025].

Matthieu Piquerez,
E-mail : matthieupi2@yahoo.fr
Url : <http://matthieu.piquerez.fr/>