Journées mathématiques X-UPS

Année 2015

Des problèmes à N corps aux Tokamaks

Évelyne Miot

Le système dynamique de N tourbillons ponctuels

Journées mathématiques X-UPS (2015), p. 29-56.
https://doi.org/10.5802/xups.2015-02

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2015, p. 29–56 doi: 10.5802/xups.2015-02

LE SYSTÈME DYNAMIQUE DE N TOURBILLONS PONCTUELS

par

Évelyne Miot

Résumé. Ce texte a pour objet l'étude de la dynamique d'une classe particulière de fluides, en rotation rapide autour de points appelés tourbillons ponctuels. Selon l'équation d'Euler, établie par ce dernier au dix-huitième siècle, la dynamique des tourbillons ponctuels est régie par un système hamiltonien d'équations différentielles ordinaires. On analysera les propriétés mathématiques de ce système, en se penchant notamment sur les questions d'existence et d'unicité de solutions ; on verra que ces problématiques sont directement reliées à celle de collision entre les trajectoires. On mettra l'accent sur le cas de trois tourbillons ponctuels, pour lequel on développera un exemple explicite de collision en temps fini. Puis, on explorera le cas mixte, à savoir l'interaction de plusieurs tourbillons ponctuels et d'un écoulement régulier, à partir d'un modèle introduit par Marchioro et Pulvirenti dans les années 90.

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 2015. Des problèmes à N corps aux Tokamaks. Éditions de l'École polytechnique, 2015.

1. Le système des points vortex

L'objet d'étude de ce texte est un système d'équations différentielles ordinaires appelé *système des points vortex* :

$$
\begin{cases} \dot{z}_i(t) = \displaystyle\sum_{j \neq i} \gamma_j \frac{(z_i(t) - z_j(t))^\perp}{\|z_i(t) - z_j(t)\|^2}, \quad t \in [0, T) \\ z_i(0) = z_{i,0}, \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{1.1}
$$

Les N fonctions inconnues $z_1(t), \dots, z_N(t)$, qui représentent la position de N points du plan dépendant du temps, sont supposées définies et de classe C^1 sur l'intervalle de temps $[0, T)$ à valeurs dans le plan $\mathbb{R}^2$, et les coefficients γ_i sont des réels non nuls pour $i = 1, \dots, N$. Pour un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, la notation $x^\perp$ désignera dans toute la suite de ce texte le vecteur $x^\perp = (-x_2, x_1)$ obtenu par rotation de $\pi/2$ à partir de x. Nous noterons aussi $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ la norme euclidienne du vecteur x. Plus précisément, nous nous intéresserons aux questions d'existence et d'unicité de solutions pour ce système et étudierons leur comportement qualitatif dans des cas particuliers.

1.1. Le système des points vortex à partir des équations d'Euler en dimension 2

Avant d'initier notre étude du système (1.1) en tant que tel, nous allons faire une brève incursion dans le domaine des équations aux dérivées partielles afin d'en expliquer la provenance.

Le système des points vortex apparaît notamment dans le contexte de la mécanique des fluides incompressibles bi-dimensionnels, décrits par l'équation qu'Euler a introduite en 1755 :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \operatorname{div}(u) = 0, \quad \omega(0,x) = \omega_0(x), \tag{1.2}$$

où la fonction vectorielle

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{u} \mathbb{R}^2 \\ (t,x) &\longmapsto u(t,x) \end{aligned}$$

représente le vecteur *vitesse* du fluide au point x et au temps t, et où la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\omega} \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto \Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big)(t,x) \end{aligned}$$

(composante du rotationnel de $u(t,x)$ normal au plan) est la *fonction tourbillon* associée au fluide. Le gradient $\nabla\omega$ est le vecteur des dérivées partielles de la fonction ω par rapport à x_1 et x_2, et le produit scalaire $u \cdot \nabla\omega$ est égal à $u_1 \partial\omega/\partial x_1 + u_2 \partial\omega/\partial u_2$. Enfin, rappelons que la divergence $\operatorname{div}(u)$ est égale à $\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial u_2$. Nous renvoyons au volume [Che10] de ces journées pour une étude détaillée de cette célèbre équation. Celle-ci intervient également dans le texte de Yann Brenier (ce volume, [Bre15]). En effet, le système des points vortex se veut un modèle simplifié pour l'évolution de fluides en rotation extrêmement rapide autour de points $z_i(t)$. En termes de mathématiques, il est commode d'introduire le langage des distributions, pour lequel nous renvoyons au livre [Bon01], afin d'élargir la notion de fonction dérivable. Ainsi, ce comportement se traduit à l'aide de la fonction tourbillon, qui s'écrit alors comme une superposition de masses de Dirac :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta_{z_i(t)}. \tag{1.3}$$

Les points $z_i(t)$ sont appelés *tourbillons ponctuels* — ou *points vortex* — et les réels γ_i leurs *circulations* — ou *intensités*.

D'un point de vue historique, le problème de l'interaction des tourbillons ponctuels a été formulé par Helmoltz [Hel58] au dix-neuvième siècle. Les premières propriétés du système des points vortex ont ensuite été analysées dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle par Kirchhoff [Kir76], qui a notamment mis en évidence sa structure hamiltonienne, par Poincaré [Poi93], qui a démontré le caractère intégrable du système des trois points vortex, et en 1910 par Lord Kelvin [Kel10]. Une étude systématique et très complète dans le cas des trois points vortex avait été réalisée de façon indépendante par Gröbli [Grö77] pendant son travail de thèse en 1877 ; malheureusement, la dissertation de Gröbli a longtemps été ignorée ou dédaignée des autres mathématiciens, avant d'être remise à l'honneur par Synge dans les années 1940, puis par Aref dans les années 1980.

D'un point de vue mathématique, la validité du système des points vortex comme approximation de l'équation d'Euler pour les fluides en rotation rapide autour des points $z_i(t)$ a été démontrée de façon rigoureuse dans les années 1990 par Marchioro et Pulvirenti [MP93], tant que les points $z_i(t)$ sont bien séparés. En revanche, le « sens contraire », qui consiste à retrouver l'équation d'Euler à partir d'un très grand nombre de points vortex — c'est-à-dire en passant à la limite $N \to +\infty$ dans (1.3) — est un problème encore ouvert de nos jours et s'inscrit dans un domaine de recherche très actif. On l'appelle *problème de champ moyen.*

La suite de ce paragraphe est dédiée à l'obtention formelle du système d'équations différentielles ordinaires (1.1) à partir de l'équation aux dérivées partielles (1.2) dans la situation où l'hypothèse (1.3) est vérifiée. Dans toute la suite, le nombre N de points vortex prend une valeur fixe.

1.1.1. *Loi de Biot-Savart.* Supposons que (u, ω) soit une solution *régulière globale* de (1.2)(1), c'est-à-dire ω appartient à $C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ et u est bornée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, $u(t, x) \to 0$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ et enfin $\omega(t, x)$ est à support compact(2) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque

(1)Voir par exemple le théorème 4.1 de [MP94] pour un énoncé et une démonstration de l'existence et l'unicité de telles solutions.

(2)Cette hypothèse peut être affaiblie.

$\operatorname{div}(u(t,\cdot)) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$, un calcul donne

$$(\nabla\omega(t,\cdot))^{\perp} = \Delta u(t,\cdot), \tag{1.4}$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^2$, défini par

$$\Delta f(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}.$$

En effet, on a

$$(\nabla\omega(t,\cdot))^{\perp} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\partial\omega}{\partial x_2}(t,\cdot) \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x_1}(t,\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_1}(t,\cdot) + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}(t,\cdot) \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}(t,\cdot) - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}(t,\cdot) \end{pmatrix}.$$

Puisque $\operatorname{div}(u(t,\cdot)) = 0$ et que $u(t,\cdot)$ est de classe C^2, on a

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_1}(t,\cdot) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}(t,\cdot) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(t,\cdot)\Big) = -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(t,\cdot).$$

De même,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}(t,\cdot) = -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}(t,\cdot),$$

ce qui donne (1.4). Rappelons (voir [Bon01, §5.4.18 & Chap. 8]), que l'on introduit la *solution fondamentale G du laplacien* sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, \quad G(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\|x\|,$$

c'est-à-dire que ΔG (calculé au sens des distributions) est égal à la masse de Dirac δ_0 à l'origine de $\mathbb{R}^2$. En utilisant deux propriétés classiques du produit de convolution $\star$ des distributions dans $\mathbb{R}^2$ (voir [Bon01, Chap. 7]), à savoir que l'on peut faire passer les dérivations d'un côté ou de l'autre du produit de convolution sans en changer sa valeur et le fait que δ_0 est l'unité pour le produit de convolution, on déduit de (1.4) l'expression

$$u(t,\cdot) = G \star (\nabla\omega(t,\cdot))^{\perp} + H(t,\cdot)$$

pour une certaine fonction harmonique $H(t,\cdot)$ par rapport à x. Alors

$$\begin{aligned}G\star(\nabla\omega(t,\cdot))^\perp &= \begin{pmatrix}-G\star\partial\omega(t,\cdot)/\partial x_2\\ G\star\partial\omega(t,\cdot)/\partial x_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\partial G/\partial x_2\star\omega(t,\cdot)\\ \partial G/\partial x_1\star\omega(t,\cdot)\end{pmatrix} = (\nabla G)^\perp\star\omega(t,\cdot)\end{aligned}$$

et l'on a

$$u(t,\cdot) = (\nabla G)^\perp\star\omega(t,\cdot) + H(t,\cdot),$$

avec $(\nabla G)(x) = x/2\pi\|x\|^2$ (ici les dérivées de G sont prises au sens des distributions, et l'égalité indique que les composantes de ∇G sont des fonctions localement intégrables), donc $(\nabla G)^\perp(x) = x^\perp/2\pi\|x\|^2$. Puisque $\omega(t,\cdot)$ est à support compact, la fonction $(\nabla G)^\perp\star\omega(t,\cdot)$ tend vers zéro lorsque $\|x\|\to+\infty$. Par hypothèse sur u, on en déduit qu'il en est de même pour $H(t,\cdot)$. Comme cette dernière est harmonique, le théorème de Liouville nous assure qu'elle est nulle.

Finalement, on a établi la *formule de Biot-Savart*

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}^2,\quad u(t,x) &= \Big((\nabla G)^\perp\star\omega(t,\cdot)\Big)(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(x-y)^\perp}{\|x-y\|^2}\,\omega(t,y)\,dy.\end{aligned}$$

1.1.2. *Formulation lagrangienne.* L'équation d'Euler a, en dimension 2, la structure remarquable d'une *équation de transport*. Plus précisément, supposons que (u,ω) soit une solution régulière de (1.2) et définissons le *flot de* u, c'est-à-dire l'application

$$X:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

telle que

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}(t,s,x) = u\left(t,X(t,s,x)\right), & t,s\in\mathbb{R}_+,\\ X(s,s,x) = x\in\mathbb{R}^2.\end{cases}\tag{1.5}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les hypothèses de régularité pour u assurent l'existence et l'unicité de $X(\cdot,s,x)$ dans $C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2)$ pour tout $s\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^2$. De plus, $X(t,s,\cdot)$ est inversible sur $\mathbb{R}^2$, d'inverse $X(t,s,\cdot)^{-1}=X(s,t,\cdot)$. Enfin, puisque u est à divergence nulle, le théorème de Liouville (voir par exemple l'annexe 1.1 de

[MP94]) implique que le jacobien de $X(t,s,\cdot)$ est identiquement égal à 1, c'est-à-dire que $X(t,s,\cdot)$ préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

En utilisant (1.2), on trouve alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(\omega\left(t,X(t,0,x)\right)\big) &= \partial_t\omega\left(t,X(t,0,x)\right)\\ &\qquad + \frac{dX}{dt}(t,0,x)\cdot\nabla\omega\left(t,X(t,0,x)\right)\\ &= \left(\partial_t\omega + u\cdot\nabla\omega\right)\left(t,X(t,0,x)\right) = 0,\end{aligned}$$

donc ω est constant le long des courbes intégrales du flot de u :

$$\omega\left(t,x\right) = \omega_0\left(X(0,t,x)\right).$$

Puisque $X(t,0,\cdot)$ préserve la mesure de Lebesgue, ceci est équivalent au fait que $\int_A \omega(t) = \int_{X(t,0)^{-1}(A)} \omega_0$ pour tout borélien A de $\mathbb{R}^2$. Ceci est encore équivalent au fait que pour toute fonction φ continue à support compact sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\omega(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(X(t,0,x))\omega_0(x)\,dx. \tag{1.6}$$

1.1.3. *Obtention formelle du système des points vortex.* Supposons maintenant que (u,ω) soit une solution de (1.2) telle que $\omega(t)$ soit proche d'une somme de masses de Dirac comme dans (1.3). En accord avec la formule de Biot-Savart, le champ de vitesse total doit être proche de

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t,x),$$

où

$$u_i(t,x) = \frac{x^\perp}{2\pi\|x\|^2}\star\left(\gamma_i\delta_{z_i(t)}\right)(x) = \frac{(x-z_i(t))^\perp}{2\pi\|x-z_i(t)\|^2}.$$

De plus, d'après la formulation lagrangienne (1.6), on veut avoir, pour toute fonction φ qui est continue à support compact sur $\mathbb{R}^2$,

$$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\varphi(z_i(t)) = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\varphi\big(X(t,0,z_{i,0})\big),$$

soit $z_i(t) = X(t,0,z_{i,0})$. Ainsi, d'après (1.5) on obtient

$$\dot{z_i}(t) = u(t,z_i(t)) = \sum_{j\neq i} u_j(t,z_i(t)), \quad z_i(0) = z_{i,0},$$

autrement dit le système des points vortex à un facteur d'échelle près. Notons que l'on a ôté le terme $u_i(t, z_i(t))$ qui n'est pas défini : ceci revient à considérer qu'un point vortex ne ressent pas le champ de vitesse créé par lui-même.

1.1.4. *3D versus 2D.* La notion de point vortex pour les fluides bidimensionnels admet un analogue tridimensionnel appelé tourbillon filamentaire. Dans la nature, ces filaments sont fréquemment observés sous forme d'anneau : ronds de fumée dans les airs émis par les cigarettes ou les volcans ; ou anneaux dans les liquides crées par les poissons. Des arguments similaires à ceux du paragraphe 1.1.3, décrits dans dans l'article [MN99], permettent d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires décrivant la propagation de plusieurs tourbillons annulaires concentriques $\mathcal{C}_i(t)$, de rayon $y_i(t) > 0$, et situés dans des plans affines parallèles d'équation $x = x_i(t)$:

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j \neq i} \gamma_j \frac{(z_i(t) - z_j(t))^{\perp}}{\|z_i(t) - z_j(t)\|^2} + C\gamma_i \vec{e_1}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.7}$$

où $z_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$. En particulier, un seul anneau se propage à vitesse constante le long de l'axe des abscisses ; deux anneaux de même rayon et de circulations opposées entrent en collision en temps fini (contrairement au cas de deux points vortex, comme on le verra plus loin). Enfin, d'autres dynamiques, telles que le mouvement « de saute-mouton », peuvent encore être observées.

Contrairement au cas de la dimension 2, l'obtention rigoureuse d'un système d'équations différentielles ordinaires du type (1.7) à partir des équations d'Euler en dimension 3 constitue un problème encore ouvert et actuel.

1.2. Un premier résultat d'existence. Venons-en maintenant à l'analyse du système des points vortex en tant que tel. D'emblée, remarquons que le membre de droite de (1.1) n'est pas défini si $(z_1(t), \ldots, z_N(t)) \in \Delta$, où

$$\Delta = \{(z_1, \ldots, z_N) \in (\mathbb{R}^2)^N \mid \exists i \neq j \text{ tels que } z_i = z_j\}.$$

Par ailleurs, la fonction

$$K(x) = \frac{x^\perp}{\|x\|^2}$$

est localement bornée et localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure ainsi un premier résultat général :

Théorème 1. *Soit* $(z_{1,0}, \dots, z_{N,0}) \in \mathbb{R}^{2N} \smallsetminus \Delta$. *Il existe* $T > 0$ *et une unique solution maximale* $(z_1, \dots, z_N) \in C^1([0,T), \mathbb{R}^{2N} \smallsetminus \Delta)$ *au système des points vortex. De plus, ou bien* $T = +\infty$*, ou bien* $T < +\infty$ *et dans ce cas*

$$\liminf_{t \to T} \Big(\min_{i \neq j} \|z_i(t) - z_j(t)\| \Big) = 0.$$

Ainsi, les problématiques d'existence et d'unicité pour (1.1) sont directement reliées à celle de *collisions* — dans un sens à définir — entre les trajectoires des points vortex.

1.3. Écriture hamiltonienne, quantités conservées. Le système des points vortex peut être récrit sous la forme d'un système hamiltonien : définissons la fonction

$$H : \mathbb{R}^{2N} \smallsetminus \Delta \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{2} \sum_{k \neq m = 1}^{N} \gamma_k \gamma_m \ln \|z_k - z_m\|.$$

Alors, avec la notation $z_i = (z_{i_1}, z_{i_2})$, la première ligne de (1.1) est équivalente à

$$\begin{cases} \gamma_i \dot{z}_{i_1}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial z_{i_2}} \\ \gamma_i \dot{z}_{i_2}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial z_{i_1}}, \end{cases} \qquad t \in [0,T), \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.8}$$

ou encore, sous forme plus condensée, à

$$\gamma_i \dot{z}_i(t) = (\nabla_{z_i} H)^\perp (z_1(t), \dots, z_N(t)), \;\; t \in [0,T), \;\; i = 1, \dots, N. \tag{1.9}$$

Une conséquence immédiate de cette écriture est la

Proposition 1. *Soit* $(z_1, \dots, z_N)$ *une solution de* (1.1) *sur* $[0,T)$. *Alors*

$$H(z_1(t), \dots, z_N(t)) = H\left(z_1(0), \dots, z_N(0)\right), \quad \forall t \in [0,T).$$

Pour $(z_1,\dots,z_N)$ une solution de (1.1) sur $[0,T)$, définissons les quantités suivantes :

- La circulation totale
$$\Gamma=\sum_{i=1}^N \gamma_i,$$
- Lorsque $\Gamma\neq 0$, le centre d'inertie
$$c(t)=\frac{1}{\Gamma}\sum_{i=1}^N \gamma_i z_i(t),$$
- La quantité
$$M(t)=\sum_{i=1}^N \gamma_i z_i(t)=\Gamma c(t)\quad \text{si } \Gamma\neq 0,$$
- Le moment d'inertie
$$I(t)=\sum_{i=1}^N \gamma_i \|z_i(t)\|^2,$$
- La quantité
$$T(t)=\sum_{k\neq m}\gamma_k\gamma_m\|z_k(t)-z_m(t)\|^2.$$

Proposition 2. *Soit* $(z_1,\dots,z_N)$ *une solution de* (1.1) *sur* $[0,T)$. *Alors les quantités ci-dessus sont conservées au cours du temps :*

$$c(t)=c(0),\ M(t)=M(0),\ I(t)=I(0),\ T(t)=T(0),\quad \forall t\in[0,T).$$

Démonstration. Elle découle essentiellement des deux relations

$$x\cdot K(x)=0,\qquad K(-x)=-K(x). \tag{1.10}$$

En effet, calculons la dérivée

$$\begin{aligned}\dot M(t)=\sum_{i=1}^N\gamma_i\dot z_i(t)&=\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j K\left(z_i(t)-z_j(t)\right)\\ &=-\sum_{j\neq i}\gamma_j\gamma_i K\left(z_j(t)-z_i(t)\right)=0,\end{aligned}$$

où l'on a échangé les indices i et j dans la deuxième ligne puis utilisé le fait que $K(-x)=-K(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

Par les mêmes arguments, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= 2\sum_{i=1}^{N}\gamma_i z_i(t)\cdot\dot{z}_i(t) = 2\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j z_i(t)\cdot K\left(z_i(t)-z_j(t)\right)\\ &= -2\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j z_j(t)\cdot K\left(z_i(t)-z_j(t)\right).\end{aligned}$$

Puisque $K(x)\cdot x = 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^2\smallsetminus\{0\}$, on aboutit à

$$\dot{I}(t) = \sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j\left(z_i(t)-z_j(t)\right)\cdot K\left(z_i(t)-z_j(t)\right) = 0.$$

Enfin, remarquons que

$$\begin{aligned}T(t) &= \sum_{k,m=1}^{N}\gamma_k\gamma_m\big(\|z_k(t)\|^2+\|z_m(t)\|^2-2z_k(t)\cdot z_m(t)\big)\\ &= 2\big(\Gamma I(t)-\|M(t)\|^2\big),\end{aligned}$$

par conséquent $T(t)$ est également constante sur $[0,T)$. □

1.4. Circulations de même signe : existence globale. Si toutes les circulations sont de même signe, la conservation du moment et de l'énergie assurent que le système des points vortex admet une unique solution globale quelle que soit la configuration initiale.

Théorème 2. *Si toutes les circulations γ_i sont de même signe, la solution $(z_1,\ldots,z_N)$ donnée par le théorème 1 satisfait à $T=+\infty$. En outre, il existe $\lambda,\Lambda>0$ tels que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}_+}\min_{i\neq j}\|z_i(t)-z_j(t)\|\geqslant\lambda$$

et

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\max_{i=1,\ldots,N}\|z_i(t)\|\leqslant\Lambda.$$

Démonstration. Supposons par exemple que tous les γ_i sont strictement positifs. Posons

$$\begin{aligned}J(t) &= T(t)-2H(z_1(t),\ldots,z_N(t))\\ &= \sum_{k\neq m}\gamma_k\gamma_m\big(\|z_k(t)-z_m(t)\|^2-\ln\|z_k(t)-z_m(t)\|\big).\end{aligned}$$

D'une part, la quantité $J(t)$ est constante sur $[0,T)$ en vertu des propositions 1 et 2. D'autre part, soit $(i,j)\in\{1,\ldots,N\}^2$ tel que $i\neq j$.

Puisque $\|x\|^2 - \ln\|x\| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'hypothèse de signe sur les circulations implique que chaque terme de la somme est positif. Ainsi,

$$\begin{aligned} J(t) = J(0) &\geqslant \gamma_i\gamma_j \left(\|z_i(t) - z_j(t)\|^2 - \ln\|z_i(t) - z_j(t)\|\right) \\ &\geqslant \gamma_i\gamma_j \left(-\ln\|z_i(t) - z_j(t)\|\right), \end{aligned}$$

dont l'on déduit que

$$\|z_i(t) - z_j(t)\| \geqslant \exp\left(-J(0)/\gamma_i\gamma_j\right).$$

Puis, on a pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$I(t) = I(0) \geqslant \gamma_i\|z_i(t)\|^2,$$

et il s'ensuit que

$$\|z_i(t)\| \leqslant \left(I(0)/\gamma_i\right)^{1/2}. \qquad \square$$

1.5. Le cas de deux points vortex. Concluons cette présentation par la construction de la solution du système des points vortex lorsque $N = 2$. Nous sommes ramenés à l'étude de

$$\text{(1.11)} \qquad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = \gamma_2 \dfrac{(z_1(t) - z_2(t))^\perp}{\|z_1(t) - z_2(t)\|^2} \\ \dot{z}_2(t) = \gamma_1 \dfrac{(z_2(t) - z_1(t))^\perp}{\|z_1(t) - z_2(t)\|^2}, \end{cases} \qquad t \in [0, T).$$

Puisque l'énergie $H(t) = \gamma_1\gamma_2 \ln\|z_1(t) - z_2(t)\|$ est conservée, on sait déjà que $\|z_1(t) - z_2(t)\| = \|z_1(0) - z_2(0)\|$ pour tout $t \in [0, T)$. Comme les trajectoires de deux points vortex n'entrent jamais en collision, on a $T = +\infty$. Afin de déterminer explicitement les trajectoires, il convient de dissocier les deux cas suivants.

- $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 0$.

Alors $M(t) = \gamma_1\left(z_1(t) - z_2(t)\right) = M(0)$, donc (1.11) se récrit comme

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \gamma_1 \frac{(z_2(t) - z_1(t))^\perp}{\|z_1(t) - z_2(t)\|^2} = -\frac{M(0)^\perp}{\|z_1(0) - z_2(0)\|^2},$$

d'où

$$\begin{cases} z_1(t) = z_1(0) - \dfrac{M(0)^{\perp} t}{\|z_1(0) - z_2(0)\|^2}, \\ z_2(t) = z_2(0) - \dfrac{M(0)^{\perp} t}{\|z_1(0) - z_2(0)\|^2}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Les points vortex évoluent donc selon un mouvement de translation uniforme dont la vitesse est proportionnelle à l'inverse de la distance qui les sépare. On remarque que ceci fournit un exemple de dynamique pour lequel les trajectoires ne sont pas bornées uniformément sur $\mathbb{R}_+$, contrairement à la solution du théorème 2.

- $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$.

Puisque $c(t) = M(t)/\Gamma = c(0)$, on peut exprimer (1.11) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \dfrac{\Gamma\,(z_1(t) - c(0))^{\perp}}{\|z_1(0) - z_2(0)\|^2}, \\ \dot{z}_2(t) = \dfrac{\Gamma\,(z_2(t) - c(0))^{\perp}}{\|z_1(0) - z_2(0)\|^2}. \end{cases}$$

Ainsi, le mouvement est celui d'une rotation uniforme des points z_1 et z_2 autour du centre d'inertie $c(0)$ et à vitesse angulaire égale à $\Gamma\|z_1(0) - z_2(0)\|^2$.

Le mouvement de translation uniforme pour la paire de vortex s'apparente fortement à celui d'un (unique) rond de fumée, comme on l'a vu au paragraphe 1.1.4 ; on peut voir en effet une paire de points vortex comme la projection bidimensionnelle d'un anneau, obtenue par la section de l'anneau par un plan qui lui est perpendiculaire.

2. Collisions de trois points

L'objectif de cette partie est d'étudier plus précisément la question des collisions en temps fini entre les points vortex. C'est un problème complexe, y compris dans sa définition. En effet, on pourrait envisager plusieurs types de collisions entre les trajectoires :

- des collisions partielles, c'est-à-dire telles que

$$\liminf_{t \to T} \min_{i \neq j} \|z_i(t) - z_j(t)\| = 0;$$

- des collisions totales, c'est-à-dire telles que
$$\liminf_{t\to T}\max_{i\neq j}\|z_i(t)-z_j(t)\|=0;$$
- des collisions autosimilaires, voir ci-dessous.

Dans la suite, on parlera de collision au sens de collision partielle, c'est-à-dire dès que la solution maximale du théorème 1 satisfait à $T<+\infty$.

2.1. Collisions autosimilaires pour le système des trois points vortex

Nous allons proposer ici une méthode pour construire des solutions du système à $N=3$ points vortex dont les trajectoires s'intersectent en temps fini. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la thèse de Gröbli [Grö77] (pour les lecteurs germanophones !), de Aref [Are79, Are10], ainsi qu'au livre [MP94] de Marchioro et Pulvirenti page 140. L'étude qui suit ne s'étend généralement pas au cas de $N\geqslant 4$ points. Trois points définissent trois distances
$$\begin{cases}\ell_{12}(t)=\|z_1(t)-z_2(t)\|,\\ \ell_{23}(t)=\|z_2(t)-z_3(t)\|,\\ \ell_{31}(t)=\|z_3(t)-z_1(t)\|\end{cases}$$

Puisque
$$\begin{aligned}(z_1-z_2)\cdot(z_1-z_3)^\perp &= (z_1-z_2)\cdot(z_2-z_3)^\perp\\ &= (z_2-z_3)\cdot(z_2-z_1)^\perp=(z_2-z_3)\cdot(z_3-z_1)^\perp\\ &= (z_3-z_1)\cdot(z_3-z_2)^\perp=(z_3-z_1)\cdot(z_1-z_2)^\perp,\end{aligned}$$
les distances satisfont au système d'équations :
$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\ell_{12}^2(t)=4\gamma_3\mathcal{A}(t)\Big(\dfrac{1}{\ell_{23}^2(t)}-\dfrac{1}{\ell_{31}^2(t)}\Big)\\ \dfrac{d}{dt}\ell_{23}^2(t)=4\gamma_1\mathcal{A}(t)\Big(\dfrac{1}{\ell_{31}^2(t)}-\dfrac{1}{\ell_{12}^2(t)}\Big)\\ \dfrac{d}{dt}\ell_{31}^2(t)=4\gamma_2\mathcal{A}(t)\Big(\dfrac{1}{\ell_{12}^2(t)}-\dfrac{1}{\ell_{23}^2(t)}\Big),\end{cases}\tag{2.1}$$
où
$$\mathcal{A}(t)=-(z_1(t)-z_2(t))\cdot(z_1(t)-z_3(t))^\perp=A(t)\sigma,$$

où l'on a noté $A(t) \geqslant 0$ l'aire du triangle formé par les points $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ et où $\sigma = \pm 1$ vaut 1 si ce triangle est orienté positivement, et -1 sinon.

Dans la suite, on dit qu'il se produit une *collision autosimilaire* pour le système des trois points vortex lorsque la solution donnée par le théorème 1 satisfait à

- $T < +\infty$,
- $\ell_{12}(t) \underset{t\to T}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \ell_{23}(t) \underset{t\to T}{\longrightarrow} 0,$
- $\dfrac{\ell_{12}(t)}{\ell_{23}(t)} = \dfrac{\ell_{12}(0)}{\ell_{23}(0)} \quad \text{et} \quad \dfrac{\ell_{23}(t)}{\ell_{31}(t)} = \dfrac{\ell_{23}(0)}{\ell_{31}(0)}, \quad \forall t \in [0, T).$

En particulier, il s'agit d'une collision totale. De plus, le triangle formé par les trois points est, pour tout temps $t < T$, l'image du triangle initial par une similitude. Comme nous allons le voir dans peu de temps, la quantité

$$h = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1$$

joue un rôle important dans l'étude des collisions autosimilaires.

Des conditions nécessaires pour qu'une collision autosimilaire ait lieu sont données ci-dessous.

Proposition 3. *Si le système des trois points vortex évolue vers une collision autosimilaire, on a $h = 0$ et $T(0) = 0$.*

Démonstration. On a $T(0) = T(t) \underset{t\to T}{\longrightarrow} 0$, ainsi $T(0) = 0$. D'autre part, comme l'énergie et les rapports des longueurs sont constants, on a

$$\begin{aligned} e^{H(0)} &= \ell_{12}(t)^{\gamma_1\gamma_2}\ell_{23}(t)^{\gamma_2\gamma_3}\ell_{31}(t)^{\gamma_3\gamma_1} \\ &= \left(\frac{\ell_{12}(0)}{\ell_{23}(0)}\right)^{\gamma_1\gamma_2}\left(\frac{\ell_{31}(0)}{\ell_{23}(0)}\right)^{\gamma_1\gamma_3}\ell_{23}(t)^h, \end{aligned}$$

donc $h = 0$. □

La réciproque est partiellement vraie :

Théorème 3. *Si la configuration initiale des trois points vortex satisfait aux conditions*

$$h = 0 \quad \textit{et} \quad T(0) = 0,$$

alors la solution donnée par le théorème 1 *forme un triangle autosimilaire :*

$$\frac{\ell_{12}(t)}{\ell_{23}(t)} = \frac{\ell_{12}(0)}{\ell_{23}(0)} \quad et \quad \frac{\ell_{23}(t)}{\ell_{31}(t)} = \frac{\ell_{23}(0)}{\ell_{31}(0)}, \quad \forall t \in [0, T).$$

De plus, supposons que les trois points ne forment pas initialement un triangle équilatéral ni ne soient initialement alignés[(3)]. *Alors il existe* $T^* \neq 0$ *tel que*

$$\ell_{ij}(t) = \ell_{ij}(0)\sqrt{1 - t/T^*}, \quad \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \text{ tel que } i \neq j.$$

En particulier :
- *Si* $T^* > 0$, *le système évolue vers une collision totale en* $T = T^*$.
- *Si* $T^* < 0$, *le triangle croît et* $T = +\infty$.

Démonstration. Calculons, en utilisant (2.1), la dérivée

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\ell_{12}^2}{\ell_{23}^2}\Big) &= \frac{4\mathcal{A}}{\ell_{23}^4}\Big(\gamma_3\ell_{23}^2\Big(\frac{1}{\ell_{23}^2} - \frac{1}{\ell_{31}^2}\Big) - \gamma_1\ell_{12}^2\Big(\frac{1}{\ell_{31}^2} - \frac{1}{\ell_{12}^2}\Big)\Big)\\ &= \frac{4\mathcal{A}}{\ell_{23}^4}\Big(\gamma_1 + \gamma_3 - \frac{1}{\gamma_2\ell_{31}^2}\Big(\gamma_2\gamma_3\ell_{23}^2 + \gamma_1\gamma_2\ell_{12}^2\Big)\Big).\end{aligned}$$

Puisque $T = \gamma_2\gamma_3\ell_{23}^2 + \gamma_1\gamma_2\ell_{12}^2 + \gamma_1\gamma_3\ell_{31}^2$ est nul, ceci nous donne

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\ell_{12}^2}{\ell_{23}^2}\Big) = \frac{4\mathcal{A}}{\ell_{23}^4}\Big(\gamma_1 + \gamma_3 + \frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2}\Big) = \frac{4\mathcal{A}}{\gamma_2\ell_{23}^4}h = 0.$$

Ainsi, le rapport ℓ_{12}/ℓ_{23} est constant sur $[0, T)$, et il en va de même pour ℓ_{23}/ℓ_{31} (par conséquent aussi pour ℓ_{31}/ℓ_{12}).

Ensuite, on en déduit qu'il existe $\alpha_{12} \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [0, T), \quad 2\mathcal{A}(t) = \ell_{31}(t)\ell_{23}(t)\sin(\widehat{132}) = \alpha_{12}\ell_{12}^2(t).$$

Puisque

$$\frac{d}{dt}\ell_{12}^2(t) = 4\gamma_3\mathcal{A}(t)\left(\frac{1}{\ell_{23}^2(t)} - \frac{1}{\ell_{31}^2(t)}\right),$$

on obtient l'existence de $M_{12} \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [0, T), \quad \frac{d}{dt}\ell_{12}^2(t) = M_{12},$$

[(3)]Le cas des triangles équilatéraux et des configurations colinéaires sera envisagé au paragraphe sur les équilibres relatifs.

soit

$$\ell_{12}^2(t) = \ell_{12}^2(0) + M_{12}t = \ell_{12}^2(0)\Big(1 + \frac{M_{12}}{\ell_{12}^2(0)}t\Big).$$

Notons que $M_{12} \neq 0$. En effet, si $M_{12} = 0$,

$$0 = \Big(\frac{d\ell_{12}^2}{dt}\Big)(0) = 2\gamma_3\mathcal{A}(0)\Big(\frac{1}{\ell_{23}^2(0)} - \frac{1}{\ell_{31}^2(0)}\Big).$$

Puisque les trois points ne sont pas initialement alignés on a $\mathcal{A}(0)\neq 0$, ainsi $\ell_{23}(0) = \ell_{31}(0)$. Comme $h = 0$ et $T(0) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_1\gamma_2\ell_{12}^2(0) + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)\ell_{23}^2(0) \\ &= \gamma_1\gamma_2\ell_{12}^2(0) - \gamma_1\gamma_2\ell_{23}^2(0) \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction puisqu'on a supposé que le triangle initial n'est pas équilatéral. De même, on a $M_{23} \neq 0$ et $M_{31} \neq 0$.

Ensuite, les rapports de distances étant constants, on a nécessairement

$$\frac{M_{12}}{\ell_{12}^2(0)} = \frac{M_{13}}{\ell_{13}^2(0)} = \frac{M_{32}}{\ell_{32}^2(0)} =: -\frac{1}{T^*}$$

ce qui donne les deux cas de figure possibles en fonction du signe de T^*. □

Donnons à présent un exemple explicite de données initiales, issu de [MP94], satisfaisant aux conditions $h = 0$ et $T(0) = 0$. Posons

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 2, \quad \gamma_3 = -1,$$

donc $h = 0$, puis

$$z_{1,0} = (-1, 0), \quad z_{2,0} = (1, 0), \quad z_{3,0} = (1, \sqrt{2})$$

de sorte que le triangle formé par $(z_{1,0}, z_{2,0}, z_{3,0})$ est rectangle, positivement orienté, et satisfait bien $T(0) = 0$. Puis,

$$\Big(\frac{d\ell_{12}^2}{dt}\Big)(0) = 2\gamma_3|\mathcal{A}(0)|\Big(\frac{1}{\ell_{23}^2(0)} - \frac{1}{\ell_{31}^2(0)}\Big) < 0,$$

donc $M_{12} < 0$ et le système évolue vers une collision auto-similaire en temps fini. En partant des mêmes positions mais en posant cette fois $\gamma_1 = \gamma_2 = -2$ et $\gamma_3 = 1$, on trouve $M_{12} > 0$ donc le triangle croît.

Un autre exemple est obtenu en gardant les valeurs $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ et $\gamma_3 = -1$ et en posant

$$z_{1,0} = (-1, 0), \quad z_{2,0} = (1, 0), \quad z_{3,0} = (1, -\sqrt{2}),$$

ce qui revient à changer l'orientation du triangle initial.

De façon plus générale, il existe une méthode géométrique simple, détaillée dans [Are10], qui permet de construire les configurations initiales satisfaisant aux conditions de collision en temps fini.

2.2. Collisions pour le système des trois points vortex

Le but de ce paragraphe est de démontrer que toute collision pour le système des trois points vortex est nécessairement une collision totale et auto-similaire.

Théorème 4. *Soit* (z_1, z_2, z_3) *une solution du système des trois points vortex donnée par le théorème* 1 *avec* $T < +\infty$. *Alors* $h = 0$ *et* $T(0) = 0$. *En particulier, en vertu du théorème* 3, *toute collision pour le système des trois points vortex est nécessairement autosimilaire.*

Démonstration. On introduit les distances minimale et maximale

$$d(t) = \min_{i \neq j} \|z_i(t) - z_j(t)\|, \quad D(t) = \max_{i \neq j} \|z_i(t) - z_j(t)\|.$$

Puisque $T < +\infty$, il existe une suite $t_n \to T$, strictement croissante, telle que $d(t_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Quitte à extraire, ceci implique qu'il existe $i \neq j$ tel que $\|z_i(t_n) - z_j(t_n)\| \to 0$. Prenons par exemple $i = 1$ et $j = 2$.

On va établir que

$$\ell_{31}(t_n) \underset{t_n \to T}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit les trois trajectoires des points vortex entrent simultanément en collision le long de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, si ce n'est pas le cas,

- ou bien on peut trouver une suite extraite de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, renotée $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\ell_{31}(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+^*$;
- ou bien on peut trouver une suite extraite de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, renotée $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\ell_{31}(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dans le premier cas, on a alors aussi $\ell_{23}(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi, puisque $H(t_n) = H(0)$,

$$\begin{aligned}\ell_{12}(t_n)^{\gamma_1\gamma_2} &= e^{H(0)}\ell_{23}(t_n)^{-\gamma_2\gamma_3}\ell_{31}(t_n)^{-\gamma_3\gamma_1}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{H(0)}\ell^{-\gamma_2\gamma_3-\gamma_3\gamma_1} \in \mathbb{R}_+^*,\end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque $\ell_{12}(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dans le second cas, on a

$$\ell_{23}^2(t_n) = \ell_{31}^2(t_n) + o(\ell_{31}(t_n)).$$

Puisque $T(t_n) = T(0)$, on a

$$\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 = \frac{T(0)}{\ell_{31}^2(t_n)} + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où $\gamma_1 = -\gamma_2$. En revenant au fait que l'énergie est conservée, on en déduit que

$$\ell_{12}(t_n)^{\gamma_1\gamma_2} = e^{H(0)}\left(\frac{\ell_{23}(t_n)}{\ell_{31}(t_n)}\right)^{-\gamma_3\gamma_2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{H(0)},$$

ce qui est de nouveau absurde.

Finalement, on a bien

$$\ell_{31}(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $T(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et T est constante, d'où $T(0) = 0$.

Montrons ensuite que $h = 0$. Puisque les γ_i ne sont pas tous de même signe d'après le théorème 2, on peut supposer par exemple que $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ et $\gamma_3 < 0$.

Supposons par l'absurde que $h < 0$. Soit

$$\gamma = |\gamma_3|\Big(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\Big) > 1.$$

On a pour tout $t \in [0, T)$

$$\ell_{12}(t) \leqslant e^{H(0)/\gamma_1\gamma_2}\,\ell_{31}(t)^{|\gamma_3|/\gamma_2}\ell_{23}(t)^{|\gamma_3|/\gamma_1} \leqslant e^{H(0)/\gamma_1\gamma_2}D(t)^{\gamma}. \tag{2.2}$$

Ceci implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $D(t_n) \neq \ell_{12}(t_n)$: sinon, l'inégalité précédente donnerait pour une sous-suite $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$D(t_{n_k}) \leqslant e^{H(0)/\gamma_1\gamma_2}\,D(t_{n_k})^{\gamma},$$

ce qui est impossible puisque $\gamma > 1$ et que $D(t_{n_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $n \geqslant n_0$. Par exemple, si $D(t_n) = \ell_{31}(t_n)$, l'inégalité (2.2) implique que

$$\ell_{23}^2(t_n) = D(t_n)^2 + O\left(D(t_n)^{\gamma+1}\right),$$

ce qui est encore vrai si $D(t_n) = \ell_{23}(t_n)$. Finalement, comme $T(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}|\gamma_3|(\gamma_1+\gamma_2)D(t_n)^2 &= \gamma_1\gamma_2 d(t_n)^2 + O\big(D(t_n)^{\gamma+1}\big)\\ &= O(D(t_n)^{\gamma+1}),\end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $h \geqslant 0$.

Si $h > 0$, on obtient cette fois $\gamma < 1$ et

$$\ell_{12}(t) \geqslant e^{H(0)/\gamma_1\gamma_2}\,\ell_{31}(t)^{|\gamma_3|/\gamma_2}\ell_{23}(t)^{|\gamma_3|/\gamma_1} \geqslant e^{H(0)/\gamma_1\gamma_2} d(t)^{\gamma}. \tag{2.3}$$

Comme $d(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\gamma < 1$, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on ait ou bien $d(t_n) = \ell_{31}(t_n)$ ou bien $d(t_n) = \ell_{23}(t_n)$. Il existe une suite extraite, renotée $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $d(t_n) = \ell_{31}(t_n)$ (par exemple) pour tout $n \geqslant n_1$. Alors d'après (2.3),

$$\begin{aligned}\ell_{23}^2(t_n) &= \ell_{12}^2(t_n) + \ell_{31}^2(t_n) + O\left(\ell_{12}(t_n)\ell_{31}(t_n)\right)\\ &= \ell_{12}^2(t_n) + O\big(\ell_{12}^{1+1/\gamma}(t_n)\big).\end{aligned}$$

Puisque $T(0) = 0$, on en déduit que

$$(\gamma_2\gamma_1 + \gamma_2\gamma_3)\ell_{12}^2(t_n) = O\big(\ell_{12}^{1+1/\gamma}(t_n)\big),$$

avec $1 + 1/\gamma > 2$, donc $\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 = 0$ puis $h = \gamma_1\gamma_3 < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $h > 0$. □

2.3. Presque jamais de collision. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, les conditions nécessaires de collision en temps fini pour le cas de trois points sont très restrictives quant au choix des circulations γ_1, γ_2 et γ_3 et des positions initiales. Il s'avère que pour un nombre quelconque $N \geqslant 3$ de points, les configurations initiales qui mènent à des collisions en temps fini sont exceptionnelles.

Plus précisément, nous avons le résultat suivant dû à Marchioro et Pulvirenti.

Théorème 5 **([MP94, p. 147]).** *On suppose que*

$$\forall J \subset \{1, \dots, N\}, \quad \sum_{i \in J} \gamma_i \neq 0.$$

Alors pour presque toute[4] *position initiale* $(z_{1,0}, \dots, z_{N,0}) \in (\mathbb{R}^2)^N \setminus \Delta$, *la solution donnée par le théorème* 1 *est globale.*

3. Équilibres relatifs et configurations stationnaires

Dans ce dernier paragraphe, nous allons amorcer l'étude d'une classe particulière de solutions pour le système des points vortex, celle des équilibres fixes et des équilibres relatifs. Soit $N \geqslant 2$ et soit $(z_1, \dots, z_N)$ la solution de (1.1) donnée par le théorème 1. Nous dirons que $(z_1, \dots, z_N)$ est

- Un équilibre fixe — ou configuration stationnaire — si

$$z_j(t) = z_j(0), \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad \forall t \in [0, T);$$

- En translation uniforme si, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $V(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que

$$\dot{z}_j(t) = V(t), \quad \forall j = 1, \dots, N;$$

- Un équilibre relatif s'il existe $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in [0, T)$, il existe $\omega(t) \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\dot{z}_j(t) = \omega(t)(z_j(t) - z_0)^{\perp}, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Le polygone formé par les points vortex au temps t est constant (dans le premier cas) ou obtenu à partir du polygone initial par une translation (dans le second cas) ou une rotation (dans le troisième cas). Dans les trois situations, la taille et la forme du polygone sont conservés au cours du temps. En particulier, aucune collision ne se produit et donc $T = +\infty$.

On remarque que si $(z_1, \dots, z_N)$ est un équilibre relatif, il en est de même pour toute configuration obtenue à partir de $(z_1, \dots, z_N)$ par rotation, homothétie ou translation.

---

(4) Au sens de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2)^N$.

Nous aurons besoin de la quantité h déjà introduite dans l'étude des collisions, définie par

$$h = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \gamma_i\gamma_j.$$

Mentionnons dès maintenant une condition nécessaire sur les circulations, qui sera établie au paragraphe 3.3, pour l'existence d'une configuration stationnaire.

Proposition 4. *Si* $(z_1, \dots, z_N)$ *est une configuration stationnaire, alors*

$$h = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \gamma_i\gamma_j = 0.$$

3.1. Équilibres relatifs et configurations stationnaires pour $N = 3$ points vortex

Le cas des trois points vortex a été amplement étudié dans la littérature, voir par exemple l'article de revue [Are83], les travaux [Are09, Are10] ainsi que les articles qui s'y trouvent cités. Il y a seulement deux types d'équilibres relatifs[(5)] :

• Les triangles équilatéraux en rotation uniforme : pour tout choix de circulations telles que $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \neq 0$, si $(z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ forme un triangle équilatéral de côté $\ell > 0$ en rotation uniforme autour de son centre d'inertie, à la vitesse angulaire

$$\theta = \frac{\Gamma}{\ell^2} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{\ell^2},$$

c'est une solution du système des points vortex.

• Les configurations colinéaires en rotation uniforme : si $\Gamma = 0$, elles s'écrivent en notation complexe

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \ell\Big(\frac{\gamma_3}{\gamma_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_3}\Big)e^{i\theta t},\\ z_2(t) &= \ell\Big(\frac{\gamma_1}{\gamma_3} - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\Big)e^{i\theta t},\\ z_3(t) &= \ell\Big(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)e^{i\theta t}, \end{aligned}$$

où $\ell \in \mathbb{R}^*$ est un facteur d'échelle et où $\theta = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3/h\ell^2$.

---

(5) À rotation, homothétie ou translation près.

Le cas où $\Gamma \neq 0$ est toutefois plus complexe ; en particulier, suivant les choix des circulations γ_1, γ_2 et γ_3 il peut y avoir un seul, deux, trois, voire aucun équilibre relatif de points alignés.

Par ailleurs, lorsque $\Gamma = 0$, si $(z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ forme un triangle équilatéral de côté $\ell > 0$ en translation uniforme à la vitesse $V(t) = -c(0)^\perp/\ell^2$, c'est une solution du système des points vortex.

Enfin, pour tout choix de circulations satisfaisant $h = 0$, il existe une configuration stationnaire qui est donnée par

$$z_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{\gamma_1}, \quad z_2 = \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{\gamma_2}, \quad z_3 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_3}.$$

3.2. Équilibres relatifs et configurations stationnaires à N points

Pour tout $N \geqslant 3$, il existe des équilibres relatifs qui sont donnés par N points de même circulation, alignés, et dont les positions sont déterminées en tant que zéros de polynômes bien particuliers (voir la section suivante). D'autres équilibres relatifs sont obtenus en plaçant un point vortex de même circulation γ à chaque sommet d'un polygone régulier à N côtés et de taille ℓ, ce qui donne une vitesse angulaire $\theta = \gamma(N-1)/(2\ell^2)$. Le problème de la stabilité — linéaire et non linéaire — de ces solutions a suscité une attention certaine de la part des mathématiciens. En particulier, Lord Kelvin souleva cette question en 1878, en notant par ailleurs le lien étroit entre ce problème et celui de la stabilité des équilibres d'aimants plongés dans un champ magnétique. La réponse complète a été finalement apportée par Kurakin and Yudovitch [KY02b, KY02a], qui ont démontré que le polygone à N côtés est stable si et seulement si $N \leqslant 7$.

Il est possible d'obtenir d'autres équilibres relatifs en ajoutant à la solution précédente un point vortex de circulation arbitraire γ_0 au centre du polygone, auquel cas la vitesse angulaire devient $\theta = (\gamma(N-1) + 2\gamma_0)/(2\ell^2)$. En particulier, en posant $\gamma_0 = -\gamma(N-1)/2$ on obtient une solution stationnaire.

Enfin, signalons que d'autres types d'équilibres relatifs existent : plusieurs polygones — non nécessairement réguliers — concentriques avec des vortex de circulations éventuellement différentes. On renvoie aux articles de Aref, Newton, Stremler, Tokieda et Vainchtein [ANS$^+$03], ainsi que de O'Neil [O'N07].

3.3. Dénombrement des configurations stationnaires

Nous allons déterminer ici des conditions nécessaires additionnelles à celle donnée par la proposition 4 pour l'existence de configurations stationnaires et, le cas échéant, tenter de les dénombrer. Une analyse approfondie de ces questions, ainsi que toutes les démonstrations qui suivent, sont réalisées dans l'article de O'Neil [O'N06]. Nous allons adopter des notations complexes pour désigner les positions des points vortex et nous noterons $|z|$ le module du nombre complexe z. Une configuration stationnaire est donc un élément $(z_1, \dots, z_N)$ de $\mathbb{C}^N \setminus \Delta$ qui satisfait à

$$\overline{\dot{z}_k} = -i \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j}{z_k - z_j} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N. \tag{3.1}$$

De façon équivalente, c'est aussi un point critique de la fonction H.

Proposition 5. *Soit $(z_1, \dots, z_N)$ une configuration stationnaire. Alors pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$, on a*

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2}.$$

Démonstration. On a, en développant puis en décomposant en éléments simples,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right)^2 &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} + \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j \gamma_k}{(z - z_k)(z - z_j)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} + \sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j \gamma_k}{z_k - z_j} \Big(\frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z - z_j} \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} + 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{z - z_k} \left(\sum_{j \neq k} \frac{\gamma_j}{z_k - z_j} \right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat d'après (3.1). □

En développant les termes de gauche et de droite de la proposition 5 en série de Laurent pour $|z| > \max(|z_1|, \ldots, |z_N|)$, on trouve

$$\frac{\gamma_k}{z - z_k} = z^{-1} \frac{\gamma_k}{1 - z_k z^{-1}} = z^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_k \, z_k^j \, z^{-j},$$

$$\frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2} = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \gamma_k^2 \, z_k^j \, z^{-2-j}.$$

Posons pour $j \in \mathbb{N}$

$$m_j = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \, z_k^j, \quad M_j = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \, z_k^j.$$

On a alors, d'après la proposition 5 (après simplification par z^{-2}),

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty} m_j z^{-j} \right)^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) M_j z^{-j}.$$

Par identification, on aboutit à

$$\sum_{\ell=0}^{p} m_\ell m_{p-\ell} = (p+1) M_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

En particulier, avec $p = 0$ on retrouve bien

$$m_0^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \right)^2 = M_0 = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2,$$

à savoir la relation de la proposition 4.

Remarque. Soient $z_1, \ldots, z_N$ des éléments de $\mathbb{C}$ deux à deux distincts. Supposons que

$$\sum_{\ell=0}^{p} m_\ell m_{p-\ell} = (p+1) M_p, \quad \forall p = 0, \ldots, N-2.$$

Alors pour tout z de $\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_N\}$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k^2}{(z - z_k)^2}.$$

En effet, on a d'après la démonstration de la proposition 5

$$2\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k}{z-z_k}\Big(\sum_{j\neq k}\frac{\gamma_j}{z_k-z_j}\Big)=\Big(\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k}{z-z_k}\Big)^2-\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k^2}{(z-z_k)^2}$$
$$=z^{-N-1}F(z^{-1}),$$

où F est une série entière. En multipliant à gauche et à droite par le polynôme $\prod_{\ell=1}^{N}(z-z_\ell)$ de degré N, on trouve alors

$$P(z)=2\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\prod_{\ell\neq k}(z-z_\ell)\Big(\sum_{j\neq k}\frac{\gamma_j}{z_k-z_j}\Big)\underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

alors que P est un polynôme, ainsi $P=0$.

Comme on l'a déjà mentionné, la transformation

$$(z_1,\dots,z_N)\longmapsto(\alpha z_1+\beta,\dots,\alpha z_N+\beta),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C},\quad \alpha\neq 0,$$

transforme une configuration stationnaire en une configuration stationnaire. Ainsi, on peut considérer une configuration $(z_1,\dots,z_N)$ comme un élément $[z_1,\dots,z_N]$ de l'espace projectif $\mathbb{CP}^{N-1}$ et s'affranchir de l'invariance par translation en fixant un hyperplan de $\mathbb{CP}^{N-1}$, par exemple l'hyperplan donné par $\{m_1\}=0$:

Proposition 6. *Soit $\mathcal{V}$ le sous-ensemble de $\mathbb{CP}^{N-1}$ constitué des solutions $[z_1,\dots,z_N]$ du système*

$$\begin{cases} m_1=0\\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{p}m_\ell m_{p-\ell}=(p+1)M_p,\quad \forall p=0,\dots,N-2.\end{cases}\tag{3.2}$$

L'ensemble des configurations stationnaires est $\mathcal{V}\smallsetminus\Delta$.

Finalement, l'étude des configurations stationnaires se ramène donc à l'étude de variétés algébriques projectives, ce qui nous conduit à rappeler le

***Théorème 6* (théorème de Bézout).** *Ou bien $\mathcal{V}$ admet un nombre infini d'éléments, et dans ce cas $\mathcal{V}$ intersecte tout hyperplan. Ou bien $\mathcal{V}$ contient un nombre fini d'éléments, égal (en comptant avec multiplicité) à $(N-2)!$.*

Il existe un critère permettant d'écarter le cas d'un nombre infini de solutions pour (3.2) :

Proposition 7. *Soient* $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ *des circulations telles que* $h = 0$. *Supposons qu'il existe deux indices* p *et* q *tels que pour tout sous-ensemble strict* J *de* $\{1, \dots, N\}$, $\{p, q\} \subset J$ *implique que* $\sum_{j,k \in J} \gamma_j \gamma_k \neq 0$. *Alors* $\mathcal{V}$ *contient exactement (à multiplicité près)* $(N-2)!$ *éléments. En particulier, il y a au plus* $(N-2)!$ *configurations stationnaires.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $[z_1, \dots, z_N]$ appartenant à $\mathcal{V}$ tel que $z_p = z_q$. Notons $z^* = z_p = z_q$. Soit J l'ensemble des indices j de $\{1, \dots, N\}$ tels que $z_j = z^*$. Alors J est un sous-ensemble strict car le point $[z^*, \dots, z^*] = [1, \dots, 1]$ ne satisfait pas $m_1 = 0$. En adaptant la démonstration de la remarque suivant la proposition 5, on obtient

$$\left(\frac{\sum_{j \in J} \gamma_j}{z - z^*} + \sum_{j \notin J} \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right)^2 = \frac{\sum_J \gamma_j^2}{(z - z^*)^2} + \sum_{j \notin J} \frac{\gamma_j^2}{(z - z_j)^2},$$

ce qui, par identification, mène à

$$\left(\sum_{j \in J} \gamma_j \right)^2 = \sum_J \gamma_j^2,$$

en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi, $\mathcal{V}$ n'intersecte pas l'hyperplan d'équation $z_p = z_q$, et le théorème de Bézout s'applique. □

Remarque. À ce stade, rien n'affirme qu'une, au moins, des solutions données par le théorème de Bézout n'appartienne pas à Δ, et il faut procéder à une analyse plus poussée. Toutefois, la démonstration précédente montre que si les circulations satisfont à :

$$\textit{Pour tout sous-ensemble strict } J \subset \{1, \dots, N\}, \quad \sum_{j,k \in J} \gamma_j \gamma_k \neq 0,$$

alors $\mathcal{V}$ n'intersecte pas Δ. Ainsi il y a exactement $(N-2)!$ configurations stationnaires.

Références

[Are79] H. Aref – « Motion of three vortices », *Phys. Fluids* **22** (1979), p. 393–400.

[Are83] ———, « Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows », *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15** (1983), p. 345–389.

[Are09] ———, « Stability of relative equilibria of three vortices », *Physics of fluid* **21** (2009), article no. 094101.

[Are10] ———, « Self-similar motion of three point vortices », *Physics of fluid* **22** (2010), article no. 057104.

[ANS+03] H. Aref, P. K. Newton, M. Stremler, T. Tokieda & D. Vainchtein – « Vortex crystals », *Adv. in Appl. Mech.* **39** (2003), p. 1–79.

[Bon01] J.-M. Bony – *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

[Bre15] Y. Brenier – « Mathématiques des plasmas et fluides », in *Des problèmes à N corps aux Tokamaks*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2015, ce volume.

[Che10] J.-Y. Chemin – « Équations d'Euler d'un fluide incompressible », in *Facettes mathématiques de la mécanique des fluides*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2010, p. 1–23.

[Grö77] W. Gröbli – « Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden », *Vierteljahrsschr. Natforsch. Ges. Zur.* **22** (1877), p. 37 & 129.

[Hel58] H. Helmoltz – « Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen », *Crelles J.* **55** (1858), p. 25–55, traduction : « On the integral of the hydrodynamical equations which express vortex motion », *Phil Mag.* **33** (1867), 485–513.

[Kel10] Kelvin (Lord) – *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1910.

[Kir76] G. Kirchhoff – *Vorlesungen über Math. Phys.*, Teubner, Leipzig, 1876.

[KY02a] L. G. Kurakin & V. I. Yudovich – « On the nonlinear stability of the steady rotation of a regular vortex polygon », *Dokl. Akad. Nauk* **384** (2002), no. 4, p. 476–482.

[KY02b] ———, « The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon », *Chaos* **12** (2002), no. 3, p. 574–595.

[MN99] C. Marchioro & P. Negrini – « On a dynamical system related to fluid mechanics », *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* **6** (1999), no. 4, p. 473–499.

[MP93] C. Marchioro & M. Pulvirenti – « Vortices and localization in Euler flows », *Comm. Math. Phys.* **154** (1993), no. 1, p. 49–61.

[MP94] ———, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Applied Math. Sciences, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1994.

[O'N06] K. A. O'Neil – « Minimal polynomial systems for point vortex equilibria », *Phys. D* **219** (2006), no. 1, p. 69–79.

[O'N07] ———, « Relative equilibrium and collapse configurations of heterogeneous vortex triple rings », *Phys. D* **236** (2007), no. 2, p. 123–130.

[Poi93] H. Poincaré – *Théorie des tourbillons*, Georges Carré, Paris, 1893.

Évelyne Miot, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, CNRS UMR 7640, École Polytechnique, Palaiseau, France
E-mail : `Evelyne.Miot@univ-grenoble-alpes.fr`