PRÉFACE

La formalisation abstraite de la mécanique quantique a conduit Heisenberg au fameux principe d'incertitude. Les textes réunis dans ce volume présentent les objets mathématiques qui gouvernent cette formalisation.

Partant d'un sujet de concours (X 2014) où est introduit le groupe d'Heisenberg, *Pierre Pansu* en explicite la géométrie et met en évidence ses propriétés fractales. Il explique aussi en quoi cette géométrie émerge de la thermodynamique, de la théorie du contrôle optimal, et comment elle est intimement attachée aux groupes nilpotents.

Les débuts de la mécanique quantique ont été marqués par deux approches, la mécanique ondulatoire concrétisée par l'équation de Schrödinger et la mécanique des matrices de Heisenberg. *Francis Nier* expose le théorème de Stone-Von Neumann, qui fait la synthèse des deux points de vue. Il offre un panorama des nombreux prolongements de ce théorème.

Olivier Schiffmann introduit enfin l'espace de Fock, qui surgit d'un autre chapitre de la physique, celui des opérateurs de création et d'annihilation de particules. Il est lui aussi gouverné par les propriétés de l'algèbre de Lie de Heisenberg, mais en dimension infinie cette fois.

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, la Direction des Services de l'Enseignement et le Centre Poly-Média, pour l'aide matérielle importante qu'ils ont apportée à la préparation de ces journées et à la publication de ce volume. Nos remerciements

vont aussi au Labex Mathématique Hadamard pour le financement des captations vidéos des exposés, ainsi qu'à Hélios Azzollini pour leur réalisation remarquable, mises en ligne sur la chaîne Youtube de l'École polytechnique : `https://www.youtube.com/playlist?list=PLrRN3yszYHZkR9vyUeOVkcF6yy4FjgkMn`
Emmanuel Breuillard nous a autorisés à utiliser une image qu'il a produite (voir le texte de Pierre Pansu pour sa signification) pour l'illustration de couverture, et nous l'en remercions.

Nous remercions enfin le secrétariat du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, notamment Carole Juppin et Marine Amier, qui assure chaque année le bon déroulement des journées.

Pascale Harinck, Alain Plagne et Claude Sabbah

EN GUISE D'INTRODUCTION

Qui était Werner Heisenberg ?

Né en 1901, Werner Heisenberg a soutenu sa thèse à Munich en 1923, sous la direction d'Arnold Sommerfeld, sur des questions de mécanique des fluides. Peu après, sous l'influence de Max Born qui l'accueille à Göttingen puis de Niels Bohr qu'il rejoint en 1926 à Copenhague, Heisenberg s'oriente vers des questions plus fondamentales, et ses résultats, publiés dès 1925 avec Max Born et Pascual Jordan, lui valent un poste de professeur à Leipzig dès 1927.

Il faut dire que l'article des trois auteurs propose rien moins qu'une formalisation abstraite de la mécanique quantique. Heisenberg découvre dès 1927 le fameux principe d'incertitude. Ces travaux lui valent une renommée immédiate, consacrée par le prix Nobel de physique en 1932.

À partir de 1933, le climat en Allemagne se détériore avec l'arrivée au pouvoir du parti nazi, lequel lance l'anathème contre les scientifiques juifs, comme Einstein, qui sont obligés de fuir. Heisenberg choisit de rester, quitte à accepter des compromis. En 1942, il devient directeur de l'Institut de Physique Kaiser Wilhelm (équivalent du CNRS français) à Berlin et responsable du programme nucléaire allemand. En 1945, il fait partie des 10 savants allemands que les alliés capturent et assignent à résidence à Farm Hall en Angleterre. Au bout de 6 mois, convaincus que les physiciens allemands avaient trop de retard sur leurs homologues britanniques et américains pour présenter un danger, les alliés relâchent les savants.

Heisenberg reprend son activité de recherche. Il retrouve en 1951 la direction de l'Institut Max Planck de physique (qui a succédé à la Kaiser Wilhelm Gesellschaft). En 1957, il signe l'appel des 18 de Göttingen contre le développement d'une bombe atomique en Allemagne. Son ouvrage de souvenirs *La partie et le tout* paraît en 1969. Il y raconte notamment comment, lorsqu'il était étudiant, le mathématicien Ferdinand von Lindemann l'a découragé d'étudier davantage les mathématiques...

L'approche de Heisenberg de la mécanique quantique

Une particule en dimension 1 est repérée par un réel q, sa position. Sa quantité de mouvement est notée p. En étudiant la quantification des raies spectrales de l'atome d'hydrogène, Heisenberg est arrivé à l'hypothèse que ces deux quantités devaient être vues comme des opérateurs reliés par la relation $[p,q] = pq - qp = (h/2i\pi)\,\mathrm{Id}$, où h désigne la constante de Planck. L'opérateur $r = (h/2i\pi)\,\mathrm{Id}$ étant proportionnel à l'identité, il commute avec tous les autres, donc on peut ajouter les relations $[p,r] = 0$, $[q,r] = 0$. Abstraitement, p, q et r engendrent un espace vectoriel L de dimension 3, et les relations définissent une application bilinéaire antisymétrique de $L \times L$ dans L. Ces données constituent une *algèbre de Lie*.

Le groupe de Heisenberg

Commençons par donner une réalisation concrète de L. On remplace sans ambages la constante $h/2i\pi$ par 1. Soit $\mathbb{L}$ le sous-espace des matrices 3×3 triangulaires supérieures, à diagonale nulle. Si

$$M = \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & u' & w' \\ 0 & 0 & v' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on calcule le commutateur

$$[M, M'] = MM' - M'M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & uv' - u'v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $\mathbb{L}$ est stable par le commutateur. De plus, les générateurs

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfont $[p, q] = r$, $[p, r] = 0$, $[q, r] = 0$. Autrement dit, $\mathbb{L}$ est une sous-algèbre de Lie des matrices 3×3, isomorphe à l'algèbre de Lie de Heisenberg.

On appelle *groupe de Heisenberg* l'image de $\mathbb{L}$ par l'exponentielle des matrices. Il s'agit tout simplement de

$$\mathbb{H} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; x,\, y,\, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On vérifie que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe du groupe linéaire, et que la multiplication est donnée, via l'exponentielle, par

$$\exp(M) \exp(M') = \exp(M + M' + \tfrac{1}{2}[M, M']).$$

Cela rend plausible le fait que les applications linéaires de $\mathbb{L}$ dans l'espace des matrices, qui préservent le commutateur, définissent, via l'exponentielle, un homomorphisme de groupes de $\mathbb{H}$ dans le groupe linéaire. C'est vrai, c'est un des énoncés du dictionnaire entre algèbres de Lie et groupes de Lie. C'est pourquoi on jongle sans arrêt de l'un à l'autre.

Trois textes

Maintenant que les présentations avec Heisenberg et son groupe sont faites, on peut annoncer le programme : on va présenter trois points de vue sur l'algèbre de Lie ou le groupe de Heisenberg.

Le premier se déroule uniquement en dimension 3. Il décrit la géométrie particulière qui est associée au groupe de Heisenberg du point de vue de la théorie du contrôle, et fera des incursions dans la formulation mathématique de la thermodynamique et la théorie géométrique des groupes.

Le second donne une démonstration du théorème de Stone-von Neumann sur les représentations unitaires du groupe de Heisenberg et de ses analogues dans chaque dimension impaires. Il poursuivra par une histoire, celle de l'approximation semi-classique et du calcul pseudodifférentiel et des résultats qu'ils permettent aujourd'hui d'obtenir en équations aux dérivées partielles.

Le troisième développe les représentations de l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension infinie, qui surgissent d'un autre chapitre de la physique, celui des opérateurs de création et d'annihilation de particules.

Pierre Pansu