



# Journées mathématiques X-UPS

Année 2024

Analyse topologique de données

Vincent HUMILIÈRE

**Applications de la théorie de la persistance en géométrie**

*Journées mathématiques X-UPS* (2024), p. 75-90.

<https://doi.org/10.5802/xups.2024-05>

© Les auteurs, 2024.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique  
Route de Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS,  
Institut polytechnique de Paris  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

# APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE LA PERSISTANCE EN GÉOMÉTRIE

*par*

Vincent Humilière

---

**Résumé.** De manière surprenante, les idées issues de l'analyse topologique des données, et la théorie de la persistance en particulier, ont eu des applications très récentes en mathématiques fondamentales. Nous en verrons deux. L'une concerne la dynamique des transformations d'une surface qui préservent l'aire, et l'autre la géométrie des domaines nodaux, c'est-à-dire des ensembles délimités par les zéros des fonctions propres du laplacien.

## Table des matières

1. Applications aux transformations préservant l'aire.....	76
1.1. Le problème du disque déplacé.....	76
1.2. Les difféomorphismes conservatifs du plan sont hamiltoniens.....	78
1.3. Fonctionnelle d'action et points fixes des difféomorphismes hamiltoniens.....	80
1.4. Code-barres associé à un système hamiltonien . . .	81
1.5. Deux théorèmes de stabilité.....	81
1.6. Retour au problème du disque déplacé.....	83
2. Domaine nodaux et persistance (d'après Buhovsky et al.) .....	83
2.1. Le laplacien, son spectre et ses fonctions propres..	83
2.2. Domaines nodaux et théorème de Courant.....	84
2.3. Le théorème de Courant « grossier ».....	86
2.4. Quelques mots sur la démonstration.....	88
Références.....	89

La théorie de la persistance a infiltré depuis quelques années le domaine de la géométrie (au sens large). Il est remarquable qu'une théorie a priori développée pour les applications concrètes, se retrouve finalement utile dans un domaine des maths fondamentales.

Certaines idées de la persistance étaient utilisées depuis longtemps dans un sous-domaine appelé *géométrie symplectique* suite aux travaux de mathématiciens comme [Bar94], [Vit92], [Ush11], mais le langage et la théorie des modules de persistance et des codes-barres y a été introduit par [PS16], rapidement suivis par de nombreux autres travaux.

Dans la partie 1, nous donnerons un aperçu de quelques utilisations des codes-barres en géométrie symplectique, en nous restreignant aux applications qui préservent l'aire pour simplifier. Dans la partie 2, nous discuterons un travail très récent traitant d'un sujet différent : l'étude topologique des fonctions propres de l'opérateur laplacien.

Il s'agit d'un texte de survol qui ne contiendra que très peu de démonstrations. Il ne s'agit pas non plus d'un survol exhaustif. Par exemple, nous ne parlerons pas d'une autre application intéressante à l'étude du laplacien de Witten par [LPNV13].

### 1. Applications aux transformations préservant l'aire

Cette partie aurait pu être intitulée « Applications en géométrie symplectique ». En effet, les transformations du plan (ou d'une surface plus générale) qui préservent l'aire sont un cas particulier des *transformations symplectiques* qui peuvent être définies sur des espaces plus généraux, de dimension arbitrairement grande. Nous nous restreignons à la dimension 2 par souci de simplicité, mais la plupart des énoncés présentés ici admettent des généralisations.

Nous allons motiver le contenu de cette partie par un problème d'apparence anodine.

**1.1. Le problème du disque déplacé.** Dans toute la partie 1, on note  $\mathbb{D}$  le disque euclidien de rayon 1 du plan  $\mathbb{R}^2$ . Nous entendrons par *disque*, toute partie du plan homéomorphe à  $\mathbb{D}$ . Nous dirons qu'un homéomorphisme  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  *déplace* un disque  $D \subset \mathbb{D}$  si

$$f(D) \cap D = \emptyset.$$

**Exercice 1.1.** Montrer que pour tout  $A > 0$  suffisamment petit, il existe un homéomorphisme arbitrairement proche de l'identité en norme uniforme qui déplace un disque d'aire  $A$ .

Ce n'est pas si facile, mais c'est possible! L'idée est de considérer une homothétie  $f : x \mapsto (1 - \varepsilon)x$ , que l'on modifie pour obtenir un homéomorphisme qui est l'identité au voisinage du bord. Une telle fonction  $f$  peut être trouvée arbitrairement proche de l'identité. À l'intérieur de ce disque, on considère un disque  $D$  d'aire  $A$ , étiré et enroulé en spirale, comme sur la figure 1. Si on ajuste bien les choses, alors  $f$  déplace  $D$ . Cela est possible dès que  $A < \frac{1}{2}\text{aire}(\mathbb{D})$ .

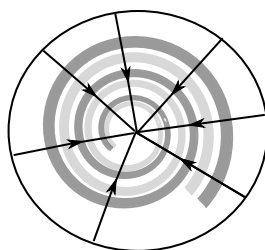


FIGURE 1. Un disque enroulé en spirale en gris et son image par homothétie en gris plus clair.

On voit sur cet exemple que  $f$  ne préserve pas du tout l'aire. Au contraire, elle la contracte. D'où la question suivante initialement posée par F. Béguin, S. Crovisier et F. Le Roux.

**Question 1.2 (Problème du disque déplacé).** Existe-t-il  $A > 0$  et un homéomorphisme arbitrairement proche de l'identité en norme uniforme *qui préserve l'aire* et déplace un disque d'aire  $A$  ?

La réponse est négative comme prouvé indépendamment par [Sey13] et [DH13]. La solution passe par des méthodes assez avancées, l'un des ingrédients étant la théorie de la persistance. Comme ces travaux sont antérieurs à l'introduction du langage de la persistance dans ce domaine des mathématiques, les articles cités ci-dessus n'y font pas explicitement référence, mais la théorie est là de manière sous-jacente. Nous allons voir, dans cette partie, comment elle apparaît dans la solution de ce problème. Au passage, nous mentionnerons d'autres applications.

**1.2. Les difféomorphismes conservatifs du plan sont hamiltoniens.** Nous allons commencer par indiquer un procédé permettant de construire tous les difféomorphismes conservatifs (c'est-à-dire qui préservent l'aire) du plan à support compact. Pour une raison que nous expliquerons plus tard, on note  $(q, p)$  les coordonnées standard du plan.

Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$  du plan, à support compact. On lui associe le champ de vecteurs  $X_H$  obtenu en appliquant une rotation d'angle  $\pi/2$  au gradient  $\nabla H$ . En coordonnées, cela donne

$$X_H(q, p) = (\partial_p H(q, p), -\partial_q H(q, p)).$$

Notez que ce champ est partout tangent aux courbes de niveaux de  $H$ , donc les solutions de l'équation différentielle  $\dot{y} = X_H(y)$  suivent les courbes de niveau (Figure 2).

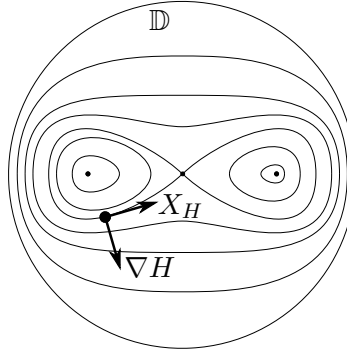


FIGURE 2. Le champ de vecteur  $X_H$  et les courbes de niveau.

La solution au temps  $t$  de cette équation avec condition initiale  $x$  est notée  $\phi_H^t(x)$ . Dans la suite, on suppose que cette solution existe en tout temps, ce qui peut être assuré en mettant des conditions sur  $H$  à l'infini. La famille d'applications  $(\phi_H^t)$  s'appelle le *flot hamiltonien* de  $H$ . Une version « à paramètre » du théorème de Cauchy-Lipschitz, permet de montrer que pour tout  $t$ ,  $\phi_H^t$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 1.3.** *Le difféomorphisme  $\phi_H^t$  préserve l'aire.*

*Démonstration.* La matrice jacobienne de  $\phi_H^t$  est la résolvante d'une équation linéaire associée à la jacobienne de  $X_H$ . Or celle-ci prend la forme

$$\begin{pmatrix} \partial_{qp}^2 H & \partial_{pp}^2 H \\ -\partial_{qq}^2 H & -\partial_{pq}^2 H \end{pmatrix}$$

et est donc de trace nulle. On en déduit que le déterminant de la jacobienne de  $\phi_H^t$  vaut 1, ce qui signifie que  $\phi_H^t$  préserve l'aire.  $\square$

La dynamique ainsi obtenue est extrêmement simple, puisque les orbites suivent les courbes de niveau. On dit que le système est *intégrable*. Cependant, tout ce qui précède se généralise aux fonctions  $H$  dépendant du temps  $t$ , que l'on appelle *hamiltoniens*. On obtient alors un champ  $X_H$  dépendant du temps, ce qui ouvre la possibilité à des dynamiques plus compliquées. En combinant un théorème de Smale avec un argument dû à Moser, on peut démontrer que tous les difféomorphismes du plan qui préservent l'aire sont obtenus par cette recette.

**Théorème 1.4.** *Tout difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  qui préserve l'aire et coïncide avec l'identité hors d'un compact, est de la forme  $\phi_H^t$  pour un certain hamiltonien  $H = (H_t)_{t \in \mathbb{R}}$  à support compact de  $\mathbb{R}^2$ .*

Historiquement, le terme « hamiltonien » vient de la mécanique classique et de la formulation des équations de la mécanique newtonienne sous la forme des équations de Hamilton. La remarque suivante illustre ce lien avec la mécanique classique.

**Remarque 1.5 (Lien avec la mécanique classique)**

Pour une fonction  $H$  de la forme

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q),$$

et en posant  $y(t) = (q(t), p(t))$ , l'équation différentielle  $\dot{y} = X_H(y)$  s'écrit sous la forme des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{q} = -p \\ \dot{p} = V'(q). \end{cases}$$

Celles-ci impliquent la fameuse loi de Newton

$$\ddot{q} = -V'(q).$$

Ceci justifie le choix de notation pour nos coordonnées de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, la coordonnée  $q$  représente la position et  $p$  la quantité de mouvement, comme en mécanique classique. La fonction  $H$  représente l'énergie du système. Elle est préservée au cours du mouvement.

**1.3. Fonctionnelle d'action et points fixes des difféomorphismes hamiltoniens.** Soit  $H = (H_t)$  un hamiltonien. On appelle lacet de  $\mathbb{R}^2$ , toute application  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  et telle que  $x(0) = x(1)$ . On notera  $x(t) = (q(t), p(t))$  ses coordonnées. On peut définir sur l'espace des lacets, une fonction  $\mathcal{A}_H$  appelée *fonctionnelle d'action* et définie par

$$\mathcal{A}_H(x) = \int_0^1 (p(t)\dot{q}(t) - H_t(q(t), p(t))) dt.$$

Remarquez que le premier terme ci-dessus s'interprète comme l'aire entourée par le lacet  $x$ .

Le classique « principe de moindre action » des physiciens se formule alors par :

**Proposition 1.6.** *Les points critiques de  $\mathcal{A}_H$  sont les orbites du champ de vecteurs  $X_H$ . Par conséquent, ils sont en bijection avec les points fixes de  $\phi_H^1$ .*

*Démonstration.* Écrivons une perturbation d'un lacet  $x$  sous la forme  $x + \delta x$ . Alors, avec quelques abus de notation,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(x + \delta x) &= \int_0^1 \left( (p + \delta p)(\dot{q} + \delta \dot{q}) - H(q + \delta q, p + \delta p) \right) dt \\ &= \int_0^1 (p\dot{q} - H(q, p)) dt + \int_0^1 (\delta p q + p \delta \dot{q} - \partial_q H \delta q - \partial_p H \delta p) dt + o(\delta x). \end{aligned}$$

Par intégration par partie,  $\int_0^1 p \delta \dot{q} = -\int_0^1 \dot{p} \delta q$ , on obtient donc une formule pour la différentielle de  $\mathcal{A}_H$  :

$$d\mathcal{A}_H(x)(\delta x) = \int_0^1 ((\dot{p} + \partial_q H) \delta q + (\dot{q} - \partial_p H) \delta p) dt.$$

La proposition en découle.  $\square$

#### 1.4. Code-barres associé à un système hamiltonien

La proposition 1.6 est le point clé nous permettant d'utiliser les outils de la persistance pour étudier les difféomorphismes préservant l'aire. En effet, étant donné un tel difféomorphisme  $h$ , il s'écrit sous la forme  $\phi_H^1$  d'après le théorème 1.4, et l'on peut considérer le code-barres de la fonctionnelle d'action, c'est-à-dire le code-barres associé par la définition 5.9 du texte [Oud24] au module de persistance donné par l'homologie des sous-niveaux de  $\mathcal{A}_H$ . Comme celle-ci n'est pas définie sur un espace de dimension finie les choses ne sont pas si simples, mais c'est l'idée. En pratique, on peut se ramener à la dimension finie en « approximant » l'espace des lacets par des espaces de dimension finie (par exemple avec des lacets affines par morceaux, ou alors en tronquant la série de Fourier). Une autre approche consiste à passer par la théorie de Floer, une grosse machinerie permettant d'associer un code-barre à la fonctionnelle d'action dans des cadres très généraux.

**Théorème 1.7** ([PS16]). *On peut associer à  $\mathcal{A}_H$  un code-barres, dont les extrémités des barres correspondent aux valeurs critiques de  $\mathcal{A}_H$ . Ce code-barres ne dépend que de  $\phi_H^1$ , autrement dit, on peut associer à tout difféomorphisme conservatif  $\phi$  un code-barres  $B(\phi)$ .*

Rappelons que dans le code-barres d'une fonction, les extrémités des barres correspondent aux valeurs critiques de la fonctions. D'après la proposition 1.6 les extrémités des barres de  $B(\phi)$  portent donc de l'information sur les points fixes de  $\phi$ . Par exemple, le nombre de barres minore le nombre de valeurs critiques de  $\mathcal{A}_H$ , donc minore le nombre de points fixes.

Récemment, cette propriété des codes-barres (qui admet une extension en dimension supérieure) a par exemple été exploitée par [She22] avec succès pour démontrer une version en dimension supérieure d'un célèbre théorème de [Fra96] qui affirme qu'un difféomorphisme conservatif de la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui admet plus que deux points fixes doit nécessairement avoir une infinité d'orbites périodiques.

**1.5. Deux théorèmes de stabilité.** Le théorème de stabilité (théorème 2.1 du texte [Car24]) admet l'analogie suivant dans le contexte présenté ici.



**Théorème 1.8.** *Pour tous hamiltoniens  $H, K$  à support compact dans  $\mathbb{R}^2$*

$$d_b(B(\phi_H^1), B(\phi_K^1)) \leq \int_0^1 \|H_t - K_t\|_\infty dt.$$

La quantité présente dans le membre de droite est appelée *norme de Hofer*. Elle est omniprésente dans le domaine de la géométrie symplectique.

Ce théorème signifie qu'une petite perturbation de l'énergie du système change peu le code-barres du point de vue de la distance bottleneck. Les barres détectent donc des points fixes qui persistent par perturbation de l'énergie du système.

On sait depuis longtemps (les travaux de Poincaré) que tous les difféomorphismes ne sont pas intégrables. On peut cependant se demander si à partir d'un système quelconque, on peut se ramener à un système intégrable en modifiant légèrement l'énergie du système. Ce problème est ouvert à l'heure actuelle dans le disque mais il a été résolu (par la négative) sur les surfaces compactes sans bord autres que la sphère ([PS16], [CM23]) où toutes les définitions et résultats qui précèdent se généralisent : *Soit  $\Sigma$  une surface compacte sans bord autre que la sphère et munie d'une forme d'aire. Alors, pour toute constante  $C$ , il existe un difféomorphisme  $\phi$  tel que pour tout hamiltonien  $H$  tel que  $\phi = \phi_H^1$ , et tout hamiltonien  $K$  intégrable (c'est-à-dire ne dépendant pas du temps) on ait  $\int_0^1 \|H_t - K\|_\infty dt \geq C$ .* La démonstration utilise les codes-barres de manière cruciale ainsi que le théorème de stabilité ci-dessus.

Le code-barres  $B(\phi)$  associé à un difféomorphisme  $\phi$  admet un autre type de stabilité que nous allons maintenant énoncer. L'espace des codes-barres est toujours muni de la distance bottleneck.

**Théorème 1.9** ([LRSV21]). *L'application  $\phi \mapsto B(\phi)$  est continue sur l'espace des difféomorphismes qui préservent l'aire muni de la topologie de la convergence uniforme et s'étend par continuité à tous les homéomorphismes qui préservent l'aire.*

Ce résultat a des applications à l'étude des homéomorphismes préservant l'aire que nous ne détaillerons pas ici ; voir [LRSV21].

**1.6. Retour au problème du disque déplacé.** Le théorème 1.9 a permis une solution négative à la question 1.2

**Théorème 1.10** ([DH13, Sey13]). *Pour tout  $A > 0$ , il existe un voisinage de l'identité  $\mathcal{V}$  dans l'espace des difféomorphismes conservatifs du disque qui préservent l'aire, muni de la distance uniforme, telle que pour tout disque  $D$  d'aire  $A$  et tout élément de  $f \in \mathcal{V}$ , on ait  $f(D) \cap D \neq \emptyset$ .*

L'idée de la démonstration consiste à utiliser la propriété du code-barres suivante. Soit  $S$  l'ensemble constitué des extrémités des barres semi-infinies de  $B(\phi)$ . Notons  $\gamma(\phi)$  le diamètre de l'ensemble  $S$ . Un lemme dû à C. Viterbo [Vit92] affirme que *si  $\phi$  déplace un disque d'aire  $D$ , alors  $\gamma(\phi) \geq \text{aire}(D)$* . D'après le théorème 1.9, si  $\phi$  est proche de l'identité, alors  $\gamma(\phi)$  est proche de  $\gamma(\text{id})$ , qui vaut 0. D'après le lemme, il ne peut donc pas déplacer de disque d'aire trop grande.

## 2. Domaine nodaux et persistance (d'après Buhovsky et al.)

Cette partie présente une très belle application de la persistance à l'étude géométrique des fonctions propres de l'opérateur laplacien, parue dans un travail récent de L. Buhovsky, J. Payette, I. Polterovich, L. Polterovich, E. Shelukhin et V. Stojisavljevic ; [BPP<sup>+</sup>22]

*Remerciements.* Nous sommes très reconnaissants envers Lev Buhovsky et Vukasin Stojisavljevic pour l'aide qu'ils nous ont apportée dans la préparation de cette partie.

### 2.1. Le laplacien, son spectre et ses fonctions propres

Dans toute la partie 2, on note  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine borné, c'est-à-dire un compact qui est l'adhérence d'un ouvert. Les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^n$  seront notées  $x_1, \dots, x_n$ . On munit également  $\mathbb{R}^n$  de la mesure de Lebesgue. On considère l'opérateur laplacien

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

défini sur les fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient une condition de Dirichlet, c'est-à-dire qui s'annulent sur le bord de  $\Omega$ .

On s'intéresse aux valeurs propres et aux fonctions propres de cet opérateur. Pour les étudier précisément, il faudrait préciser sur quel espace de fonctions l'opérateur est défini. Pour ne pas nous écarter de notre propos, nous ne détaillerons pas, mais disons simplement qu'il faut se placer dans un certain espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  et étendre l'opérateur laplacien à cet espace à l'aide de la dérivation « faible » (appelée aussi « dérivation au sens des distributions »). Le résultat suivant résume les points essentiels (voir par exemple [LMP23, 2.2.21]).

**Théorème 2.1.** *Le spectre de l'opérateur  $\Delta$  est une suite croissante de réels positifs*

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

*qui tend vers l'infini. Les fonctions propres correspondantes  $f_j$  sont de classes  $C^\infty$  et forment une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ .*

Par  $C^\infty$  on entend ici que les fonctions propres sont de classe  $C^\infty$  dans l'intérieur de  $\Omega$  et qu'elles s'étendent de manière  $C^\infty$  au voisinage des points de lissité du bord de  $\Omega$ .

**Exemple 2.2.** Pour un rectangle  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  dans  $\mathbb{R}^2$ , les valeurs propres sont les réels de la forme

$$\lambda = \pi^2 \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right), \quad \alpha, \beta = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Elles correspondent aux fonctions propres

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\beta\pi}{b}y\right),$$

qui forment bien une base hilbertienne (par la théorie des séries de Fourier).

**2.2. Domaines nodaux et théorème de Courant.** Définissons maintenant la notion centrale de la partie 2, les domaines nodaux.

**Définition 2.3.** Étant donnée une fonction  $f$ , on appelle *ensemble nodal* de  $f$  l'ensemble  $f^{-1}(0)$ . Un domaine nodal de  $f$  est une composante connexe de  $\Omega \setminus f^{-1}(0)$ . On notera  $m_0(f)$  le nombre de domaines nodaux de  $f$ .

Les expériences numériques montrent que les domaines nodaux tendent à se complexifier lorsque  $\lambda_j$  tend vers l'infini, donnant lieu à de belles images (voir par exemple figure 3)

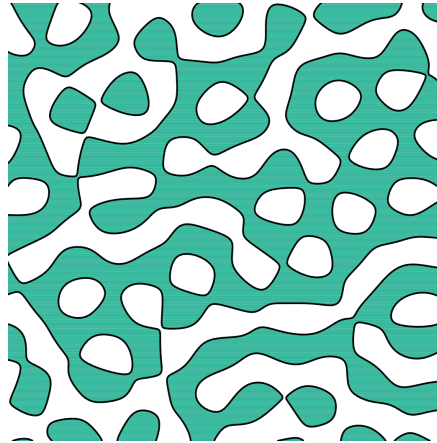


FIGURE 3. Exemples de domaines nodaux. Image réalisée par Dmitry Belyaev <http://people.maths.ox.ac.uk/belyaev/>.

**Exemple 2.4.** Dans le cas d'un intervalle  $\Omega = [0, a]$ , la  $j$ -ième fonction propre est donnée par  $f_j(x) = \sin(\frac{j\pi}{a}x)$ . On voit que  $m_0(f_j) = j$ .

En dimension plus grande, il n'y a en général pas de telle égalité, mais nous avons une inégalité :

**Théorème 2.5 (Courant, 1923).** *Pour tout domaine  $\Omega$ ,*

$$m_0(f_j) \leq j.$$

Par ailleurs, la *loi de Weyl* affirme que le nombre  $N(\lambda)$  de valeurs propres plus petites que  $\lambda$  vérifie l'équivalent

$$N(\lambda) \sim C\lambda^{n/2}, \quad \text{où} \quad C = \frac{\text{Vol}(B(1))\text{Vol}(\Omega)}{(2\pi)^n}.$$

Avec le théorème de Courant, nous en déduisons :

**Corollaire 2.6.**  $m_0(f_j) = O(\lambda_j^{n/2})$ .

Les résultats ci-dessus restent vrais pour une classe plus large d'opérateurs dits de *Laplace-Beltrami*. Ceux-ci généralisent le laplacien usuel sur des espaces courbés. On peut se demander dans quelle mesure le corollaire ci-dessus peut être généralisé au-delà. Voici plusieurs directions envisageables.

**Problème 2.7.** Peut-on généraliser le théorème 2.5 et le corollaire 2.6

- (i) aux combinaisons linéaires de fonctions propres ?
- (ii) à d'autres opérateurs, éventuellement d'ordre supérieur ?
- (iii) à l'homologie de degré supérieur, en considérant  $m_r(f) = \dim H_r(\Omega \setminus f^{-1}(0))$  ?

Le problème (i) est connu sous le nom de conjecture de Courant-Herrmann. Il a d'abord été résolu positivement, mais la démonstration comportait une erreur, et des contre-exemples ont été donnés (par exemple [Vir79]). Très récemment, Buhovsky, Logunov et Sodin ont construit un exemple d'opérateur de Laplace-Beltrami et une combinaison linéaire de deux fonctions propres ayant un nombre infini de domaines nodaux ; [BLS20]. Pour plus de détails sur ce problème, voir [BPP<sup>+</sup>22] et les références qui s'y trouvent.

Pour le problème (ii), une classe naturelle d'opérateurs à considérer est celle des *opérateurs elliptiques*, c'est-à-dire de la forme

$$(2.1) \quad Pf = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} + c(x)f,$$

avec  $A(x) = a_{ij}(x)$  une matrice symétrique définie positive. Cette famille d'opérateurs inclut les opérateurs de Laplace-Beltrami. De plus, tous les opérateurs elliptiques vérifient un théorème spectral analogue au théorème 2.1.

Comme montré par [BPP<sup>+</sup>22], la plupart des problèmes ci-dessus ont des réponses négatives. Cependant, la théorie de la persistance va permettre de formuler une version du théorème de Courant, qui répond positivement à tous ces problèmes.

**2.3. Le théorème de Courant « grossier ».** L'idée sous-jacente va être d'ignorer les « petites oscillations » pour ne garder que les oscillations significatives des fonctions.

**Définition 2.8** ([PS07]). Soit  $\delta > 0$ . Un domaine nodal  $U$  d'une fonction  $f$  est dit  $\delta$ -profond si  $\max_U |f| > \delta$ . Nous noterons  $m_0(f, \delta)$  le nombre de domaines nodaux  $\delta$ -profonds de  $f$ .

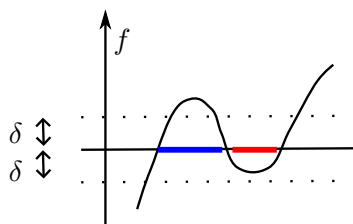


FIGURE 4. En bleu un domaine nodal  $\delta$ -profond, en rouge un domaine nodal non  $\delta$ -profond.

On peut aussi définir une version de degré homologique supérieur en posant

$$m_r(f, \delta) = \text{Rang}(H_r(\{|f| > \delta\}) \longrightarrow H_r(\Omega \setminus f^{-1}(0))),$$

où l'application ci-dessus est induite par l'inclusion.

La version grossière du théorème de Courant, due à L. Buhovsky, J. Payette, I. Polterovich, L. Polterovich, E. Shelukhin et V. Stojisavljevic [BPP<sup>+</sup>22] s'énonce comme suit :

**Théorème 2.9.** Soit  $P$  un opérateur elliptique (par exemple le laplacien) sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Notons  $\mathcal{F}_\lambda$  l'espace engendré par les fonctions propres de  $P$  associées à des valeurs propres plus petites que  $\lambda$ . Soient  $r \geq 0$  et  $k > n/2$  des entiers. Alors, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\lambda > 0$ , tout  $\delta > 0$ , et toute fonction  $f \in \mathcal{F}_\lambda$  normalisée par  $\|f\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , on a

$$m_r(f, \delta) \leq C\delta^{-n/k}(1 + \lambda)^{n/2}.$$

Nous n'avons défini que les opérateurs elliptiques d'ordre 2, mais ce résultat s'applique en fait aussi aux opérateurs d'ordre supérieur.

On voit qu'en remplaçant le compte des domaines nodaux  $m_0(f)$  par un compte « grossier »  $m_0(f, \delta)$ , le corollaire 2.6 est encore vérifié, ce quel que soit  $\delta$ . On voit aussi que cette version grossière à l'avantage

de se généraliser dans chacune des trois directions proposées par le problème 2.7.

Remarquez enfin que l'estimée que l'on obtient explose lorsque  $\delta$  tend vers 0.

**2.4. Quelques mots sur la démonstration.** Terminons cette partie par quelques mots sur la démonstration du théorème 2.9, où l'on verra apparaître la théorie de la persistance. Nous aurons besoin de la norme Sobolev  $H^k$  d'une fonction  $f$  :

$$\|f\|_{H^k} := \left( \sum_{i=1}^k \|D^i f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

*Étape 1 : estimées elliptiques.* Des résultats très classiques d'analyse des opérateurs elliptiques affirment que la norme  $\|f\|_{H^k}$  d'une fonction propre associée à  $\lambda$  est contrôlée par une fonction de  $\lambda$  et par la norme  $L^2$  de  $f$ . Cela permet aux auteurs de réduire le théorème 2.9 au résultat suivant :

**Théorème 2.10.** *Pour tout  $r \geq 0$  et tout  $k > n/2$ , il existe une constante  $C > 0$ , telle que pour toute fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , on a*

$$m_r(f, \delta) \leq C \delta^{-n/k} \|f\|_{H^k}^{n/2}.$$

Notez que ce résultat s'applique à toute fonction, il n'y a plus d'opérateur elliptique dans cet énoncé.

Pour la suite, nous aurons besoin de la notation suivante. Pour toute fonction  $f$ , notons  $N_\delta(f)$  le nombre de barres finies de longueur strictement supérieures à  $\delta$  dans le code-barres de  $f$ . Comme  $m_r(f, \delta) \leq N_\delta(-|f|)$ , il nous suffit d'être capable de contrôler la quantité  $N_\delta(f)$ .

*Étape 2. Le cas des polynômes sur un cube.* Un résultat classique de [Mil64] affirme qu'une fonction polynôme générique de degré  $k$  sur  $\mathbb{R}^n$  admet au plus  $(k-1)^n$  points critiques. Ce résultat peut être traduit en termes de code-barres par l'estimée :

$$(2.2) \quad N_0(Q) = O(k^n).$$

*Étape 3. Le théorème de stabilité entre en jeu.* Le théorème de stabilité (théorème 2.1 du texte [Car24]) implique les inégalités suivantes. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que  $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ , alors :

$$N_\delta(f) \leq N_{\delta-2\varepsilon}(g) \leq N_{\delta-4\varepsilon}(f).$$

On voit donc qu'à l'aide de (2.2), on obtiendra une estimation de  $N_\delta(F)$  si l'on obtient une bonne approximation de  $f$  par des polynômes.

*Étape 4. Approximation polynomiale.* Le théorème de Morrey-Sobolev affirme que dans l'espace des fonctions continues sur le cube  $[0, a]^n$  muni de la norme uniforme, la distance d'une fonction lisse  $f$  à l'espace des polynômes de degré  $\leq k - 1$  est majorée par

$$Ca^{k-n/2} \|D^k f\|_{L^2([0,a]^n)}.$$

Ceci fournit la « bonne approximation » espérée et permet de résoudre le cas du cube.

*Étape 5. Du cube à tout domaine.* Cette dernière étape est délicate. Les auteurs du théorème 2.9, parviennent à passer du cube à tout domaine  $\Omega$  en remplissant  $\Omega$  avec des cubes de taille variable. Cela passe par des arguments d'algèbre sur les modules de persistance, permettant de recoller les estimées présentes sur les différents cubes. On a par exemple une formule du type :

$$N_{2\delta}(f|_{U_1 \cup U_2}) \leq N_\delta(f|_{U_1}) + N_\delta(f|_{U_2}) + N_\delta(f|_{U_1 \cap U_2}).$$

Ceci termine cette exposition des grandes lignes de la démonstration. Signalons que la très belle idée consistant à passer par une approximation polynomiale pour obtenir des estimées sur toute fonction avait déjà été utilisée par [Yom85].

## Références

- [Bar94] S. A. BARANNIKOV – « The framed Morse complex and its invariants », in *Singularities and bifurcations*, Adv. Soviet Math., vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994, p. 93–115.
- [BLS20] L. BUHOVSKY, A. LOGUNOV & M. SODIN – « Eigenfunctions with infinitely many isolated critical points », *Internat. Math. Res. Notices* (2020), no. 24, p. 10100–10113.



- [BPP<sup>+</sup>22] L. BUHOVSKY, J. PAYETTE, I. POLTEROVICH, L. POLTEROVICH, E. SHELUKHIN & V. STOJISAVLJEVIĆ – « Coarse nodal count and topological persistence », 2022, [arXiv:2206.06347](https://arxiv.org/abs/2206.06347).
- [Car24] M. CARRIÈRE – « Théorie de la persistance (2/2) : stabilité », in *Analyse topologique de données*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2024, ce volume.
- [CM23] A. CHOR & M. MEIWES – « Hofer's geometry and topological entropy », *Compositio Math.* **159** (2023), no. 6, p. 1250–1299.
- [DH13] D. N. DORE & A. D. HANLON – « Area preserving maps on  $S^2$  : a lower bound on the  $C^0$ -norm using symplectic spectral invariants », *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* **20** (2013), p. 97–102.
- [Fra96] J. FRANKS – « Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero », *New York J. Math.* **2** (1996), p. 1–19.
- [LPNV13] D. LE PEUTREC, F. NIER & C. VITERBO – « Precise Arrhenius law for  $p$ -forms : the Witten Laplacian and Morse-Barannikov complex », *Ann. Henri Poincaré* **14** (2013), no. 3, p. 567–610.
- [LRSV21] F. LE ROUX, S. SEYFADDINI & C. VITERBO – « Barcodes and area-preserving homeomorphisms », *Geom. Topol.* **25** (2021), no. 6, p. 2713–2825.
- [LMP23] M. LEVITIN, D. MANGOUBI & I. POLTEROVICH – *Topics in spectral geometry*, Graduate Studies in Math., vol. 237, American Mathematical Society, Providence, RI, 2023.
- [Mil64] J. W. MILNOR – « On the Betti numbers of real varieties », *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), p. 275–280.
- [Oud24] S. OUDOT – « Théorie de la persistance (1/2) : structure », in *Analyse topologique de données*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2024, ce volume.
- [PS16] L. POLTEROVICH & E. SHELUKHIN – « Autonomous Hamiltonian flows, Hofer's geometry and persistence modules », *Selecta Math. (N.S.)* **22** (2016), no. 1, p. 227–296.
- [PS07] L. POLTEROVICH & M. SODIN – « Nodal inequalities on surfaces », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **143** (2007), no. 2, p. 459–467.
- [Sey13] S. SEYFADDINI – « The displaced disks problem via symplectic topology », *Comptes Rendus Mathématique* **351** (2013), no. 21-22, p. 841–843.
- [She22] E. SHELUKHIN – « On the Hofer-Zehnder conjecture », *Ann. of Math. (2)* **195** (2022), no. 3, p. 775–839.
- [Ush11] M. USHER – « Boundary depth in Floer theory and its applications to Hamiltonian dynamics and coisotropic submanifolds », *Israel J. Math.* **184** (2011), p. 1–57.
- [Vir79] O. J. VIRO – « Construction of multicomponent real algebraic surfaces », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **248** (1979), no. 2, p. 279–282.
- [Vit92] C. VITERBO – « Symplectic topology as the geometry of generating functions », *Math. Ann.* **292** (1992), no. 4, p. 685–710.
- [Yom85] Y. YOMDIN – « Global bounds for the Betti numbers of regular fibers of differentiable mappings », *Topology* **24** (1985), no. 2, p. 145–152.

Vincent Humilière, Sorbonne Université and Université de Paris, CNRS, IMJ-PRG, F-75006 Paris, France, & Institut Universitaire de France  
*E-mail* : [vincent.humiliere@imj-prg.fr](mailto:vincent.humiliere@imj-prg.fr)  
*Url* : <https://webusers.imj-prg.fr/~vincent.humiliere/>