Journées mathématiques X-UPS

Année 2011

Histoires de mathématiques

Patrick POPESCU-PAMPU

Qu'est-ce que le genre ?

Journées mathématiques X-UPS (2011), p. 57-204.
https://doi.org/10.5802/xups.2011-03

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2011, p. 57–204 doi: 10.5802/xups.2011-03

QU'EST-CE QUE LE GENRE ?

par

Patrick Popescu-Pampu

Résumé. Descartes range les courbes planes d'après leur degré. Au XIX^{e} siècle émerge, entre autres grâce à Abel et Riemann, un nouveau principe de rangement, à l'aide de la notion de genre. Celle-ci se manifeste de plusieurs manières différentes. On en examine certaines et on donne des aperçus de notions analogues introduites pour des objets de dimension plus grande.

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 2011. Histoires de mathématiques. Éditions de l'École polytechnique, 2011.

1. Introduction

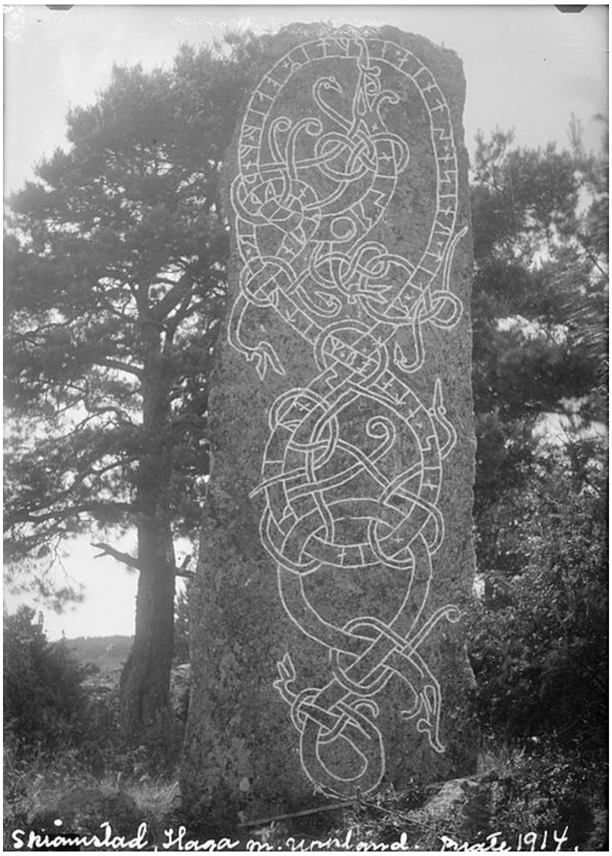
La manière probablement la plus rapide pour introduire de nos jours la notion mathématique de *genre*, est de dire qu'il s'agit du nombre de trous d'une surface, en précisant toutefois aux personnes averties qu'il faut que celle-ci soit compacte, connexe, orientable et sans bord. Par exemple, une sphère est de genre 0, un tore est de genre 1 et la surface d'un bretzel est de genre 3.

Cette définition a l'avantage d'être intuitive, on peut l'expliquer sur des exemples même à des enfants. Et avec un peu d'entraînement, on arrive à trouver rapidement le genre d'une surface qui nous est présentée ... pourvu qu'elle ne soit pas trop contorsionnée ou nouée, comme dans la photo suivante, qui ne représente pourtant que des surfaces de genre zéro[1].

Les exemples de ce type permettent de voir que le concept de « trou » n'a pas toujours un sens. Y a-t-il un autre concept, peut-être moins intuitif, qui serait valable pour toutes les surfaces, et qui

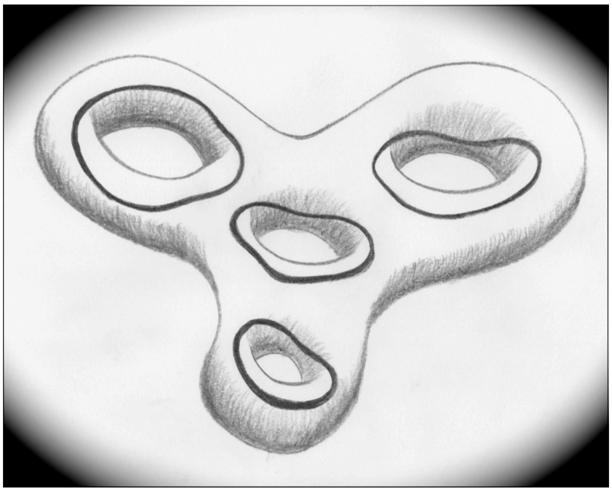
[1]Il s'agit d'une photo de rocher runique prise dans la commune de Sigtuna (Suède) en 1914 par Erik Brate et disponible à l'adresse `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:U_460%2C_Skr%C3%A5msta.jpg`.

donnerait le nombre de trous lorsque la surface en a visiblement, comme dans la première photo



Eh bien, on a cherché progressivement à définir le concept de « genre » justement pour qu'il puisse s'appliquer à toutes les surfaces, indépendamment de leur forme dans l'espace. Pour qu'il s'applique aussi à des surfaces situées dans des espaces de dimension supérieure, et même à des surfaces « abstraites » qui ne vivent nulle part ailleurs qu'en elles-mêmes.

Voici comment on peut arriver à une telle définition, qui ne fait plus référence à un espace environnant. Partons des exemples intuitifs, où les trous sont immédiatement reconnaissables. Dessinons alors sur la surface des contours qui entourent ces trous. Comme les trous sont séparés les uns des autres, on peut choisir ces contours disjoints deux à deux. On se retrouve donc avec des cercles dessinés sur la surface, aussi nombreux que les trous.



Voilà donc une idée : c'est de tracer des cercles deux à deux disjoints sur n'importe quelle surface, puis de les compter, et de dire que le nombre obtenu est *le genre* de la surface. Mais afin que cette construction donne naissance à un concept bien défini, il faut expliquer d'abord suivant quelles contraintes on doit choisir les cercles, puis il faut montrer que tous les choix donnent le même nombre.

Il est clair qu'on peut toujours choisir un seul cercle, ou bien qu'on peut continuer à en dessiner d'autres, par exemple à chaque fois un peu différents de l'un des cercles déjà présents. Pour comprendre comment interdire ces choix, qui ne nous permettraient pas d'aboutir à un nombre défini de manière unique, reprenons l'un de nos exemples initiaux, ayant un cercle entourant chaque trou. Découpons la surface le long de tous ces cercles. On constate qu'elle reste connexe. Mais, comme on peut le voir sur autant d'exemples qu'il nous plaît, dès qu'on trace un nouveau cercle on la disconnecte.

On arrive à la définition suivante :

Le genre d'une surface (compacte, connexe, orientable et sans bord) est le nombre maximal de cercles deux à deux disjoints tracés sur la surface, dont le complémentaire est connexe.

C'est alors un théorème que tous les ensembles de cercles vérifiant ces contraintes ont le même nombre d'éléments. Et voilà, on a bien une définition s'appliquant à toute surface abstraite, puisqu'elle fait appel uniquement à des constructions à l'intérieur de la surface, et non pas à un quelconque espace la contenant.

Bien sûr, pour construire une définition parfaitement satisfaisante logiquement et non seulement intuitivement il faut définir ce qu'on entend précisément par une surface, par un cercle tracé dessus, par l'opération de découpage, par la connexité. La topologie s'est développée en particulier pour donner un sens précis à tout cela. Si on démontre ensuite soigneusement le théorème précédent d'invariance du nombre de cercles, on obtient vraiment un concept construit rigoureusement d'un point de vue logique.

Mais cela ne dit pas pourquoi on a été amené a dégager ce concept, ni pourquoi il est important. En fait, son importance vient du fait qu'il admet de nombreux avatars, chacun suggérant d'autres généralisations en dimensions plus grandes, et que toutes ces généralisations sont les caractères de base permettant de classifier les être géométriques en analogie avec la classification des êtres vivants.

Nous allons examiner ici diverses manifestations de ce concept pendant une promenade dans le temps. Cette promenade ne se propose pas l'exhaustivité, elle est simplement une invitation à écouter les mathématiciens du passé. J'ai choisi de présenter beaucoup de citations, afin de laisser parler les acteurs sur leurs motivations et des spectateurs privilégiés sur leurs interprétations. Est mise de cette manière en évidence la variété des styles, ainsi que l'évolution du langage, des questionnements et des points de vue.

Cette promenade aura trois parties : dans la première on traitera des courbes algébriques et de leur manifestation topologique lorsqu'on regarde leurs points complexes, les surfaces de Riemann. La deuxième traitera des diverses notions de genres introduites pour les surfaces algébriques. Enfin, dans la dernière nous nous occuperons des généralisations en toutes dimension. Mais avant de nous lancer dans ce périple, nous verrons comment Aristote expliquait le sens du terme « *γένος* ».

Remerciements. J'ai beaucoup profité du travail d'équipe ayant mené au livre [144], par exemple grâce au contact qu'elle m'a permis avec des écrits du XIXe siècle. Merci à tous mes coauteurs. Je tiens aussi à remercier Clément Caubel, Youssef Hantout, Andreas Höring, Walter Neumann, Claude Sabbah, Michel Serfati, Olivier Serman et Bernard Teissier pour leur aide, leurs remarques ou leurs conseils.

2. Le $\gamma\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma$ selon Aristote

Le terme de *genre* nous est parvenu du Grec ancien $\gamma\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma$ via le Latin. C'est un terme utilisé déjà à l'époque d'Aristote dans les classifications, comme on le voit dans l'extrait suivant de sa « *Métaphysique* » [5, Livre Δ, section 28] :

> « Genre » ou « race » exprime d'abord la génération continue des êtres ayant la même forme. On dit, par exemple, « tant que subsistera le genre humain », c'est-à-dire : tant qu'il y aura génération ininterrompue des hommes. – C'est aussi ce dont les êtres dérivent, le principe qui les fait passer à l'être : ainsi, certains sont appelés Hellènes par la race, et d'autres Ioniens, parce qu'ils ont, les uns, Hellen, les autres, Ion, comme premier générateur. [...] – En un autre sens, la surface est le genre des figures planes, et le solide, des solides, car chaque figure est ou telle surface, ou tel solide. [...] – Dans les définitions, ce qui est comme le premier élément constituant, lequel est affirmé de l'essence, c'est le genre, dont les qualités sont dites être les différences. – [...]
>
> « Différentes par le genre » se dit des choses dont le sujet prochain est différent, et qui sont irréductibles les unes aux autres, ou ne peuvent rentrer dans une même chose : par exemple, la forme et la matière diffèrent par le genre. Il en est de même de tout ce qui tombe sous des catégories différentes de l'Être, car certaines choses qui sont dites « être » signifient soit une substance, soit une qualité, soit d'autres catégories précédemment distinguées. Or ces modes de l'Être sont irréductibles les uns aux autres, et ne peuvent non plus rentrer dans un seul.

Partie 1. Les courbes algébriques

3. Descartes et le nouveau monde des courbes

Faisons un immense saut temporel, et passons à la « *Géométrie* » [47] de Descartes, parue en 1637, illustration du « *Discours de la* *méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* ». Descartes y dévoile un nouveau monde de *courbes*. Il constate que les sections coniques des anciens, une fois rapportées à deux droites qui se coupent, et qui sont munies d'un choix d'unité de mesure (ce que l'on appelle, en souvenir de lui, « *un système de coordonnées cartésiennes* »), peuvent toutes être décrites à l'aide d'une équation polynomiale du deuxième degré. Il affirme alors qu'il n'y a pas de raison de ne pas étudier aussi les courbes définies par des équations de degré plus grand. Pourtant, les anciens n'entreprirent pas une telle étude, à l'exception de l'examen de quelques cas particuliers (voir [22]). Voici, en Français modernisé, comment Descartes explique ce fait ([47, Livre Second, p. 42]) :

> Mais peut-être que ce qui a empêché les anciens géomètres de recevoir celles qui étaient plus composées que les sections coniques, c'est que les premières qu'ils ont considérées, ayant par hasard été la Spirale, la Quadratrice et semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux Mécaniques, et ne sont point du nombre de celles que je pense devoir ici être reçues, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement, bien qu'ils aient après examiné la Conchoïde, la Cissoïde, et quelque peu d'autres qui en sont, toutefois à cause qu'ils n'ont peut-être pas assez remarqué leurs propriétés, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premières. Ou bien c'est que voyant, qu'ils ne connaissaient encore, que peu de choses touchant les sections coniques, et qu'il leur en restait même beaucoup, touchant ce qui se peut faire avec la règle et le compas, qu'ils ignoraient, ils ont cru ne devoir entamer de matière plus difficile. Mais parce que j'espère que dorénavant ceux qui auront l'adresse de se servir du calcul Géométrique ici proposé, ne trouveront pas assez de quoi s'arrêter touchant les problèmes plans, ou solides ; je crois qu'il est à propos que je les invite à d'autres recherches, où ils ne manqueront jamais d'exercice.

Nous découvrons ainsi un Descartes soucieux d'établir les frontières de son nouveau monde des courbes : il y en a certaines, qu'il appelle « mécaniques » (par exemple la Spirale), qui n'en font pas partie. On verra dans la section suivante que, par contre, Newton en inclut parmi les courbes « géométriques », mais en les rangeant dans une catégorie spéciale, celle des courbes ayant *un degré infini*.

En fait, Descartes n'utilise le terme de « *degré* » que rarement, et alors de manière imagée, pour parler d'une gradation dans la complexité des courbes. Il continue à interpréter les inconnues à la manière des anciens, comme des longueurs de segments, par conséquent un monôme qui pour nous est de *degré* d correspond pour lui au volume d'un parallélépipède de *dimension* d. Les équations polynomiales à deux variables sont donc rangées d'après leurs *dimensions*. Par exemple, voici ce qu'il écrit dans [47, Livre Second, p. 49] :

> Je pourrais mettre ici plusieurs autres moyens pour tracer et concevoir des lignes courbes, qui seraient de plus en plus composées par degrés à l'infini. Mais pour comprendre ensemble toutes celles, qui sont en la nature, et les distinguer par ordre en certains genres ; je ne sais rien de meilleur que de dire que tous les points, de celles qu'on peut nommer Géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même, et que lorsque cette équation ne monte que jusqu'au rectangle de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une même, la ligne courbe est du premier ou plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse qui soient comprises, mais que lorsque l'équation monte jusque à la trois ou quatrième dimension des deux, ou de l'une des deux quantités indéterminées, car il en faut deux pour expliquer ici le rapport d'un point à un autre, elle est du second ; et que lorsque l'équation monte jusqu'à la 5 ou sixième dimension, elle est du troisième ; et ainsi des autres à l'infini.

Remarquons que Descartes affirme ranger de cette manière les courbes par « *genres* ». Il ne s'agit pas encore du sens actuel. Ce qui est insolite, c'est qu'il regroupe dans un même « genre » (le n-ème) les courbes définies par des équations de degrés $2n - 1$ et $2n$. Et ce, pour une raison assez mystérieuse ([47, p. 49]) :

> [...] il y a règle générale pour réduire au cube toutes les difficultés qui vont au carré de carré, et au sursolide toutes celles qui vont au carré de cube, de façon qu'on ne les doit point estimer plus composées.

Voici ce que m'a communiqué à ce sujet Michel Serfati, spécialiste de l'œuvre de Descartes : « *Descartes indique d'abord que le* 4^e^ *degré peut se réduire au* 3^e^*. Cette conclusion sera établie au livre III sur le plan algébrique, en ramenant classiquement une équation du* 4^e^ *degré à une résolvante du* 3^e^*, par une méthode intéressante, spécifique de Descartes, et différente de celle de Ferrari dans l'*Ars Magna *de 1545 dont on est pourtant sûr que Descartes en a connu le texte. [...] Partant de cette situation, Descartes croit pouvoir affirmer, sans preuve et par une fausse extension, que les courbes du troisième genre (*5^e^ *et* 6^e^ *degrés) peuvent toutes se ramener au* 5^e^*, degré le plus faible, qui les représenterait donc toutes* ».

4. Newton et la classification des courbes

Newton avait soigneusement étudié dans sa jeunesse le calcul géométrique de Descartes, qui lui servit comme source d'inspiration pour le développement du « calcul des fluxions », sa version du calcul différentiel. Ceci explique en partie pourquoi il entreprit de classifier suivant diverses espèces les courbes du troisième degré, par analogie avec la classification des courbes du deuxième degré, les coniques, en *ellipses, paraboles, hyperboles* ou *couples de droites.* Voici le premier paragraphe du chapitre de l'ouvrage [120] paru en 1711, qui contient cette classification :

> On distingue de manière optimale en Ordres les lignes géométriques selon le nombre de dimensions de l'équation qui définit la relation entre Ordonnées et Abscisses, ou ce qui revient au même, selon le nombre de points en lesquelles elles peuvent être coupées par une ligne droite. Pour cette raison, les lignes du premier Ordre sont constituées de la Droite seule, du second Ordre ou quadratique les sections coniques et le cercle, et du troisième ou cubique la Parabole Cubique, la Parabole *Neilienne*, la Cissoïde des anciens et les restantes dont nous entreprenons ici l'énumération. Ainsi donc, une courbe du premier Genre (car la Droite n'est pas comptée parmi les courbes) est la même chose qu'une Ligne de second Ordre, et une courbe du second Genre la même chose qu'une Ligne du troisième Ordre. Et une ligne d'Ordre infini est celle qu'une droite peut couper en une infinité de points, comme sont la Spirale, la Cycloïde, la Quadratrice et toute ligne engendrée par une infinité de révolutions de rayons ou de cercles.

On voit que Newton parle de « *genres* » pour les « courbes » mais d'« *ordres* » pour les « lignes ». Sa notion de *genre* est différente de celle de Descartes, puisqu'un polynôme de degré n définit une courbe d'*ordre* n et une ligne de *genre* $n-1$. Il semble étrange qu'il ait ainsi deux termes différents pour parler des mêmes objets. Il est probable qu'il désirait utiliser les deux termes standards à l'époque, et que le langage courant répugnait à dire qu'*une droite était courbe*.

Remarquons aussi l'interprétation géométrique du degré d'une courbe, comme *nombre de points d'intersection avec une droite*. Cela est bien sûr à prendre avec des bémols, qui furent compris ultérieurement : si on veut avoir égalité pour toutes les courbes, il faut regarder non seulement les points d'intersection réels, mais aussi ceux complexes, ne considérer que certaines droites (qui ne sont ni asymptotes, ni dirigées suivant des directions asymptotiques), et compter avec des multiplicités convenables les points d'intersection.

Tout cela allait être éclairci progressivement grâce d'une part à la démonstration du « *théorème fondamental de l'algèbre* » et à la considération des points complexes du plan, et d'autre part à l'introduction de la « *la droite à l'infini* » et aux points d'intersection à l'infini. Ce qui revient à travailler dans le *plan projectif complexe*, qui fut le cadre privilégié de l'étude géométrique des courbes algébriques au XIXe siècle (voir par exemple le livre historique [154] de Stillwell, ainsi que les renseignements historiques du livre [22] de Brieskorn et Knörrer).

5. Quand les intégrales cachent des courbes

Dans les deux sections précédentes il a été question de courbes et des polynômes ou des mouvements qui les définissent. Ces courbes représentaient souvent les incarnations de problèmes de résolution d'équations polynomiales, à une ou plusieurs variables.

Dans le dernier quart du XVIIe siècle, Newton et Leibniz développèrent de manière différente les fondements d'un calcul différentiel et intégral, ce qui déclencha une querelle de priorité fameuse. En tout cas, vers la fin du siècle était apparu ainsi un nouveau type de problème, celui de l'*intégration explicite des différentielles*

$f(x)dx$, c'est-à-dire le calcul des primitives $\int f(x)dx$, où $f(x)$ est une fonction[(2)] donnée. En fait, *ce problème est relié aussi à l'étude des courbes*!

Pour le voir, partons de l'exercice suivant, contenu dans les leçons de calcul intégral données par Johann Bernoulli à l'usage du marquis de l'Hôpital ([16, p. 393]), et repris en Français avec des notations modernisées par André Weil ([167, p. 400]) :

> Tout revient donc à rendre rationnelles des expressions irrationnelles ... à quoi les questions diophantiennes sont d'un grand usage ... Par exemple, qu'on veuille intégrer
>
> $$\frac{a^2dx}{x\sqrt{ax-x^2}};$$
>
> on fera le changement de variable $ax - x^2 = a^2x^2t^{-2}$ ...

En langage moderne, le problème que pose Bernoulli est celui du calcul des primitives de la fonction $a^2/x\sqrt{ax-x^2}$. Le changement de variable qu'il propose permet d'exprimer aussi dx en termes de dt, d'où :

$$\int \frac{a^2dx}{x\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{2}{3}a^2t^3 + \text{const} = -\frac{2}{3}a^5\sqrt{\Big(\frac{x}{a-x}\Big)^3} + \text{const}.$$

En particulier, l'intégrale *est encore une fonction algébrique de la variable* x (c'est-à-dire une fonction $y(x)$ qui vérifie une relation polynomiale $P(x,y) = 0$), comme l'était son intégrant. Nous reviendrons de manière plus détaillée à la notion de fonction algébrique dans la section 13.

Quelle courbe se cache derrière ce calcul ? Pour le voir, remarquons que la fonction à intégrer n'est pas une fraction rationnelle, car elle contient une racine carrée. Introduisons une nouvelle variable égale à cette racine carrée : $y = \sqrt{ax-x^2}$. Cette équation devient $x^2 - ax + y^2 = 0$, qui définit bien une courbe dans le plan des coordonnées cartésiennes x, y. Avec la mesure des longueurs usuelles, il s'agit de l'équation d'un *cercle* passant par l'origine, qui est un cas particulier de conique. Et le procédé d'intégration précédent est basé sur

[(2)]Le terme de « *fonction* » a d'ailleurs été introduit par Leibniz.

le fait que ce cercle *peut être paramétré rationnellement*, c'est-à-dire à l'aide de fractions rationnelles. Concrètement, on a obtenu :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{a^2t^2+1} \\ y = \dfrac{a^2}{t(a^2t^2+1)} \end{cases}$$

Ce procédé d'intégration s'applique chaque fois que l'on part d'une différentielle de la forme $F(x, \sqrt{q(x)})dx$, où $q(x)$ est un polynôme du deuxième degré en x et $F(u, v)$ est une fraction rationnelle. En effet, la courbe associée est celle définie par l'équation $y^2 - q(x) = 0$, qui est encore une conique. Mais les coniques peuvent toujours être paramétrées rationnellement, en les projetant stéréographiquement à partir de l'un de leurs points, ce qui permet de transformer par changement de variable l'intégrale précédente en une intégrale de fraction rationnelle.

Grâce au théorème de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, qui a été développé précisément dans ce contexte, et qui a été aussi un stimulant important pour démontrer le théorème fondamental de l'algèbre (voir Houzel [91, Chapitre III]), on en déduit que :

Théorème 5.1. *Les primitives* $\int F(x, \sqrt{q(x)})dx$ *sont des sommes de fonctions algébriques et de logarithmes de telles fonctions.*

6. Jakob Bernoulli et la construction des courbes

Dans l'extrait suivant de [14][(3)], Jakob Bernoulli, frère de Johann, dont nous avons parlé dans la section précédente, analyse diverses méthodes de construction de courbes « mécaniques » ou « transcendantes », c'est-à-dire qui ne sont pas « algébriques » (définies par une équation polynomiale). Ces méthodes mettent dans un même cadre les courbes algébriques de Descartes et celles fournies par le calcul différentiel et intégral :

---

(3) J'ai trouvé cet extrait dans l'article [153, §2] d'Ivahn Smadja, qui est ma source principale pour tout ce qui suit dans cette section.

> On a trois procédures principales pour construire des courbes mécaniques ou transcendantes. La première consiste en la quadrature des aires curvilignes, mais elle est peu adaptée à la pratique. Il est préférable de procéder par la rectification des courbes algébriques ; car dans la pratique on peut plus précisément et plus aisément rectifier les courbes, à l'aide d'un fil ou d'une petite chaîne enroulée sur la courbe, que quarrer les surfaces. J'apprécie tout autant les constructions qui procèdent sans aucune rectification ou quadrature, par la simple description d'une courbe mécanique dont on peut trouver géométriquement, sinon tous, au moins une infinité de points arbitrairement proches les uns des autres ; on compte parmi elles la logarithmique et peut-être encore d'autres courbes de ce genre. Mais la meilleure méthode, pour autant qu'elle soit applicable, est celle qui fait appel à une courbe que la nature produit elle-même sans aucun artifice, d'un mouvement rapide et pour ainsi dire instantané, au premier coup d'œil du géomètre. Car toutes les méthodes citées auparavant exigent des courbes dont la construction – qu'elle soit exécutée par le dessinateur d'un mouvement continu ou par l'invention de plusieurs points – est d'ordinaire trop lente et trop pénible. Aussi j'estime que les constructions des problèmes qui supposent la quadrature d'une hyperbole ou la description d'une logarithmique sont *ceteris paribus* moins favorables que celles qui se font à l'aide de la caténaire ; car une chaîne prendra d'elle-même la forme de celle-ci avant qu'on ne puisse entamer la construction des autres.

Précisons cela en termes modernes. Lorsque l'on part d'une fonction connue $f(x)$, l'une de ses primitives $\int f(x)dx$ est une nouvelle fonction. En termes géométriques, si le graphe de $f(x)$ est une courbe connue, le graphe de $\int f(x)dx$ est une nouvelle courbe. Il s'agit de la première « procédure » de Bernoulli, par quadratures. Sa deuxième procédure consiste à partir d'une courbe connue vue comme graphe d'une fonction $f(x)$, et à prendre le graphe de la fonction qui associe à x la longueur de l'arc compris entre le point d'abscisse x et un point d'abscisse initiale fixée. En fait, calculer la longueur d'un arc se disait le « rectifier » (concrètement, comme l'explique Jakob Bernoulli, en la tendant on peut rendre droite « une petite chaîne enroulée sur la courbe »).

Dans le cas où on ne réussit pas à calculer explicitement une intégrale comme dans le théorème 5.1, on peut chercher à la voir comme étant l'intégrale associée à la rectification d'une courbe connue, par exemple algébrique.

C'est en s'occupant de ce type de questions que les deux frères tombèrent semble-t-il indépendamment en 1694 sur la même courbe (leurs publications à ce sujet étant [14] et [15]). Ils cherchaient tous les deux à résoudre *le problème de l'isochrone paracentrique*, qui avait été posé par Leibniz : « *Trouver la courbe sur laquelle la chute d'un corps pesant l'éloigne ou le rapproche uniformément d'un point donné* ». Ils ramenèrent le calcul à celui de l'intégrale :

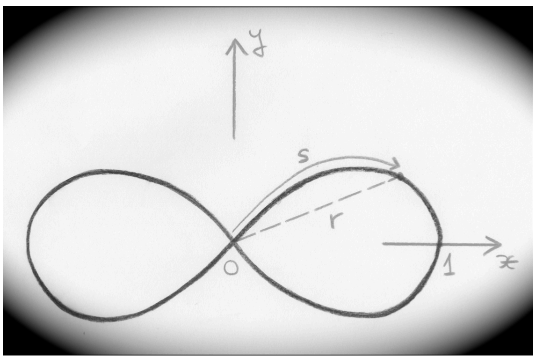
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \tag{6.1}$$

et se rendirent compte que cette intégrale provenait aussi du problème de rectification de la courbe d'équation :

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2. \tag{6.2}$$

Cette courbe, la *lemniscate*, est représentée dans la figure suivante. Elle peut aussi être définie géométriquement comme *lieu des points dans un plan dont le produit des distances à deux points fixés est égale au produit des distances du milieu du segment joignant les deux points à ses extrémités.*

Le nom de « *lemniscate* » a été proposé par Jakob Bernoulli dans [14], car la courbe a la « *forme d'un huit renversé* ∞*, d'un lacet noué, d'un* $\lambda\eta\mu\nu\acute{\iota}\sigma\kappa o\sigma$*, ou en français, d'*un nœud de ruban ».



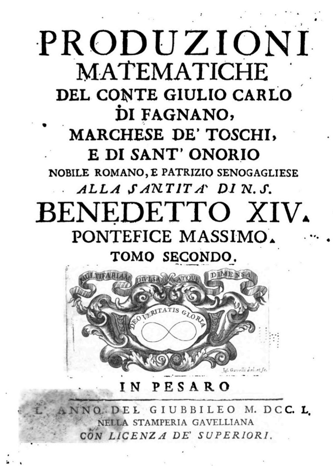
Pour voir que l'on se ramène à l'intégrale (6.1) dans le problème de la rectification de la lemniscate, on peut calculer en coordonnées polaires. Plus précisément, on exprime x^2 et y^2 en termes de la distance r à l'origine grâce à l'équation (6.2), puis par différentiation et un petit calcul on arrive à l'expression suivante pour la longueur s de l'arc allant de l'origine à un point situé sur la lemniscate dans le quadrant positif :

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}}. \tag{6.3}$$

L'expression sous le radical dans (6.3) étant du quatrième degré, la courbe associée, d'équation $y^2 = 1 - x^4$, n'est plus une conique. Donc la méthode de calcul expliquée dans la section précédente ne marche plus. Y en aurait-il une autre qui marcherait ? Les frères Bernoulli ne surent pas répondre à cette question, et il fallut attendre les travaux de Fagnano pour commencer à pouvoir dire des choses sur cette « intégrale lemniscatique », sans la calculer explicitement.

7. Fagnano et la lemniscate

Fagnano publia ses travaux sur la lemniscate autour de 1718. Il en fut si fier que, lors de l'édition de son œuvre mathématique en 1750, il fit représenter une lemniscate sur la page de titre, surmontée de la devise « *Deo Veritatis Gloria* » :


PRODUZIONI
MATEMATICHE
DEL CONTE GIULIO CARLO
DI FAGNANO,
MARCHESE DE' TOSCHI,
E DI SANT' ONORIO
NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE
ALLA SANTITA' DI N. S.
BENEDETTO XIV.
PONTEFICE MASSIMO.
TOMO SECONDO.

IN PESARO
L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.
NELLA STAMPERIA GAVELLIANA
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Voici comment Fagnano décrit dans [63][4] ses travaux sur la lemniscate :

> Deux grands géomètres, Jakob et Johann Bernoulli, ont rendu célèbre la lemniscate en se servant de ses arcs pour construire l'isochrone paracentrique, comme on peut le voir dans les Actes de Lipse de 1694. Il est visible qu'en mesurant la lemniscate au moyen de quelque autre courbe plus simple qu'elle, on obtient une construction plus parfaite non seulement de l'isochrone paracentrique, mais encore d'une infinité d'autres courbes qui, pour être construites peuvent dépendre de la lemniscate ; c'est pourquoi je me flatte que les mesures de cette courbe que j'ai découvertes et que j'exposerai en deux courts mémoires ne seront pas pour déplaire à ceux qui y entendent quelque chose.

Ici nous nous intéresserons à une seule formule de Fagnano, celle donnant le *doublement de l'arc de lemniscate* (voir [153, §4]) :

Théorème 7.1. *Si* $\dfrac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \dfrac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}$ *, alors :*

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Ceci peut se réécrire de la manière suivante (en exprimant d'abord z en fonction de u) :

$$z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} \implies 2\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \tag{7.2}$$

formule qui montre que si on part d'un point de la lemniscate situé à la distance u de l'origine, alors pour doubler l'arc correspondant $s(u)$ on peut prendre un point situé à la distance z de l'origine, u et z étant reliées par une relation algébrique explicite.

On pourra trouver une comparaison de ce qui précède avec les formules de doublement des arcs de cercle dans Stillwell [154, 12.4].

---

[4] J'ai repris la traduction française à Smadja [153, §2], où le lecteur pourra trouver une description détaillée des travaux de Fagnano sur la lemniscate.

8. Euler et l'addition des intégrales lemniscatiques

En 1751, Fagnano candidata pour devenir membre de l'académie des sciences de Berlin. C'est à cette occasion qu'Euler étudia ses travaux, et ceci lui donna des idées nouvelles. Il obtint ainsi en 1753 la généralisation suivante de la formule (7.2) :

Théorème 8.1. *Si* $c = \dfrac{a\sqrt{1-b^4} + b\sqrt{1-a^4}}{1+a^2b^2}$, *alors :*

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^c \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

On voit que l'on retombe sur la relation (7.2) en faisant $a = b$.

Dans [61], avant de passer à une description de ses recherches déclenchées par l'étude des travaux de Fagnano sur la lemniscate, recherches qui contiennent entre autres la formule d'addition précédente, Euler nous présente sa vision de l'utilité des « spéculations » mathématiques(5) :

> Si l'on s'attache à l'utilité qu'elles présentent, les spéculations mathématiques semblent devoir être ramenées à deux grandes classes ; à la première classe se rapportent celles qui procurent un avantage remarquable à la fois à la vie commune et aux autres arts, et on en fixe d'ordinaire le prix d'autant plus haut que cet avantage est grand. Mais une autre classe cependant rassemble les spéculations qui, quoiqu'elles ne soient liées à aucun avantage remarquable, sont cependant de nature à fournir une occasion de promouvoir les fins de l'Analyse et d'aiguiser les forces de notre esprit. Puisqu'en effet nous sommes conduits à laisser de côté de très nombreuses recherches, dont on peut attendre une très grande utilité, en raison seulement d'un défaut d'analyse, il semble que nous ne devons pas estimer à un moindre prix ces recherches qui promettent des accroissements non négligeables de l'Analyse. En vue de cette fin, ces observations sont particulièrement précieuses qui ont été faites presque par hasard et découvertes a posteriori, dont on ne perçoit aucune raison a priori, ni aucune voie directe pour les atteindre. Mais la vérité étant déjà connue, il sera permis de rechercher plus facilement dans ces observations des méthodes qui conduisent directement à

(5) Je reprends la traduction en Français de [153, §5].

> cette vérité, et il ne fait clairement aucun doute que la recherche de nouvelles méthodes ne contribue pas peu à la promotion des buts de l'Analyse.
>
> J'ai trouvé dans l'ouvrage récemment publié du comte Fagnano quelques observations de ce genre qui sont faites sans méthode certaine et dont la raison semble assez cachée. [...]
>
> Puisque la raison de ces propriétés semble ainsi grandement occulte, j'estime qu'il ne sera pas hors de propos que je les examine de manière plus diligente, et que je partage avec le public celles qu'en outre j'ai eu le bonheur de mettre au jour concernant ces courbes.

Nous découvrons donc un Euler soucieux de s'élever du particulier au général, d'extraire d'un matériau expérimental (ici les écrits de Fagnano) ce qui est susceptible de s'appliquer dans les contextes les plus larges. Ainsi, il parvint à généraliser la loi d'addition 8.1 au cas où $1 - x^4$ est remplacé par un polynôme quelconque du quatrième degré (voir [91, VIII.3]).

Parvenus à ce niveau de généralité, dans lequel la lemniscate est devenue indiscernable des courbes planes de degré 3 ou 4, nous allons nous aussi la quitter, en n'y revenant que pour illustrer des théorèmes généraux. Le lecteur curieux d'en apprendre beaucoup plus sur elle pourra consulter les articles historiques [9], [145], [153] ainsi que le dernier chapitre du très original manuel [44] de théorie de Galois.

9. Legendre et les fonctions elliptiques

Autour de 1800, Legendre passa quelques décennies à développer une théorie générale des intégrales qu'il appela *fonctions elliptiques*, et qui vérifient une formule d'addition analogue à celle établie par Euler dans le théorème 8.1. Voici ce qu'il écrit au sujet de ses motivations dans l'Avertissement de [111] :

> Euler avait prévu qu'à l'aide d'une notation convenable, le calcul des arcs d'ellipse et autres transcendantes analogues, pourrait devenir d'un usage presque aussi général que celui des arcs de cercle et des logarithmes[(6)] ; mais si on excepte *Landen*, qui,

[(6)]Voici les paroles d'Euler (Novi Com. Petrop., tom. X, pag. 4). « *Imprimis autem hic idoneus signandi modus desiderari videtur, cujus ope arcus elliptici æque commode in calculo exprimi queant ac jam logarithmi et arcus circulares, ad*

> par la découverte de son théorème, aurait pu s'ouvrir des routes nouvelles, personne ne s'est mis en devoir de réaliser la prédiction d'Euler, et on peut dire que l'Auteur de ce Traité est resté seul à s'en occuper, depuis l'année 1786 où il a fait paraître ses premières recherches sur les arcs d'ellipse, jusqu'à l'époque actuelle.

Legendre revient là-dessus à la page 1 de son Introduction :

> Si on pouvait ranger dans un ordre méthodique les diverses transcendantes qui n'ont été connues et employées jusqu'ici que sous le nom de *quadratures* ; si en étudiant leurs propriétés on trouvait les moyens de les réduire aux expressions les plus simples dont elles sont susceptibles dans l'état de généralité, et d'en calculer avec facilité les valeurs approchées lorsqu'elles deviennent entièrement déterminées ; alors les transcendantes dont il s'agit, désignées chacune par un caractère particulier et soumises à un algorithme convenable, pourraient être employées dans l'analyse à peu près comme le sont les arcs de cercle et les logarithmes ; les applications du calcul intégral ne seraient plus arrêtés, comme elles l'ont été jusqu'ici, par cette espèce de barrière qu'on ne tente plus de franchir, lorsque le problème est ramené aux quadratures, et les solutions, à peine commencées par cette réduction, recevraient tous les développemens que comporte la nature de la question.
>
> Ce qu'il serait comme impossible d'exécuter dans un plan aussi vaste que celui qui vient d'être tracé, on peut au moins le réaliser à l'égard des transcendantes qui se rapprochent le plus des fonctions circulaires et logarithmiques, telles que les arcs d'ellipse et d'hyperbole, et en général les transcendantes auxquelles nous avons donné le nom de *fonctions elliptiques*.

Voici à présent comment Legendre définit les fonctions elliptiques dans [111, Chapitre V], et la manière dont il motive son choix du nom :

> Puisque les transcendantes que nous avons considérées, se réduisent toujours à ces deux formes
>
> $$\int (A + B\sin^2\phi)\frac{d\phi}{\Delta}, \qquad \int \frac{d\phi}{(1+n\sin^2\phi)\Delta}$$

---

insigne analyseos incrementum, in calculum sunt introducti. Talia signa novam quamdam calculi speciem supeditabunt. »

[où $\Delta := 1 - c^2 \sin^2 \phi$, avec $-1 \leqslant c \leqslant 1$ et A, B, n sont des paramètres], il est clair qu'elles sont comprises dans la formule générale

$$H = \int \frac{A + B\sin^2 \phi}{1 + n\sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}.$$

Nous appellerons désormais *fonctions* ou *transcendantes elliptiques*, les intégrales comprises dans cette formule. [...]

Il ne paraît pas que la fonction H, prise dans toute sa généralité, puisse se réduire à des arcs d'ellipse ; cela n'a lieu que lorsque $n = 0$, ou lorsque quelque substitution peut faire disparaître le dénominateur $1 + n\sin^2 \phi$, ce que nous ne croyons pas possible en général. Ainsi, la dénomination de fonction elliptique est impropre à quelques égards ; nous l'adoptons néanmoins à cause de la grande analogie qu'on trouvera entre les propriétés de cette fonction et celles des arcs d'ellipse.

10. Abel et les nouvelles fonctions transcendantes

Au moment où Legendre publiait son traité [111], Abel, jeune mathématicien norvégien, commençait à publier une vaste généralisation des théorèmes d'addition pour les fonctions elliptiques. Généralisation qui concerne *toutes* les intégrales de la forme :

$$\int y \; dx, \tag{10.1}$$

y étant une fonction algébrique *quelconque* de x. Ces intégrales ont ensuite été appelées par Jacobi dans [92] « *transcendantes abéliennes* ». Par la suite on utilisa plus simplement le nom d'*intégrales abéliennes.*

Pour Abel, il est important d'étudier ces intégrales, car elles enrichissent le répertoire des fonctions dont on peut se servir en mathématique. En effet, voici le début de l'introduction de son grand article [1] de 1826 :

> Les fonctions transcendantes considérées jusqu'à présent par les géomètres sont en très-petit nombre. Presque toute la théorie des fonctions transcendantes se réduit à celle des fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, fonctions qui, dans le fond, ne forment qu'une seule espèce. Ce n'est que dans les derniers temps qu'on a aussi commencé à considérer quelques autres fonctions. Parmi celles-ci, les transcendantes elliptiques, dont M. Legendre a développé tant de propriétés remarquables et

élégantes, tiennent le premier rang. L'auteur a considéré, dans le mémoire qu'il a l'honneur de présenter à l'Académie, une classe très étendue de fonctions, savoir toutes celles dont les dérivées peuvent être exprimées au moyen d'équations algébriques, dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, et il a trouvé pour ces fonctions des propriétés analogues à celles des fonctions logarithmiques et elliptiques.

Une fonction dont la dérivée est rationnelle a, comme on le sait, la propriété qu'on peut exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, quelles que soient d'ailleurs les variables de ces fonctions. De même une fonction elliptique quelconque, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée ne contient d'autres irrationalités qu'un radical du second degré, sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré, aura encore la propriété qu'on peut exprimer une somme quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables de ces fonctions une certaine relation algébrique. Cette analogie entre les propriétés de ces fonctions a conduit l'auteur à chercher s'il ne serait pas possible de trouver des propriétés analogues de fonctions plus générales, et il est parvenu au théorème suivant :

« Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines d'une *même équation algébrique*, dont tous les coefficients sont des fonctions *rationnelles* d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction *algébrique* et *logarithmique*, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en question un certain nombre de relations *algébriques.* »

Le nombre de ces relations ne dépend nullement du nombre des fonctions, mais seulement de la nature des fonctions particulières qu'on considère. Ainsi, par exemple, pour une fonction elliptique ce nombre est 1 ; pour une fonction dont la dérivée ne contient d'autres irrationalités qu'un radical du second degré, sous lequel la variable ne passe pas le cinquième ou sixième degré, le nombre de relations nécessaires est 2, et ainsi de suite.

Ce théorème est assez mystérieux, et il l'était aussi pour ses contemporains (voir les renseignements historiques données par Kleiman [99]). J'expliquerai une interprétation moderne de ce théorème dans la section 18.

En tout cas, *apparaît là pour la première fois le genre au sens qui nous intéresse* ! Comme un nombre qui intervient dans le décompte des relations que l'on doit imposer pour arriver à un certain type d'identité concernant une intégrale abélienne.

L'histoire de la compréhension de ce qu'on appellerait *le genre* (de la courbe associée à la fonction algébrique $y(x)$ qui apparaît dans l'intégrale abélienne) allait commencer.

11. Une preuve d'Abel

Face à la difficulté qu'avaient ses contemporains à saisir ses idées très générales, Abel a décidé d'en présenter certaines dans des articles séparés. Par exemple, il publia quelques années plus tard dans [3], en 1829, la version suivante du théorème cité in extenso dans la section précédente, de laquelle manque complètement la référence à un quelconque « nombre de relations algébriques » (donc au genre) :

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme

$$0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n, \tag{1}$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x. Soit de même

$$0 = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1}, \tag{2}$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x, et supposons variables les coefficiens des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficiens par $a, a', a'' \ldots$ En vertu des deux équations (1) et (2) x sera une fonction de $a, a', a'', \ldots$ et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y. Désignons par

$$\rho = 0 \tag{3}$$

le résultat de l'élimination, de sorte que ρ ne contiendra que les variables $x, a, a', a'', \ldots$ Soit μ le degré de cette équation par rapport à x, et désignons par

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu \tag{4}$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de $a, a', a'', \ldots$ Cela posé, si l'on fait

$$\psi x = \int f(x, y)\, dx, \tag{5}$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction *rationnelle* quelconque de x et de y, je dis que la fonction transcendante ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante :

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \cdots + k_n \log v_n, \tag{6}$$

$u, v_1, v_2, \ldots v_n$ étant des fonctions rationnelles de $a, a', a'', \ldots$, et $k_1, k_2, \ldots k_n$ des constantes.

Expliquons pourquoi il n'est plus question de relations entre les variables. Dans les deux formulations, il est question de « *fonctions dont les dérivées peuvent être racines d'une même équation algébrique* » : ici il s'agit de $\psi x_1, \ldots, \psi x_\mu$. Dans les deux cas on considère la somme de ces fonctions. Mais si dans le premier énoncé les variables étaient $x_1, \ldots, x_\mu$, dans le deuxième ce sont des variables auxiliaires $a, a', a'', \ldots$, qui déterminent $x_1, \ldots, x_\mu$ via les relations (1) et (2) de l'image précédente.

La preuve qu'Abel donne du théorème précédent est basée sur une utilisation judicieuse du fait que tout polynôme symétrique est en fait un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires. J'espère que le lecteur qui fera l'effort de la comprendre s'exclamera : « l'Abel-preuve ! ».

Démonstration. Pour établir ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6) en fonction de a, a', a'', ...; car il se réduira par là à une différentielle rationnelle, comme on va voir. D'abord les deux équations (1) et (2) donneront y en fonction rationnelle de x, a, a', a'', ... De même l'équation (3) $\rho = 0$ donnera pour dx une expression de la forme

$$dx = \alpha . da + \alpha' . da' + \alpha'' . da'' + \cdots,$$

où α, α', α'', ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... De là il suit qu'on pourra mettre la différentielle $f(x, y)\,dx$ sous la forme

$$f(x, y)\,dx = \varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \varphi_2 x . da'' + \cdots,$$

où φx, $\varphi_1 x$, ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... En intégrant, il viendra

$$\psi x = \int (\varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \cdots)$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité,

$$\begin{aligned}(7) \qquad & \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu \\ &= \int [(\varphi x_1 + \varphi x_2 + \cdots + \varphi x_\mu)\,da + (\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \cdots + \varphi_1 x_\mu)\,da' + \cdots].\end{aligned}$$

Dans cette équation les coefficiens des différentielles da, da', ... sont des fonctions rationnelles de a, a', a'', ... et de x_1, x_2, ... x_μ, mais en outre ils sont symétriques par rapport à x_1, x_2, ... x_μ; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par a, a', a'', ... et par les coefficiens de l'équation $\rho = 0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des variables a, a', a'', ..., donc enfin les coefficiens de da, da', da'', ... de l'équation (7) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6).

Je me réserve de développer dans une autre occasion les nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront du jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit.

Christiania le 6 janvier 1829.

12. Les motivations d'Abel

Les travaux d'Abel dont nous venons de parler sont ceux où apparaît pour la première fois la notion de genre, mais sous une forme cachée, un peu comme un personnage secondaire laissé dans l'ombre, et dépourvu de nom. Il est intéressant de chercher à mieux comprendre les problèmes généraux qui préoccupaient Abel à ce moment-là, et dont [111] n'est que l'une des manifestations. Heureusement pour nous, Abel parle de ces problèmes dans la lettre [2] adressée à Legendre en 1828 :

> Outre les fonctions elliptiques, il y a deux autres branches de l'analyse dont je me suis beaucoup occupé, savoir la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques et la théorie des équations. À l'aide d'une méthode particulière j'ai trouvé beaucoup de résultats nouveaux, qui surtout jouissent d'une très grande généralité. Je suis parti du problème suivant de la théorie de l'intégration :
>
> « Étant proposé un nombre quelconque d'intégrales $\int y\, dx$, $\int y_1 dx$, $\int y_2 dx$ etc., où $y, y_1, y_2, \ldots$ sont des fonctions algébriques quelconques de x, trouver toutes les relations possibles entre elles qui soient exprimables par des fonctions algébriques et logarithmiques ».
>
> J'ai trouvé d'abord qu'une relation quelconque doit avoir la forme suivante :
>
> $$A \int y\, dx + A_1 \int y_1 dx + A_2 \int y_2 dx + \cdots = u + B_1 \log v_1 + B_2 \log v_2 + \cdots$$
>
> où $A, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ sont des constantes, et $u, v_1, v_2, \ldots$ des fonctions *algébriques* de x. Ce théorème facilite extrêmement la solution du problème ; mais le plus important est le suivant :
>
> « Si une intégrale $\int y\, dx$, où y est lié à x par une équation algébrique quelconque, peut être exprimée d'une manière quelconque *explicitement ou implicitement* à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques, on pourra toujours supposer :
>
> $$\int y\, dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_m \log v_m,$$
>
> où $A_1, A_2, \ldots$ sont des constantes, et $u, v_1, v_2, \ldots, v_m$ des *fonctions rationnelles* de x et y ».

Nous voyons qu'Abel s'était proposé le programme très ambitieux de trouver *toutes* les relations qui peuvent exister entre un nombre quelconque d'intégrales abéliennes. Ceci permet d'obtenir un éclairage commun pour les divers thèmes abordés dans [1], et dont le lecteur trouvera une présentation détaillée dans [99]. Nous reviendrons à certains des théorèmes découverts par Abel dans la section 18.

13. Cauchy et les promenades d'intégration

Dans la section 10, nous avons vu le genre apparaître timidement dans les recherches d'Abel concernant les propriétés des intégrales abéliennes. Arrêtons-nous un peu plus sur la définition d'une telle intégrale.

Comme le manifeste la preuve présentée dans la section 11, les écrits d'Abel sont extrêmement algébriques. Il n'est pas clair s'il pense travailler uniquement avec des nombres réels, ou bien avec des nombres complexes, ou bien formellement, en adjoignant des racines d'équations chaque fois qu'il en a besoin, sans se préoccuper d'un plongement dans l'ensemble des nombres complexes. Il n'aborde pas non plus la question de l'interprétation de l'intégrale (10.1). Peut-être travaillait-il avec elle intuitivement, comme on travaillait avec des racines carrées de nombres négatifs avant d'en chercher des interprétations constructives.

Par contre, à la même époque, Cauchy est engagé dans le développement du calcul des intégrales *définies* comprises entre deux nombres complexes. Si au début (voir [35]), son approche est plutôt calculatoire, avec le temps il développe une vision beaucoup plus géométrique, dans laquelle *intégrer* signifie *se promener le long de chemins tracés dans le plan.*

En effet, c'est justement à cette époque que se répand l'interprétation géométrique des nombres complexes comme points d'un plan muni d'un repère cartésien, et petit à petit les mathématiciens cherchent à réinterpréter les théories où interviennent ces nombres grâce à cette vision géométrique. L'une des grandes contributions de Cauchy est d'avoir fait cela pour le calcul intégral. Voici par exemple ce qu'il écrit dans l'article [36] de 1846, au sujet des intégrales abéliennes :

> Jusqu'ici, en considérant les intégrales définies qui se rapportent aux divers points d'une courbe fermée décrite par un point mobile dont les coordonnées rectangulaires représentent la partie réelle d'une variable imaginaire x et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans cette variable, j'avais supposé que, dans chaque intégrale, la fonction sous le signe $\int$ reprenait précisément la même valeur lorsque, après avoir parcouru la courbe entière, on revenait au point de départ. Mais rien n'empêche d'admettre que, dans une telle intégrale, la fonction sous le signe $\int$, assujettie, si l'on veut, à varier avec x par degrés insensibles, acquiert néanmoins des valeurs diverses à diverses époques où la valeur de x redevient la même. C'est ce qui arrivera, en particulier, si la fonction sous le signe $\int$, assujettie à varier par degrés insensibles avec la position du point mobile que l'on considère, renferme des racines d'équations algébriques ou transcendantes. Alors, si le point mobile parcourt plusieurs fois de suite une même courbe, les racines comprises dans la fonction dont il s'agit pourront varier avec le nombre des révolutions qui ramèneront le point mobile à sa position primitive O, de telle sorte qu'une racine d'une équation donnée pourra se trouver remplacée, après une révolution accomplie, par une autre racine de la même équation. [...] Mais cela n'empêchera pas l'intégrale d'acquérir, après une seule révolution du point mobile, une valeur déterminée ; et ce qui mérite d'être remarqué, c'est que cette valeur sera, pour l'ordinaire, dépendante de la position du point mobile et indépendante, sous certaines conditions, de la forme de la courbe.

Ce qui est ici en jeu, c'est qu'une « fonction algébrique » $y(x)$ n'est pas une fonction au sens ensembliste moderne, car elle n'associe pas à un élément de l'ensemble source *un seul* élément du but, mais *plusieurs*. On disait qu'elle était *multivaluée* ou *multiforme*.

Soyons plus précis. Par définition, $y(x)$ satisfait une équation polynomiale irréductible à coefficients complexes $P(x, y) = 0$. On disait que cette relation « *définit y comme fonction algébrique de x* ». Notons par n le degré en y du polynôme $P(x, y)$. À $x_0 \in \mathbb{C}$ fixé, on obtient une équation polynomiale en y qui, par le théorème fondamental de l'algèbre, admet autant de racines, comptées avec multiplicités, que le degré de $P(x_0, y)$. Pour des valeurs spéciales de $x_0 \in \mathbb{C}$, que nous appellerons les *points critiques* de $y(x)$, on a :

• soit le degré de $P(x_0, y)$ est plus petit que le degré n en la variable y de $P(x, y)$ (au moins une racine de $P(x_1, y) = 0$ s'échappe à l'infini lorsque x_1 tend vers x_0, c'est-à-dire que la courbe d'équation $P(x, y) = 0$ admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote) ;

• soit certaines des racines de l'équation sont multiples.

La « fonction algébrique » $y(x)$ associe donc n valeurs distinctes de y à chaque valeur x en dehors du sous-ensemble fini K de $\mathbb{C}$ de ses points critiques. Nous appellerons K l'*ensemble critique* de la fonction algébrique.

Par exemple, l'équation (6.3) de la lemniscate définit la fonction algébrique $y(x)$ qui s'exprime par radicaux de la manière suivante :

$$y = \pm\sqrt{\frac{-(2x^2 + 1) \pm \sqrt{8x^2 + 1}}{2}}$$

Elle n'admet pas d'asymptote verticale, et l'ensemble de ses points critiques est constitué des nombres $-1, 0, 1, \pm\sqrt{-1/8}$. Mais, comme le montrèrent les travaux d'Abel lui-même, puis ceux de Galois, il n'existe pas en général de telles expressions « explicites », par radicaux, pour les fonctions algébriques. La seule manière générale de se donner concrètement une fonction algébrique est donc à travers son polynôme de définition $P(x, y) = 0$, supposé irréductible.

Revenons aux intégrales abéliennes. *Comment intégrer une fonction algébrique si elle prend plusieurs valeurs en chaque point* ? Et si on veut plutôt lui associer une seule valeur en chaque point, comment choisir ces valeurs en des points différents ? Cauchy se rend compte qu'il n'y a pas de manière de faire cela sans conventions supplémentaires. Par contre, si on se donne les bornes d'intégration, et la valeur de la fonction en la borne de départ, on peut faire un choix de valeur *par prolongement analytique* (c'est-à-dire continu), le long de tout chemin qui va d'un point à un autre sans passer par les points critiques.

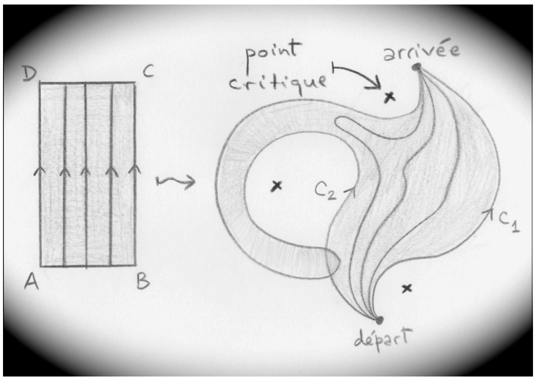
Plus précisément, l'exigence de continuité fait que l'on sait définir de proche en proche une fonction *univaluée* le long de ce chemin, cas auquel s'applique l'intégration le long des chemins, telle qu'il l'avait développée dans des travaux antérieurs. Un tel choix de fonction univaluée *continue* $y(x)$ sur une région $U \subset \mathbb{C} \smallsetminus K$, telle que $P(x, y(x)) = 0$, est appelé une *détermination* de la fonction algébrique définie par l'équation $P(x, y) = 0$. Lorsque U est un disque qui ne rencontre pas K, une telle détermination existe de manière unique dès que l'on choisit sa valeur $y(x_0)$ en un point $x_0 \in U$ parmi les racines de $P(x_0, y) = 0$. Le prolongement analytique le long d'un chemin c se fait alors en recouvrant le chemin par un nombre fini de disques suffisamment petits pour ne pas rencontrer K, puis en étendant les déterminations de proche en proche, de chaque disque au suivant.

Ce que l'on obtient ainsi est une certaine généralisation de la notion d'*intégrale définie prise entre deux points* de $\mathbb{R}$. Cauchy découvre que l'intégrale prise entre deux points de $\mathbb{C}$ (les « limites imaginaires » des titres de [35] et [36]) dépend faiblement du chemin choisi : elle reste inchangée tant que l'on déforme par continuité ce chemin en gardant ses extrémités fixées et en ne passant pas à travers les points critiques. C'est là le point de départ de la théorie de l'*homotopie* (voir [156]).

Le fait que $\int_{c_1} y\, dx = \int_{c_2} y\, dx$ si y est une fonction algébrique de x et que les chemins γ_1, γ_2 sont homotopes à extrémités fixées dans $\mathbb{C} \smallsetminus K$, provient du fait que la forme différentielle $y(x)\, dx$ est *fermée* sur une région sur laquelle on choisit une détermination continue de $y(x)$, ce qui est équivalent au fait que les parties réelles et imaginaires y_1, y_2 de y vérifient le système d'équations aux dérivées partielles dit « *de Cauchy-Riemann* ».

Expliquons cela un peu mieux, en termes modernes. Se donner une homotopie entre les deux chemins c_1, c_2 revient à se donner une application différentiable ϕ d'un rectangle $ABCD$ vers $\mathbb{C} \smallsetminus K$, qui envoie le côté AB dans le point de départ des chemins, le côté CD dans le point d'arrivée, le côté BC dans c_1 et AD dans c_2 (voir la figure ci-après).

Il est possible que l'image de ϕ entoure au moins l'un des points critiques (comme dans notre figure) et qu'il n'existe pas de détermination de $y(x)$ sur cette image. Qu'à cela ne tienne, ce qui compte est que le rectangle, lui, n'a pas de tels points à éviter. On prend

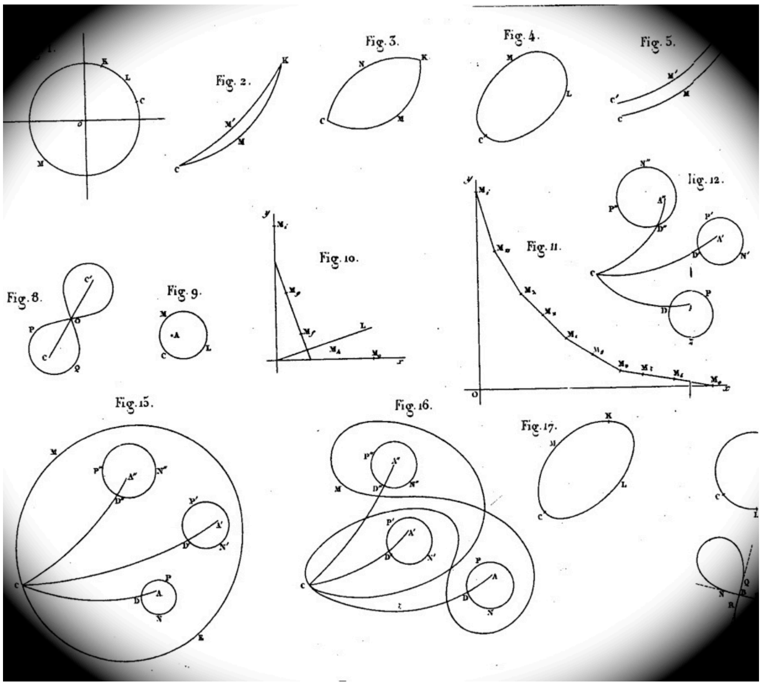


alors la préimage $\phi^*(y\ dx)$ de la forme différentielle multiforme sur le rectangle. Là on peut choisir une détermination unique de $y(x)$, étant donnée sa valeur au point de départ (donc sur le segment AB), et $\phi^*(y\ dx)$ devient une forme différentielle univaluée et fermée. Par la formule de Stokes 42.1, l'intégrale de $\phi^*(y\ dx)$ le long du bord du rectangle est nulle. Mais la constance de ϕ sur chacun des côtés AB et CD implique l'annulation de l'intégrale sur ces côtés, d'où : $\int_{AD} \phi^*(y\ dx) = \int_{BC} \phi^*(y\ dx)$, ce qui est équivalent à l'égalité recherchée.

14. Puiseux et les permutations des racines

Comme l'a expliqué Cauchy dans l'extrait de [36] discuté dans la section précédente, si l'on prend un chemin qui revient au point de départ $\alpha \in \mathbb{C} \setminus K$ (un *lacet*), tout en évitant les points critiques de la fonction algébrique $y(x)$, on obtient une permutation des racines de l'équation $P(\alpha, y) = 0$.

C'est Puiseux qui débuta dans son article [135] de 1850 l'étude systématique du groupe de permutations obtenu en considérant tous les lacets basés en un point α fixé. Il comprit ainsi qu'il suffisait d'étudier ce qui se passait lorsqu'on entourait simplement les points critiques, car tout lacet est homotope à un composé de *lacets élémentaires*, entourant chacun un seul de ces points (voir la Fig. 12 dans le dessin suivant, extrait de son article). De plus, il affirme dans [135, §30] que



l'on peut faire cela d'une seule manière si on s'impose de ne jamais faire se suivre un lacet élémentaire et son inverse :

> Ces notations adoptées, un contour fermé passant par le point C et parcouru dans un sens déterminé, pourra, quelle que soit sa forme (on exclut toujours le cas où ce contour passerait par quelqu'un des points A, A', A'', etc.), être représenté par la suite des contours élémentaires auxquels on le réduit en le déformant : cette suite, dont chaque terme doit être affecté d'un signe convenable, ainsi qu'on vient de l'expliquer, est ce que nous appellerons la *caractéristique du contour.* Ainsi les contours $CLMC$ des *fig.* [...] 15, 16 étant supposés parcourus dans le sens $CLMC$, auront pour caractéristiques respectives
>
> $$[...], (+A)(+A')(+A''),$$
> $$(+A')(+A'')(-A')(-A)(+A'),$$
>
> et, s'ils sont parcourus dans le sens contraire, leurs caractéristiques seront
>
> $$[...], (-A'')(-A')(-A),$$
> $$(-A')(+A)(+A')(-A'')(-A').$$

> [...] On voit facilement que les points A, A', A'', etc., restant les mêmes ainsi que le point C et les lignes $CDA, CD'A', CD''A''$, etc., un même contour, parcouru dans un même sens, n'est susceptible que d'une seule caractéristique [...]. Deux contours qui ont la même caractéristique peuvent toujours se réduire l'un à l'autre sans franchir aucun des points A, A', A'', etc. ; et, au contraire, deux contours qui, dans quelque sens qu'on les suppose parcourus, ont des caractéristiques différentes, ne peuvent pas se réduire l'un à l'autre.

En termes modernes, Puiseux énonce le fait que *le groupe fondamental du plan privé d'un ensemble fini de points est librement engendré par les lacets élémentaires*. Comme nous le verrons dans la section 39, c'est Poincaré qui dégagea la notion générale de *groupe fondamental*, en partie afin de pouvoir étudier sur n'importe quel espace les permutations des valeurs d'une fonction multiforme qui y serait définie.

Afin de comprendre comment sont permutées les racines lorsque l'on parcourt un lacet élémentaire, Puiseux utilise des développements en série à exposants fractionnaires qui ont été introduits par Newton. Plus précisément, supposons que x_0 est un point critique et que y_0 est une racine multiple de l'équation $P(x_0, y) = 0$ (le cas où une racine s'échappe à l'infini peut être traité de manière analogue en faisant un changement de variable $z = 1/y$). En prenant comme nouvelles variables $x - x_0$ et $y - y_0$, on peut supposer que $x_0 = y_0 = 0$.

Considérons par exemple le cas de la lemniscate (6.2). L'origine est bien un tel point (x_0, y_0). On voit que s'y rencontrent deux *branches*, mais que celles-ci se rejoignent plus loin. Cela correspond au fait que le polynôme de définition, qui est irréductible par hypothèse, devient réductible dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[x, y]]$.

On peut ainsi définir en général les *branches* (ou composantes irréductibles locales) au point $(0, 0)$ d'une courbe algébrique plane C définie par l'équation polynomiale $P(x, y) = 0$, comme les lieux des points définis dans un voisinage suffisamment petit de $(0, 0)$ par les facteurs irréductibles de $P(x, y)$ dans $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Supposons que $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ définit une branche de C à l'origine, et supposons (ce qui peut être toujours assuré) que f est polynomiale en y. Notons par p son degré. Newton montra (voir les extraits de lettres de Newton à Oldenburg repris dans [22, pp. 372-375]) que dans ce cas il existe une série $\lambda(t) \in \mathbb{C}[\![t]\!]$ telle que $\lambda(x^{1/p})$ soit formellement une racine de l'équation $f(x, y) = 0$. Comme Puiseux avait besoin de prendre les valeurs de ces séries $\lambda(x^{1/p})$ en dehors de 0, il eut à s'interroger sur leur convergence. Il prouva qu'elles l'étaient bien. On parle depuis de *séries de Newton-Puiseux*. Le lecteur désirant en savoir plus à leur sujet pourra consulter par exemple [22] ou [159].

Grâce à ces développements en séries fractionnaires convergentes, Puiseux développa chaque permutation des racines obtenue en tournant sur un lacet élémentaire en produit de cycles. Comme expliqué précédemment, ceci permet ensuite d'exprimer la permutation correspondant à n'importe quel lacet.

Notons que ce groupe de permutations est une *mesure de la multiformité* de la fonction algébrique étudiée.

15. Riemann et la découpe des surfaces

Peu après Cauchy et Puiseux, Riemann vint avec une solution radicalement différente du problème de la multiformité des fonctions.

Il démarra avec le même processus de pensée que Cauchy, celui du *prolongement analytique* le long d'un lacet. Ce qui changeait, c'est qu'il imagina un « *feuillet* » très mince se propager le long du lacet, et que, lorsque l'on revient au point de départ, on ne revient pas sur le même feuillet si la valeur de la fonction obtenue par prolongement analytique est différente de la valeur initiale, mais *sur un autre feuillet*.

Ainsi, en faisant les prolongements analytiques le long de tous les lacets possibles, on associe à la fonction algébrique de départ *une surface compacte et lisse à plusieurs feuillets* qui recouvre la *sphère de Riemann* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ associée au plan $\mathbb{C}$ de la variable complexe x. C'est cette surface que l'on appela « *la surface de Riemann associée à la fonction multiforme* $y(x)$ ». Il introduisit cette vision dès 1851, dans [140], mais c'est en 1857, dans [141, Préliminaires, I], qu'il en fit la description la plus imagée (attention au fait qu'ici x et y désignent les parties réelles et imaginaires de $z \in \mathbb{C}$) :

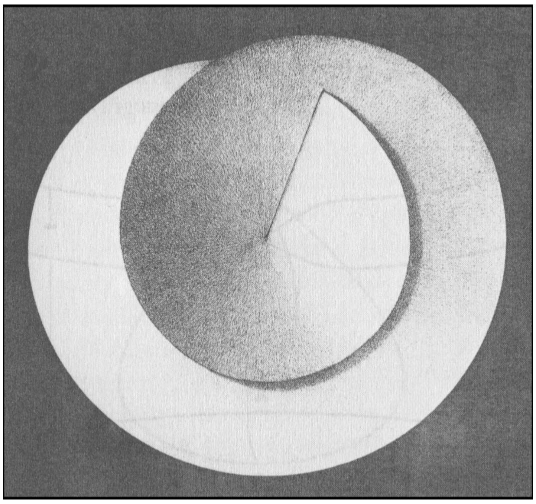
> Dans quelques recherches, notamment dans l'étude des fonctions algébriques et abéliennes, il sera utile de représenter le mode de ramification d'une fonction multiforme de la façon géométrique suivante :
>
> Concevons une surface étendue sur le plan des (x, y) et coïncidant avec lui (ou si l'on veut un corps infiniment mince étendu sur ce plan), qui s'étend autant et seulement autant que la fonction y est donnée. Lorsque la fonction sera prolongée, cette surface sera donc également étendue davantage. En une région du plan où se présentent deux ou plusieurs prolongements de la fonction, la surface sera double ou multiple. Elle se composera alors de deux ou de plusieurs feuillets dont chacun correspond à une branche de la fonction. Autour d'un point de ramification de la fonction, un feuillet de la surface se prolongera en un autre feuillet, et de telle sorte que, dans le voisinage de ce point, la surface pourra être regardée comme un hélicoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan des (x, y) en ce point et dont le pas de vis est infiniment petit. Mais lorsque la fonction, après que z $[= x + iy]$ a décrit plusieurs tours autour de la valeur de ramification, reprend sa valeur initiale, on devra alors supposer que le feuillet supérieur de la surface se raccorde avec le feuillet inférieur en passant à travers le reste des feuillets.
>
> La fonction multiforme admet en chaque point d'une surface, qui en représente ainsi le mode de ramification, *une seule* valeur déterminée, et peut donc être regardée comme une fonction parfaitement déterminée du lieu (d'un point) sur cette surface.

Cette dernière phrase est essentielle : la fonction qui était multiforme en tant que fonction de la variable z, devient uniforme en tant que fonction définie sur la surface associée.

Si l'on veut construire effectivement dans notre espace physique un *hélicoïde* tel que décrit par Riemann, on est obligé de faire se croiser les feuillets, comme dans le modèle reproduit ici d'une surface de Riemann à deux feuillets au voisinage d'un point de ramification, provenant de l'un des premiers manuels [119] sur la théorie de Riemann(7). Mais il est important de comprendre qu'une telle ligne d'auto-intersection est un artefact de la représentation spatiale, et qu'il faut en faire abstraction.

(7) J'ai repris la photo de [154, p. 284].

En effet, la surface de Riemann T associée à une fonction algébrique $y(x)$ est *lisse*, elle n'a aucun point singulier. Au dessus d'un point critique $x_0 \in \mathbb{C} \cup \infty$, il y a autant de points de la surface que de facteurs irréductibles du polynôme $P(x, y)$ dans $\mathbb{C} [\![x - x_0]\!] [y]$, l'anneau des polynômes en y à coefficients des séries formelles en $x - x_0$. Si l'un de ces facteurs irréductibles a une série de Newton-Puiseux de la forme $\lambda((x - x_0)^{1/p})$, alors $t = (x - x_0)^{1/p}$ est une coordonnée locale sur la surface.



Chaque point de la surface T recouvre un point de $\overline{\mathbb{C}}$. On a donc une application holomorphe $f : T \to \overline{\mathbb{C}}$ qui est un *revêtement ramifié*, un homéomorphisme local en dehors des points de ramification. L'ensemble de ses *points de ramification* est constitué des points de T situés sur l'axe d'un hélicoïde dans la vision de Riemann, comme celui situé au centre de la figure précédente. Leurs images dans $\overline{\mathbb{C}}$ sont contenues dans le lieu critique de la fonction algébrique $y(x)$ de départ. Mais tous les points critiques ne sont pas des images des points de ramification, comme le montre à nouveau l'exemple de la lemniscate, où l'origine sur l'axe des x est critique parce que s'y projette un point singulier de la courbe, point qui correspond à deux points de la surface de Riemann associée, aucun des deux n'étant de ramification.

Les fonctions rationnelles en les variables x, y deviennent *méromorphes* sur T, c'est-à-dire qu'elles s'écrivent sous la forme $t^m u(t)$ en termes d'une telle coordonnée locale, où $m \in \mathbb{Z}$ et $u(t)$ est une série convergente qui ne s'annule pas en $t = 0$. On a un *zéro* d'ordre m si $m > 0$ et un *pôle* d'ordre $-m$ si $m < 0$.

Une intégrale abélienne $\int y\, dx$, où y est fonction algébrique de x, se réinterprète alors sur la surface de Riemann T associée à $y(x)$. Plus précisément, si on demande de la calculer à la Cauchy, le long d'un chemin contenu dans le plan de la variable complexe x et ne rencontrant pas l'ensemble critique, la donnée de la valeur de départ de la fonction $y(x)$ détermine le point de départ sur T. Le chemin se relève alors canoniquement, et on calcule la valeur de l'intégrale de $y\, dx$, qui est une forme de degré 1 *univaluée* sur T. La particularité de cette forme est qu'elle est *fermée* : $d(y\, dx) = 0$ (voir la section 41 pour la manière dont on est arrivé à s'exprimer ainsi).

Riemann est donc amené à étudier en général les intégrales de formes différentielles fermées de degré 1, le long de chemins tracés sur une surface T. Voici ce qu'il raconte à ce sujet dans [141, Préliminaires, II] (attention à nouveau au fait que x et y désignent ici les parties réelles et imaginaire d'une coordonnée complexe locale) :

> Par conséquent, l'intégrale
>
> $$\int (X dx + Y dy),$$
>
> prise entre deux points fixes, le long de deux chemins différents, a la même valeur lorsque ces deux chemins réunis forment l'encadrement complet d'une partie de la surface T. Par suite, lorsque, à l'intérieur de T, toute courbe qui se ferme en revenant sur elle-même forme le contour d'encadrement complet d'une partie de T, l'intégrale, prise à partir d'un point fixe initial jusqu'à un même point final, conserve toujours la même valeur et est une fonction de la position du point final continue partout sur T et indépendante du chemin d'intégration. [...]
>
> Quand sur une surface F l'on peut mener n courbes fermées $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui, soit qu'on les considère séparément, soit qu'on les considère réunies, ne forment pas un contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, mais qui, jointes à toute autre courbe fermée, forment alors le contour d'encadrement d'une partie de la surface, la surface sera dite $(n+1)$ fois connexe. [...]

> Une surface $(n+1)$ fois connexe est décomposée [...] en une surface n fois connexe par toute section transverse qui ne la morcelle pas.
>
> Pour rendre ces considérations applicables à une surface sans contour d'encadrement, c'est-à-dire une surface fermée, on devra transformer cette surface fermée en une surface qui possède un encadrement, en y pratiquant un trou en un point quelconque, de sorte que la première décomposition sera effectuée au moyen d'une section transverse partant de ce point pour y revenir et formant, par conséquent, une courbe fermée.

Riemann définit donc une complexité pour les surfaces, qu'elles aient ou non un bord, leur « *ordre de connexion* ». Une sphère a l'ordre de connexion 1, un tore 3. Pour les surfaces sans bord, cet ordre de connexion s'exprime simplement en termes du genre : c'est son double plus un.

Au fait, voici comment *le genre*, qu'il note p, apparaît chez Riemann (dans [141, §I ; III]) :

> Concevons maintenant que l'on donne une surface connexe T, recouvrant partout n fois le plan des z, sans contour, mais que l'on peut, d'après ce qui précède, regarder comme une surface fermée, et que l'on ait décomposé cette surface en une surface simplement connexe T'. Comme la courbe d'encadrement d'une surface simplement connexe est formée par un contour unique, mais qu'une surface fermée prend, par l'effet d'un nombre impair de sections, un nombre pair de portions d'encadrement, et, par l'effet d'un nombre pair de sections, un nombre impair de portions d'encadrement, pour effectuer cette décomposition de la surface, il sera donc nécessaire de pratiquer un nombre pair de sections. Soit $2p$ le nombre de ces sections transverses. [...]

En d'autres termes, $2p$ est le nombre maximum de lacets que l'on peut tracer sur la surface T sans la disconnecter. C'est ici que le genre devient un caractère topologique d'une surface, et non pas algébrique d'une fonction multiforme, comme chez Abel.

Nous verrons dans les sections 39 et 40 que, suite aux travaux de Poincaré, on allait réinterpréter ce nombre $2p$ comme rang du premier *groupe d'homologie* de T, c'est-à-dire comme son premier *nombre de*

Betti. Dans les théorèmes 40.3 et 43.2 nous verrons deux généralisations en dimensions supérieures du fait que le premier nombre de Betti d'une surface orientable est pair.

Revenons à l'esprit de la construction de Riemann. Il est possible que sur la surface, l'intégrale de la forme fermée considérée soit multiforme. Par la formule de Stokes (pour ces dimensions, elle est souvent appelée *formule de Green-Riemann*), on voit que ceci est dû à la présence de courbes qui ne bordent pas de portion de surface. Il crée alors artificiellement des barrières, jusqu'à ce que toute courbe fermée qui les évite borde une portion de surface, puis il découpe le long de ces barrières.

C'est une particularité de la dimension 2 que la surface obtenue soit automatiquement simplement connexe (elle est en fait homéomorphe à un disque). En effet, dans son article [131] de 1904, Poincaré donna le premier exemple d'une variété de dimension 3 qui a la même homologie que la sphère tridimensionnelle, mais qui n'est pas simplement connexe.

Ceci lui suggéra de demander si *une variété simplement connexe de dimension trois est forcément homéomorphe à une sphère*. Cette question allait être connue sous le nom de *conjecture de Poincaré*, l'une des plus célèbres du XX^e siècle, et n'allait être démontrée que presque 100 ans plus tard, dans [126], par Perelman. Le lecteur curieux d'en savoir plus sur la topologie en dimension 3, dont nous ne reparlerons que dans la section 20, pourra lire l'article [116] de Milnor.

En revenant à l'exemple de Poincaré, et en lui enlevant une boule, on obtient une variété bordée par une sphère, dans laquelle toute courbe ou surface close borde nécessairement, mais qui n'est pas simplement connexe, contrairement à la situation en dimension 2.

Il est possible que Riemann ait reçu de Gauss la suggestion d'analyser les surfaces par découpes successives. Une indication en ce sens nous est fournie par une lettre de Betti à son ami Tardy, datée du 6 Octobre 1863, et republiée dans [166] :

> Ce qui donna à Riemann l'idée des coupures a été que Gauss les lui a définies, en lui parlant d'autres sujets, lors d'une conversation privée. Dans ses écrits on trouve que l'analysis situs, c'est-à-dire, cette considération des quantités indépendamment de leur mesure, est « wichtig » [important].

Maintenant que l'on a à disposition une définition d'« analysis situs » (topologique) du genre pour une fonction algébrique $y(x)$, comment l'utiliser pour calculer celui-ci

Considérons le revêtement ramifié $f : T \to \overline{\mathbb{C}}$ associé à la fonction algébrique $y(x)$. Si P est un point de ramification, et si f est donnée en coordonnées locales convenables centrées en P et $f(P)$ par $z \to z^m$, on dit que l'*indice de ramification* $i(P)$ de f au point P de T vaut $m - 1$. Ce vocabulaire peut s'étendre au cas où on a un revêtement ramifié entre deux surfaces de Riemann. On a alors la formule suivante, dite *de Riemann-Hurwitz*, reliant les genres et les indices de ramification :

Théorème 15.1. *Soit $f : T \to S$ un revêtement ramifié à n feuillets entre deux surfaces de Riemann compactes. Alors :*

$$p(T) = n \cdot p(S) + \sum_{P \in T} i(P).$$

La manière probablement la plus simple de prouver ce théorème est de considérer une triangulation de S ayant les images des points de ramification parmi ses sommets, puis de la relever en une triangulation de T. On exprime alors facilement la caractéristique d'Euler-Poincaré de T en fonction de celle de S, du nombre de feuillets (appelé *degré* du revêtement) et des indices de ramification. Puis on utilise le fait que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface de Riemann de genre p vaut $2 - 2p$. Mais une telle preuve n'a semble-t-il imaginée qu'après que Poincaré ait établi une notion de caractéristique d'Euler pour les variétés de dimension quelconque (voir la section 47).

On trouvera beaucoup plus de détails sur les travaux topologiques de Gauss, Riemann, et plus généralement des mathématiciens du XIXᵉ siècle, dans Pont [132]. On y découvre ainsi l'influence essentielle de Gauss sur les premières directions de recherche dans ce domaine. Par exemple (voir aussi [133]), c'est Listing, l'un des étudiants de Gauss, qui invente le terme de « *topologie* », qui allait remplacer au XX[e] siècle celui d'« *analysis situs* », proposé par Leibniz.

16. Riemann et l'invariance birationnelle

Si Riemann développe ainsi une vision très topologique des surfaces, il ne perd pas de vue que ses exemples fondamentaux proviennent des fonctions algébriques et de leurs intégrales.

Dans le calcul intégral il est très important de faire des changements de variables. Il est naturel de s'attendre à ce que certains changements de variables préservent les propriétés des intégrales étudiées. Ce sont probablement des considérations de ce genre qui le menèrent à identifier dans [141, §I ; XII] les équations polynomiales qui s'obtiennent l'une de l'autre par des transformations rationnelles :

> On considérera maintenant, comme faisant partie d'une *même classe, toutes les équations algébriques irréductibles entre deux grandeurs variables, qui peuvent être transformées les unes dans les autres par des substitutions rationnelles* ; de la sorte
>
> $$F(s, z) = 0 \text{ et } F_1(s_1, z_1) = 0$$
>
> appartiennent à la même classe lorsque l'on peut remplacer s et z par des fonctions rationnelles de s_1 et z_1, telles que $F(s, z) = 0$ se transforme en $F_1(s_1, z_1) = 0, s_1$ et z_1 étant également des fonctions rationnelles de s et z.

En termes géométriques, les courbes algébriques planes définies par les équations $F(s, z) = 0$ et $F_1(s_1, z_1) = 0$ sont dites *birationnellement équivalentes*. Un théorème essentiel de Riemann est, en formulation modernisée :

Théorème 16.1. *Le genre d'une courbe algébrique est un invariant birationnel.*

Ce théorème peut être vu comme une conséquence du fait qu'une équivalence birationnelle induit en fait un homéomorphisme entre les surfaces de Riemann associées, et que le genre est invariant par homéomorphisme (voir la section 19). Ce fait est spécifique à la dimension un. En effet, à cause de l'apparition du phénomène de l'*éclatement* (voir la section 30), dès la dimension complexe 2 on trouve une infinité de types topologiques dans toute classe d'invariance birationnelle de variétés algébriques lisses.

En revenant aux objets manipulés jusqu'à présent, remarquons comment l'attention s'est déplacée d'une *intégrale abélienne* $\int y\, dx$ à la *fonction algébrique* $y(x)$, puis au *polynôme* $P(x, y)$ la définissant, ensuite à la *courbe plane* C définie par l'annulation du polynôme et enfin à la *surface de Riemann* associée, sur laquelle la fonction algébrique $y(x)$ devient uniforme. En fait, elle le devenait déjà sur la courbe C. Mais pour Riemann il était important d'avoir un domaine *lisse* et compact, ce pourquoi ce n'était pas satisfaisant de travailler sur C. Bien sûr, à son époque on savait déjà obtenir la compacité (le concept n'existant encore que sous forme intuitive) en regardant les courbes non plus dans le plan affine, mais dans le plan projectif, ce qui a pour effet de leur rajouter des « *points à l'infini* ». Cette procédure n'élimine évidemment pas les points singuliers.

Dans la section 30 nous verrons que cette exigence de lissité allait amener des problèmes redoutables en dimensions plus grandes.

17. Le théorème de Riemann-Roch

Toute fonction algébrique $y(x)$, multivaluée en général, devient univaluée sur la surface de Riemann T qui lui est associée. Par conséquent, si $Q(x, y)$ est une fraction rationnelle à deux variables, la fonction algébrique $Q(x, y(x))$ devient elle aussi univaluée sur T. Ces fonctions forment *le corps des fonctions rationnelles sur la surface de Riemann*, qui est l'objet algébrique fondamental associé à T.

Une fraction rationnelle à une variable est déterminée (à une constante multiplicative près) par ses zéros et ses pôles. Cela reste vrai sur toute surface de Riemann, la preuve se faisant simplement en appliquant le principe du maximum du module au quotient (partout holomorphe) de deux solutions : par ce principe, le module d'une fonction holomorphe n'a de maximum local que si la fonction est constante. Mais ce qui ne l'est plus, et qui est en fait une spécificité du genre 0, est que *tout ensemble de points, doué de multiplicités entières, et dont la somme est nulle, est le lieu des zéros et des pôles d'une fonction rationnelle.*

Pour voir que ceci n'est pas possible en genre au moins 1, il suffit de remarquer que deux points distincts A et B étant fixés sur T, une fonction rationnelle ayant un seul zéro en A et un seul pôle en B établit un isomorphisme entre T et la sphère de Riemann. Donc T est forcément de genre 0.

Riemann s'est rendu compte qu'il était plus fructueux en général de ne pas imposer tous les zéros et les pôles, mais uniquement un ensemble de n points devant contenir le lieu polaire. Sur une courbe rationnelle, la dimension de l'ensemble des fonctions rationnelles qui ont leur lieu polaire inclus dans cet ensemble fixé vaut toujours $n+1$. Le genre fait en général diminuer ce nombre : Riemann montre dans [141] que la dimension est *au moins* $1-p+n$. Peu après, en 1865, son étudiant Roch réussit dans [142] à expliquer la raison pour laquelle on n'avait plus forcément égalité :

Théorème 17.1. *Soit T une surface de Riemann compacte, de genre p. Fixons n points dessus. Alors la dimension de l'espace des fonctions méromorphes sur T qui ont au plus des pôles simples, situés parmi les points fixés, est égale $1-p+n$, augmenté de la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes sur C s'annulant aux points fixés.*

Les formes différentielles jouent donc un rôle aussi dans cette question, de l'énoncé de laquelle elles sont absentes.

Remarquons que ce théorème, vrai aussi en interprétant « surface de Riemann » au sens abstrait de courbe holomorphe compacte et lisse (voir la section 24), permet de montrer qu'il existe pléthore de fonctions méromorphes non constantes dessus. De là il n'y a plus qu'un petit pas à montrer que *toute surface de Riemann compacte et lisse se plonge dans un espace projectif.* Par contre, dès la dimension complexe 2, il existe des variétés holomorphes, compactes et lisses qui ne se plongent dans aucun espace projectif (on dit qu'elles ne sont pas projectives). On en reparlera à la fin de la section 43.

Ce théorème de Riemann-Roch allait être un guide puissant pour généraliser la notion de genre en dimension plus grande : une telle généralisation doit être guidée par la volonté de formuler grâce à elle une généralisation de ce théorème. On discutera de cela dans les sections 45–49.

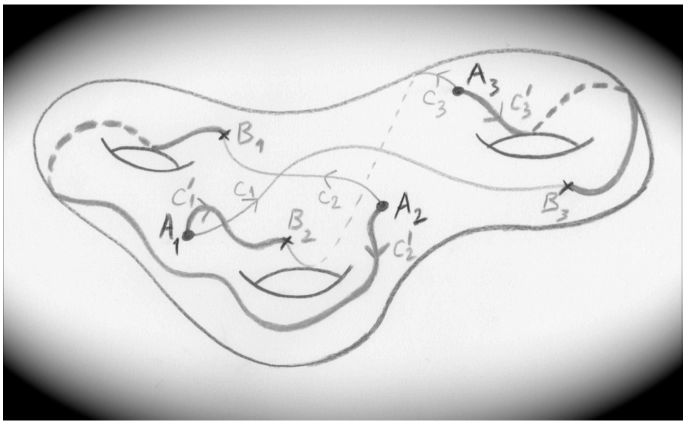
18. Réinterprétation des travaux d'Abel

Nous avons vu dans la section 12 qu'Abel avait un programme très ambitieux d'étude de toutes les relations possibles entre intégrales abéliennes. Il a découvert, même s'il ne les a pas toujours complètement démontrés, de nombreux théorèmes les concernant. Par exemple, dans [99], Kleiman fait la liste et indique des preuves modernes pour ceux qu'il pense être présents dans l'article [1]. L'un des théorèmes les plus connus parmi ceux-ci, expliqué dans quasiment tous les livres sur les courbes algébriques ou les surfaces de Riemann, est le suivant :

Théorème 18.1. *Soit T une surface de Riemann compacte. On considère deux ensembles de n points dessus, A_i et B_j, et pour chaque point A_i, un chemin c_i reliant A_i à l'un des B_j, en établissant ainsi une bijection entre les deux ensembles de points. Alors la somme $\sum_j \int_{c_j} \omega$ est nulle modulo des périodes de ω pour toutes les formes ω rationnelles, de degré un et sans pôles, si et seulement si il existe une fonction méromorphe sur C dont le lieu des pôles est formé par les points B_j et le lieu des zéros par les points A_i (on dit alors que le système des points A_j est* linéairement équivalent *à celui des B_j).*

Nous avons vu dans la section 13 qu'une intégrale définie d'une fonction algébrique ne dépend pas que des extrémités, mais aussi de la classe d'homotopie du chemin qui les relie dans $\mathbb{C}$. Chez Riemann, cela se reformule dans le fait qu'une intégrale d'une forme méromorphe sur une surface de Riemann ne dépend pas que des extrémités du chemin sur lequel on intègre, mais aussi de sa classe d'homotopie à extrémités fixées. Il est important de comprendre comment change l'intégrale lorsque l'on change de chemin. La différence des intégrales sur deux chemins de mêmes extrémités est une intégrale sur une courbe fermée. Une telle intégrale est appelée une *période* de la forme que l'on intègre.

Revenons au théorème 18.1. Remplaçons les chemins c_j de l'énoncé du théorème 18.1 par d'autres chemins c'_j, tout en respectant les contraintes imposées. Pris ensemble, les chemins c_j suivis des chemins c'_j parcourus dans le sens opposé, forment un ensemble fini de courbes fermées tracées sur la surface de Riemann (voir un exemple sur la figure suivante). Les sommes considérées dans le théorème 18.1 varient donc de *périodes* de ω, ce qui explique leur présence dans l'énoncé.



Abel n'a en fait pas démontré la suffisance, mais seulement un énoncé équivalent à l'implication qui part de l'hypothèse que les points donnés forment les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe f. Il n'a pas non plus parlé de périodes (rappelons qu'il travaille avec ses intégrales formellement, comme l'illustre sa preuve reproduite dans la section 11), mais il a montré que si l'on considère les points B_j comme variables, dépendant algébriquement d'un paramètre t, et tels que pour chaque t ils forment la préimage complète $f^{-1}(t)$, alors la somme abélienne :

$$\sum_i \int_{A_i}^{B_i(t)} y(x)dx$$

est constante, où $y(x)$ est la fonction algébrique telle que $\int y(x)dx$ soit une *intégrale de première espèce.*

Voici comment on peut expliquer cette implication géométriquement, à l'aide de la vision introduite par Riemann avec ses surfaces. La fonction méromorphe f dont les zéros et les pôles sont les points donnés, représente T comme un revêtement ramifié au-dessus de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. En dehors des points de ramification, $\overline{\mathbb{C}}$ est recouverte par n feuillets de T. Faisons la somme des restrictions de ω à ces n feuillets. On obtient une forme holomorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$ sans pôles, définie en dehors des points de ramification. Une étude locale au voisinage de ces derniers montre que cette forme s'étend en une forme ϕ *partout holomorphe* sur $\overline{\mathbb{C}}$. Mais sur une sphère, une telle forme est nécessairement nulle ! En effet, on a le théorème suivant, donnant une caractérisation du genre par le calcul intégral (au lieu de formes holomorphes, Riemann parlait encore, comme Abel, d'*intégrales de première espèce*) :

Théorème 18.2. *Le genre p d'une surface de Riemann compacte T est égal à la dimension de l'espace vectoriel complexe des formes de degré* 1 *holomorphes sur T.*

Maintenant on peut facilement conclure la preuve de notre implication. En effet, par hypothèse, les points A_j forment la préimage $f^{-1}(0)$ et les points B_j la préimage $f^{-1}(\infty)$. On peut donc choisir pour chemins c_j les diverses préimages par f *d'un chemin fixe* c joignant 0 et ∞ dans $\overline{\mathbb{C}}$, tout en évitant les points de ramification. La somme abélienne considérée sur ces chemins est donc égale à l'intégrale $\int_c \phi$. Comme ϕ est nulle, on a terminé.

Une généralisation de l'implication précédente, prouvée aussi par Abel (qui parle toujours de fonction algébrique là où nous parlons de surface de Riemann), est :

Théorème 18.3. *Si T est une surface de Riemann compacte, que ω est une forme de degré un, méromorphe sur T et que pour tout $t \in \overline{\mathbb{C}}$, les points $B_i(t)$ forment la préimage $f^{-1}(t)$ d'une fonction méromorphe $f : T \to \overline{\mathbb{C}}$, alors la somme abélienne :*

$$\sum_i \int_{B_i(0)}^{B_i(t)} \omega$$

est de la forme $R(t) + \log Q(t)$, où $R(t)$ et $Q(t)$ sont des fractions rationnelles en t.

L'ambiguïté dans le choix des chemins d'intégration se manifeste par l'ambiguïté dans le choix de la détermination du logarithme.

Le lecteur curieux de voir des prolongements beaucoup plus récents de ces idées pourra étudier les articles [75] et [76] de Griffiths.

Dans les théorèmes 18.1 et 18.3, les chemins d'intégration dépendent d'un paramètre. En fait, Abel a étudié aussi ce qui se passait lorsqu'on prenait de telles sommes avec des extrémités indépendantes entre elles :

Théorème 18.4. *Considérons une surface de Riemann compacte T de genre p, et une forme méromorphe ω sur T. Fixons un point $A \in T$. Alors la somme abélienne $\sum_{j=1}^{p+1} \int_A^{B_j} \omega$ est égale à la somme d'une fonction élémentaire en les B_j et d'une somme abélienne $\sum_{k=1}^{p} \int_A^{C_k} \omega$, les points C_k dépendant algébriquement des points B_j.*

C'est ce théorème qui est la vaste généralisation obtenue par Abel du théorème 8.1 d'addition pour l'intégrale lemniscatique. Abel, comme d'habitude, le voyait très concrètement comme un théorème sur des fonctions de plusieurs variables. Avec la reformulation riemannienne, on se retrouve avec une fonction définie sur la puissance $(p+1)$-ème de la surface de Riemann : une variété de dimension $(p+1)$. C'est aussi à cause de cela que [141] a stimulé non seulement les recherches sur les courbes complexes (les surfaces de Riemann), mais aussi sur les variétés complexes de dimension supérieure.

Expliquons brièvement, pour le bénéfice du lecteur initié, comment une vision géométrique en dimension plus grande permet de comprendre le théorème qu'Abel cite dans la préface de [1], et dans lequel nous avons vu à la fin de la section 10 la première manifestation de la notion de genre.

Partons d'une surface de Riemann compacte T, par exemple celle associée à la courbe algébrique irréductible qui correspond à une fonction algébrique. Fixons un point de départ $A_0 \in T$ pour le calcul des intégrales le long des chemins tracés sur T, ainsi qu'une forme différentielle méromorphe ϕ quelconque sur T. Abel s'intéresse dans le théorème dont il est question ici à la fonction :

$$(A_1, \ldots, A_m) \longrightarrow \sum_{j=1}^{m} \int_{c_j} \phi$$

où c_j est un chemin quelconque allant de A_0 à A_j.

Fixons une base $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ de l'espace vectoriel complexe des formes holomorphes sur T (voir le théorème 18.2). À chaque lacet c tracé sur T correspond un vecteur-période $(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_p) \in \mathbb{C}^p$. Ces divers vecteurs forment un sous-groupe Γ de $\mathbb{C}^p$, qui est engendré par les vecteurs-périodes pris le long d'un ensemble de $2p$ lacets qui ne disconnectent pas T. On montre que ces $2p$ vecteurs sont indépendants, et que de plus Γ est *discret* dans $\mathbb{C}^p$. Ceci permet de voir que l'espace quotient $\mathbb{C}^p/\Gamma$ est topologiquement un tore de dimension $2p$. On l'appelle la *Jacobienne* de la surface de Riemann T. Nous la noterons $J(T)$.

Le nom fait référence au fait que c'est à Jacobi que l'on doit, à partir de son article [92], les premiers développements de l'idée qu'il faut étudier *simultanément* toutes les intégrales abéliennes de première espèce attachées à une courbe algébrique. D'ailleurs, c'est dans cet article qu'il introduisit l'appellation de « *transcendante abélienne* » pour les intégrales abéliennes.

Considérons l'espace T^m des m-uplets de points de T. Le choix du point de départ A_0 permet d'associer à tout point $(A_1, \ldots, A_m) \in T^m$ le vecteur des sommes abéliennes :

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \int_{c_j} \omega_1, \ldots, \sum_{j=1}^{m} \int_{c_j} \omega_p \right).$$

Comme cette somme est bien définie modulo des vecteurs-périodes, son image dans la jacobienne $J(T)$ ne dépend pas du choix des chemins d'intégration. On obtient ainsi une application :

$$\Phi_m : T^m \longrightarrow J(T)$$

On montre qu'elle est *surjective* dès que $m \geqslant p$. Par le théorème 18.1, les préimages $\Phi_m^{-1}(t)$ forment une classe d'équivalence linéaire de m-uplets *ordonnés* sur T. La surjectivité de Φ_m montre que pour tous les $t \in J(T)$ en dehors d'une certaine sous-variété complexe, $\Phi_m^{-1}(t)$ est de dimension complexe $\dim T^m - \dim J(T) = m - p$. Donc, si on contraint le m-uplet $(A_1, \ldots, A_m) \in T^m$ à rester dans une telle préimage $\Phi_m^{-1}(t)$, on établit (localement dans T^m) entre les variables $A_1, \ldots, A_m$ des fonctions $A_i \to \sum_{j=1}^m \int_{c_j} \omega_i$ exactement p relations algébriques, ce qui explique pourquoi nous avons affirmé à la fin de la section 10 que le nombre de ces relations est égal au genre.

Ces relations sont a priori transcendantes, car la jacobienne $J(T)$ n'est par construction qu'une *variété analytique complexe lisse*. En fait, elle peut être canoniquement plongée dans un espace projectif, raison pour laquelle l'application Φ_m est un morphisme entre variétés algébriques. Donc les relations qui définissent l'une des préimages $\Phi_m^{-1}(t)$ peuvent être choisies algébriques (en prenant les préimages par Φ_m d'un ensemble de fonctions rationnelles sur $J(T)$, dont le lieu d'annulation est réduit au point t), conformément à l'affirmation d'Abel.

Revenons maintenant à la forme différentielle méromorphe ϕ sur T. En prenant ses préimages par les m projections de T^m sur ses facteurs, puis en les additionnant, on obtient une forme méromorphe fermée de degré 1 sur T^m. Par construction, elle est invariante par permutation des facteurs T dans T^m, elle descend donc au quotient $T^{[m]}$ de T^m par ce groupe de permutations. Notons par $\phi^{[m]}$ cette forme fermée de degré un sur $T^{[m]}$. Les points de l'espace $T^{[m]}$ paramètrent les m-uplets non ordonnés de points de T, éventuellement confondus, c'est-à-dire les *diviseurs effectifs* de degré m (voir la section 29).

Le quotient de $\Phi_m^{-1}(t)$ par le groupe de permutation précédent est égal à l'espace de tous les diviseurs effectifs linéairement équivalents à un diviseur fixé, c'est-à-dire à une série linéaire complète. C'est donc un espace projectif. On montre alors qu'une forme rationnelle fermée de degré 1 sur un tel espace est toujours la différentielle de la somme d'une fonction algébrique et du logarithme d'une fonction algébrique.

Ceci explique géométriquement le théorème énoncé par Abel dans sa préface, et le rôle qu'y joue le genre.

Nous arrêtons ici de parler des recherches d'Abel. Le lecteur curieux d'apprendre beaucoup plus sur le développement de ses idées jusqu'à notre époque pourra consulter les divers articles de [110]. Celui curieux d'en savoir plus sur le lien entre les surfaces de Riemann et leurs jacobiennes pourra lire le texte d'initiation [118] publié par Mumford en 1975.

19. Jordan et la classification topologique

Jordan proposa en 1866, dans [94], l'une des premières tentatives de preuve d'un théorème de classification topologique des surfaces, c'est-à-dire *à homéomorphisme près*[(8)]. Le terme d'*homéomorphisme* n'existait pas encore, et Jordan est l'un des premiers, avec Möbius, à en proposer une définition, il est vrai, faisant beaucoup appel à l'intuition :

> Nous nous appuierons [...] sur le principe suivant qu'on peut regarder comme évident, et prendre au besoin pour définition :
>
> *Deux surfaces S, S' sont applicables l'une sur l'autre si l'on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de S correspondent des éléments contigus de S'.*

Voici maintenant comment il présente son problème, ainsi que le théorème obtenu :

> Un des problèmes les plus connus de la Géométrie, est le suivant :
>
> *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.*
>
> On peut se proposer un problème analogue, en supposant au contraire que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géométrie de situation, et nous allons la résoudre en démontrant le théorème suivant :
>
> *Théorème. – Pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, il faut et il suffit :*
>
> 1° *Que le nombre des contours séparés qui limitent respectivement ces deux portions de surfaces soit le même (si les surfaces considérées sont fermées, ce nombre est nul).*
>
> 2° *Que le nombre maximum de contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part, que l'on peut tracer sur chacune des deux surfaces sans la partager en deux régions séparées, soit le même de part et d'autre.*

---

(8) De nos jours, on considère que la première preuve rigoureuse de ce fait a été fournie par Radó [136].

En fait, implicitement Jordan ne considère ici que des surfaces *orientables*. C'est Möbius qui, presque simultanément, attirait l'attention sur la nécessité de bien marquer la différence entre surfaces orientables et non orientables, en donnant en particulier le célèbre exemple de sa bande (voir [133]). Précisons que les surfaces de Riemann sont toutes orientables, comme revêtements ramifiés de $\mathbb{C}$, qui est orientable.

Si la surface considérée par Jordan est fermée, nous reconnaissons dans *le nombre maximum de contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part*, une définition du genre de la surface. Précisément celle dont nous avons parlé dans l'introduction lorsque nous avons dessiné des courbes entourant les trous. Remarquons que, même si les surfaces auxquelles pense Jordan sont situées dans l'espace ordinaire, qu'elles ont donc une structure métrique induite par celle de l'espace, et de laquelle il se propose de faire abstraction, il ne parle à aucun moment de *trous* visibles. Apparemment, c'est seulement Clifford qui allait utiliser cette notion intuitive de *trou* pour rendre le genre plus compréhensible aux débutants.

20. Clifford et le nombre de trous

Nous avons vu que Riemann note le genre « p », notation encore très utilisée de nos jours, entre autres pour ses généralisations en dimensions supérieures. Par contre il ne lui donne pas de nom, et sa définition n'est pas celle que nous avons vue dans l'introduction. Il y a une bonne raison pour cela, c'est que ses surfaces, faites de feuillets recouvrant finement le plan, ne présentent pas de trous visibles.

C'est Clifford qui eut un peu plus tard l'idée de définir le genre en comptant les trous, et cela parce qu'il montra d'abord qu'une surface de Riemann est nécessairement homéomorphe à une surface ayant des trous, située dans l'espace ambiant, comme les exemples de notre première image. Voici ce qu'il dit à ce sujet dans son article [43] de 1877 :

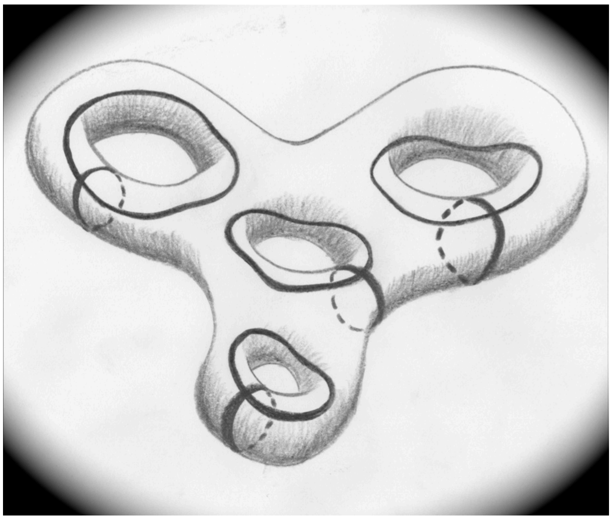
> L'objet de cette Note est d'assister les étudiants de la théorie des fonctions complexes, en prouvant les propositions principales concernant les surfaces de Riemann d'une manière concise et élémentaire. [...]

Si deux variables s et z sont connectées par une équation [polynomiale de degré n en s et m en z], chacune est dite être une fonction algébrique de l'autre. En regardant z comme une quantité complexe $x+iy$, nous représentons sa valeur par le point de coordonnées x, y dans un certain plan. À chaque point de ce plan appartient une valeur de z et par conséquent, en général, n valeurs de s, qui sont les racines de l'équation [...]

Nous allons continuer en prouvant que cette fonction n-valuée, que nous avons étalée sur un seul plan, peut être représentée comme une fonction *uni*-valuée sur une surface consistant en n feuilles planes infinies, supposées être situées indéfiniment proches les unes des autres, et se coupant les unes les autres le long de certaines lignes. [...]

Inversons maintenant ce plan n-uple par rapport à n'importe quel point situé en dehors de lui. Il devient ainsi une sphère n-uple passant par le point. [...]

Nous allons prouver maintenant que cette surface sphérique n-uple peut être transformée sans déchirure en la surface d'un corps ayant p trous. [...]

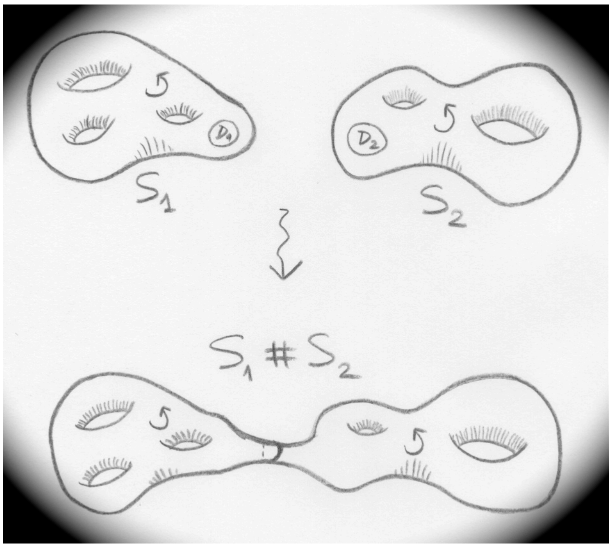


Une courbe fermée dessinée sur une surface est appelée un *circuit*. S'il est possible de bouger un circuit continûment sur la surface jusqu'à ce qu'il rétrécisse en un point, le circuit est appelé réductible ; sinon il est irréductible. En général il y a un nombre fini de circuits irréductibles sur une surface close qui sont

> *indépendants*, c'est-à-dire, tel qu'aucun d'entre eux ne puisse être transformé par un mouvement continu en un chemin constitué des autres. [...]
>
> [...] sur la surface d'un corps ayant p trous, il y a $2p$ circuits indépendants ; un *autour* de chaque trou, et un *à travers* chaque trou[(9)].

Une autre manière assez intuitive de définir topologiquement le genre d'une surface orientable close, c'est de la décomposer en somme connexe.

En général, si S_1, S_2 sont deux surfaces orientées connexes, leur *somme connexe* $S_1 \# S_2$ est une nouvelle surface orientée, qui se construit en enlevant un disque compact D_i de chaque surface S_i et en identifiant les deux cercles de bord obtenus ainsi par un difféomorphisme tel que les orientations des deux surfaces $S_1 \setminus D_1$ et $S_2 \setminus D_2$ se prolongent continûment après le recollement. Cela est illustré dans la figure suivante :



On obtient ainsi une loi de composition sur les classes de difféomorphisme de surfaces closes, orientées et connexes. La sphère est un

[(9)]Les courbes *autour* de chaque trou sont par exemple celles du dessin de l'Introduction. Dans le premier dessin de cette section, j'en ai rajouté une *à travers* chaque trou.

élément neutre pour cette loi. Une surface S est dite *première* si elle n'est pas une sphère et si elle ne peut pas s'écrire de manière non triviale comme somme connexe (c'est-à-dire que si on écrit $S = S_1 \# S_2$, alors forcément l'une des surfaces S_1 et S_2 est une sphère). On montre qu'il n'y a qu'une seule surface première : le tore. Voici l'interprétation annoncée du genre :

Théorème 20.1. *Si on décompose une surface de genre p en somme connexe de surfaces premières (donc de tores), alors il y en a exactement p.*

Une vision analogue a été développée au XX^e siècle pour les variétés orientées de dimension 3. Plus précisément :

Théorème 20.2. *Toute variété close, connexe et orientée M de dimension 3 s'écrit comme somme connexe d'un nombre fini de variétés premières. De plus, celles-ci sont indépendantes, à permutations près, de la décomposition choisie.*

La première assertion est due à Kneser [102] et la seconde à Milnor [115]. Par analogie avec le théorème 20.1, on pourrait appeler *genre* d'une variété de dimension 3 le nombre de facteurs premiers qui apparaissent dans une telle décomposition. Mais cette appellation n'est pas utilisée.

Une illustration de l'explosion de la complexité de la topologie lorsqu'on passe des surfaces aux variétés de dimension 3, est fournie par le fait qu'il n'y a qu'une surface première (le tore), mais qu'il y a par contre une infinité de variétés premières de dimension 3, et que l'on ne dispose toujours pas d'un système complet d'invariants pour les différencier.

À la fin de son article, Milnor donne un exemple montrant qu'il n'y a pas de théorème analogue à 20.2 en dimension quatre. J'explique rapidement son exemple, pour le bénéfice du lecteur initié aux éclatements, car il part de la projection stéréographique d'une quadrique lisse S de l'espace projectif complexe sur un plan P, présenté en détail dans la section 30. Cette projection stéréographique est birationnelle, et elle peut s'obtenir en composant l'éclatement du centre de projection O (ce qui fournit une surface projective complexe M) et la contraction des transformées sur M (désormais disjointes) des deux droites de S passant par O.

Dans M, on se retrouve avec trois courbes rationnelles lisses : E, créée par l'éclatement de O, et E_1, E_2, transformées des deux droites. Chacune d'entre elles se contractant en un point lisse d'une surface (soit S, soit P), elles ont des voisinages bordés par des sphères de dimension 3. Ceci permet de décomposer M comme somme connexe de plusieurs manières, en enlevant l'un de ces voisinages, puis en rebouchant le bord créé avec une boule.

Eh bien, les variétés de dimension 4 obtenues en faisant cela, soit avec un voisinage de E, soit avec un voisinage de E_1 ou E_2, ne sont pas homéomorphes. En effet, avec le langage expliqué dans la section 40, dans l'une (isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) la forme quadratique d'intersection sur le deuxième groupe d'homologie ne prend que des valeurs paires, ce qui n'est pas le cas pour l'autre (isomorphe à l'éclaté de $\mathbb{P}^2$ en un point). Ceci montre que les décompositions en facteurs premiers obtenues en débutant de ces deux manières-là n'aboutissent pas aux mêmes collections de facteurs premiers. Y aurait-il une notion de « facteurs idéaux » pour la topologie de dimension 4, restituant l'unicité de la décomposition

Après cette brève incursion en dimension plus grande, revenons aux courbes algébriques et aux surfaces de Riemann associées.

21. Clebsch et le choix du nom

Chez Riemann, les courbes algébriques ne sont pas étudiées pour elles-mêmes. Néanmoins, ses techniques permettent par exemple de prouver qu'une courbe lisse de degré n dans le plan projectif complexe est de genre $(n-1)(n-2)/2$.

Pour démontrer cette formule, on peut au choix :

• soit passer par la *formule de Riemann-Hurwitz* 15.1. Dans notre cas, on projette la courbe sur une droite à partir d'un point du plan projectif situé en position générale par rapport à elle, en obtenant ainsi un revêtement de degré n, ramifié en précisément $n(n-1)$ points ayant chacun l'indice de ramification 1 ;

• soit passer par la *formule d'adjonction* 38.3, en utilisant le fait que la classe canonique du plan projectif vaut -3 fois la classe d'une droite (car, par exemple, la forme qui s'écrit $dx \wedge dy$ dans le plan affine (x, y), a un pôle d'ordre 3 sur la droite à l'infini).

Le nombre p fut baptisé « *genre* » par Clebsch en 1865, dans l'article [41], où il étudiait explicitement des problèmes de géométrie des courbes projectives planes[(10)] :

> La classe des fonctions Abéliennes, avec lesquelles une courbe plane algébrique du n-ème ordre est reliée, est déterminée par le nombre $p = (n-1)(n-2)/2$ si la courbe n'a pas de points doubles ou de rebroussement [...]. Si la courbe a des points doubles ou de rebroussement, alors la valeur de p est diminuée de leur nombre [...].
>
> Au lieu de classer les courbes algébriques par leur ordre, et dans chacune des classes ainsi obtenues, par le nombre de points doubles ou de rebroussement qu'elles possèdent, on peut les partager en *genres* à l'aide du nombre p ; seront donc du premier genre toutes celles pour lesquelles $p = 0$ et du deuxième celles pour lesquelles $p = 1$, etc. Alors les différents ordres apparaissent, réciproquement, comme des subdivisions à l'intérieur des genres ; en fait, on trouve chaque ordre dans tous les genres jusqu'à $p = (n-1)(n-2)/2$, où trouvent leur place les courbes les plus générales du n-ème ordre, c'est-à-dire celles dépourvues de points doubles ou de rebroussement.

Remarquons que dans la définition précédente, les genres sont des groupements de courbes, ou des classes, comme on a l'habitude de le dire de nos jours, et non pas des nombres. Il est par ailleurs un peu bizarre que le n-ème genre corresponde à $p = n + 1$. Ce décalage allait être bientôt corrigé par Clebsch, qui s'exprimait ainsi en 1868, dans [42] :

> J'ai proposé de nommer *genre* d'une courbe le nombre
>
> $$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$$
>
> (*deficiency* de M. Cayley), n étant l'ordre de la courbe, d le nombre de ses points doubles ou de rebroussement. Le genre

(10) Je remercie Walter Neumann pour m'avoir traduit les extraits suivants en Anglais.

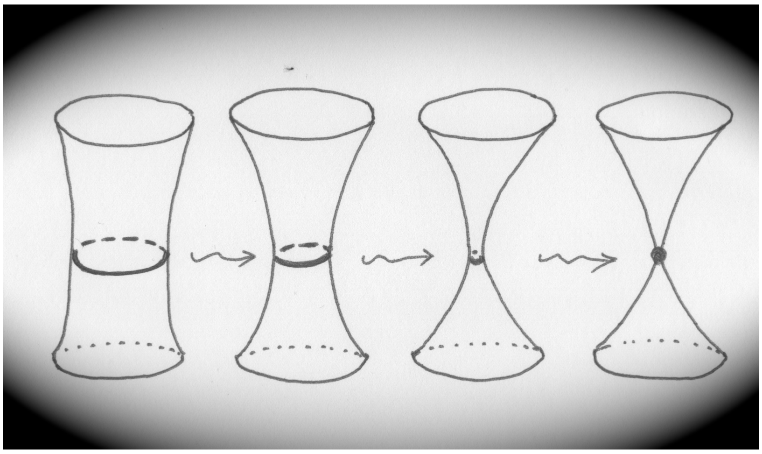
> de deux courbes algébriques doit être le même pour que l'on puisse faire correspondre à chaque point de l'une un seul point de l'autre, et réciproquement.

Ce qui apparaît ici est que *la présence de points singuliers sur une courbe de degré n diminue son genre (c'est-à-dire celui de la surface de Riemann associée) par rapport à celui d'une courbe lisse du même degré.* Les points singuliers les plus simples sont ce que Clebsch appelle les « *points doubles* », où deux arcs lisses se recoupent transversalement. C'est ce qui arrive au point singulier de la lemniscate. Par la suite, nous parlerons plutôt de *points doubles ordinaires* car un « point double » signifie de nos jours plus généralement n'importe quel point de multiplicité 2.

Au fait, quel est le genre de la surface de Riemann de la lemniscate ? Il faut rechercher ses points doubles dans le plan projectif complexe, c'est-à-dire *aussi à l'infini, et aussi à coordonnées non réelles.* On découvre ainsi qu'elle a deux points doubles supplémentaires à l'infini (les *points cycliques*, par lesquels passent tous les cercles du plan). Son genre vaut donc $\frac{1}{2}(4-1)(4-2)-3=0$. Et, comme l'explique Clebsch (voir la citation de Cayley dans la section suivante), ceci montre que la lemniscate peut être paramétrée rationnellement !

C'est Noether qui allait expliquer en 1884, dans [124], de quelle manière des singularités arbitrairement compliquées diminuent le genre d'une courbe plane de degré n (voir la section 23). Voir aussi la section 34 pour des questions analogues dans le monde des surfaces algébriques.

Pour conclure cette section, je voudrais expliquer heuristiquement pourquoi un point double ordinaire sur une courbe plane *irréductible* diminue le genre de 1. Imaginons une suite de courbes lisses de degré n, qui converge vers une courbe ayant un tel point double P. Alors, près de P, les courbe de la suite forment des goulots d'étranglement de plus en plus minces. À la limite, les cercles ceinturant ces goulots se retrouvent rétrécis en le point P : on se retrouve localement avec deux disques ayant ce point P en commun (voir la figure suivante ; les deux disques ont des pointes juste sur mon dessin bidimensionnel, car dans $\mathbb{C}^2$ ils sont lisses et se coupent transversalement). Lorsqu'on construit la surface de Riemann associée, on sépare abstraitement ces disques : la surface obtenue a un cercle non séparant en moins (le cercle est non séparant car on a supposé que la courbe singulière était irréductible). Donc le genre est diminué de un.



22. Cayley et la déficience

Nous venons de voir une référence de Clebsch à Cayley. En effet, un an après l'article [41] de Clebsch, Cayley publia un article qui cite celui de Clebsch, mais sans reprendre le terme de « genre » proposé par Clebsch. Cayley propose un terme concurrent, la « déficience ». Celui-ci allait être utilisé pendant un demi-siècle environ, principalement par les mathématiciens britanniques, avant d'être abandonné au profit de celui de « genre ». Voici la manière dont Cayley explique en 1865 l'introduction de son terme ([37, pp. 1-2]) :

> L'expression « point double », ou, de manière abrégée, « pd », doit être comprise ici comme incluant un point de rebroussement [...]. Cramer a remarqué dans sa « Théorie des Lignes Courbes » (1750), qu'une courbe d'ordre n a au plus $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ pds.
>
> On sait depuis quelques années qu'une courbe telle que les coordonnées $(x : y : z)$ d'un quelconque de ses points sont des fonctions rationnelles entières d'ordre n d'un paramètre variable [...] est une courbe d'ordre n ayant le nombre maximum $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ de pds. Le théorème inverse est vrai aussi [...] Le théorème précédent, en tant que cas particulier du théorème

> général de Riemann, date de l'année 1857 ; mais il a été pour la première fois énoncé explicitement seulement l'an dernier (1864) par Clebsch, dans [41].
>
> La preuve est en fait très simple ; elle dépend seulement de la remarque que l'on peut, par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ pds, et par $2n-3$ autres points sur la courbe donnée d'ordre n [...], dessiner une série de courbes d'ordre $n-1$, donnée par une équation $U + \theta V = 0$ contenant un paramètre arbitraire θ ; toute courbe de ce type intersecte la courbe donnée aux points doubles, chacun comptant pour deux points, aux $2n-3$ points, et en *un seul* autre point ; d'où, comme il n'y a qu'un point d'intersection variable, les coordonnées de ce point [...] sont exprimables rationnellement en termes du paramètre θ. [...]
>
> Avant d'aller plus loin, il sera convenable d'introduire le terme « Déficience », c'est-à-dire, une courbe d'ordre n avec $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - D$ points doubles est dite avoir une déficience $= D$: le théorème précédent affirme que pour les courbes de déficience $= 0$, les coordonnées sont exprimables rationnellement en termes d'un paramètre θ. Comme dans une telle courbe les différents points se suivent les uns les autres dans un certain ordre, à savoir, dans l'ordre obtenu en donnant au paramètre ses diverses valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe peut être appelée une courbe *unicursale.*

Remarquons qu'en dimension plus grande on ne sait plus exprimer le nombre maximum de points doubles ordinaires d'une hypersurface de l'espace projectif en fonction de son degré. On pourra consulter au sujet de l'histoire de ce problème la thèse [108] de Labs.

23. Max Noether et les courbes adjointes

Nous avons vu apparaître dans la citation précédente de Cayley, des courbes passant par les points doubles d'une courbe projective donnée C. Les courbes ayant cette propriété et qui ont de plus le degré $n-3$ ont été appelées *adjointes* de C par Max Noether(11). On a le théorème suivant, remontant à Riemann [141], puis précisé par Clebsch, Gordan et Noether :

(11)En fait, Max Noether n'introduisit pas cette condition sur le degré, mais nous prendrons ici cette définition restreinte pour simplifier.

Théorème 23.1. *Le genre de la surface de Riemann associée à une courbe projective plane C de degré n n'ayant que des points doubles ordinaires est égal à la dimension de l'espace vectoriel des polynômes définissant des courbes adjointes de C.*

Expliquons une preuve de ce théorème. Plaçons-nous dans une carte affine (x, y) telle que la droite à l'infini correspondante coupe C en n points distincts. Considérons la restriction à la surface de Riemann de C d'une forme de degré 1 du plan, qui s'écrit :

$$q(x, y)\frac{dx}{\partial f/\partial y}$$

(des expressions de ce type sont fondamentales déjà chez Abel [1]). On montre alors par une écriture en coordonnées locales que cette restriction est partout régulière (sans pôles) sur T si et seulement si $q(x, y)$ définit une courbe adjointe de C.

En 1884, dans [124], Noether définit plus généralement les *courbes adjointes* d'une courbe plane C ayant des singularités arbitraires comme étant les courbes C' qui ont la propriété suivante : *pour tout point P de la courbe C, si (x, y) est un système de coordonnées affines centré en P, alors C' est défini dans ce système de coordonnées par une équation $q(x, y) = 0$ telle que $q(x, y)\frac{dx}{\partial f/\partial y}$ est une forme holomorphe en restriction à la surface de Riemann de C.* Il montra alors que le théorème précédent est encore vrai. Il analysa aussi la structure des points singuliers par des suites de transformations quadratiques successives, et il prouva :

Théorème 23.2. *Le genre de la surface de Riemann d'une courbe projective irréductible de degré n est égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - M$, où M est la somme des expressions $\frac{1}{2}m(m-1)$, lorsque m varie parmi les multiplicités de tous les points singuliers de la courbe, éventuellement infiniment voisins.*

Le lecteur intéressé trouvera des détails sur tout cela dans le livre [22] de Brieskorn et Knörrer. Celui qui désire avoir un point de vue global sur les recherches de Max Noether pourra consulter [33].

Le théorème précédent n'a été étendu aux courbes algébrique abstraites que par Hironaka [80], en 1957. Pour en arriver là il fallait apprendre déjà à penser à une courbe abstraitement, c'est-à-dire indépendamment de tout espace ambiant. Cela s'est fait progressivement, et c'est d'abord les surfaces de Riemann que l'on allait apprendre à voir abstraitement.

24. Klein, Weyl, et la notion de surface abstraite

En 1882, Klein publia le livre [100], dans lequel il essaya d'expliquer les intuitions physiques qui, selon lui, se trouvent derrière la théorie de Riemann. Dans l'introduction, il juge que les surfaces de Riemann ne viennent pas nécessairement après les fonctions, mais que l'on peut renverser la vapeur :

> Je ne suis pas sûr que j'aurai jamais atteint une conception bien définie du sujet en entier, si Herr Prym, il y a bien des années (1874), au cours d'une conversation opportune, ne m'avait fait une communication dont l'importance a augmenté pour moi d'autant plus que je réfléchissais au sujet. Il m'a dit que *les surfaces de Riemann ne sont pas originellement nécessairement des surfaces à plusieurs feuillets au-dessus du plan, mais qu'au contraire, des fonctions complexes de la position peuvent être étudiées sur des surfaces courbes arbitrairement données de la même manière qu'à la surface du plan.*

Si on lit le livre de Klein, on s'aperçoit que ses « *surfaces courbes arbitrairement données* » sont en fait des surfaces dans l'espace tridimensionnel. Le clou allait être enfoncé par Weyl, qui donna pour la première fois en 1912, dans [168, I, §§4–6], une définition *abstraite* de surface, sans aucune référence à un espace ambiant. L'explication de ses motivations donnée dans la préface du livre est une variation de celle donnée par Klein : Prym y est simplement remplacé par Klein.

> Klein a été le premier à développer la conception plus libre d'une surface de Riemann, dans laquelle la surface n'est plus seulement un recouvrement du plan complexe ; de cette manière il a donné aux idées de base de Riemann leur pleine puissance. Ce fut ma chance de discuter de cela à fond avec Klein lors de plusieurs conversations. J'ai partagé sa conviction que les surfaces de Riemann ne sont pas seulement un instrument pour visualiser le caractère multivalué des fonctions analytiques, mais plutôt une composante essentielle et indispensable de la théorie ; non pas un supplément, plus ou moins artificiellement distillé à

> partir des fonctions, mais leur terre native, le seul sol dans lequel les fonctions poussent et s'épanouissent.

Weyl définit une surface comme *espace topologique séparé localement homéomorphe à* $\mathbb{R}^2$. Mais à l'époque tout cela était nouveau, alors il définit en détail les notions de base de la topologie générale : les voisinages, les ouverts, les fermés, les adhérences, les compacts, etc. Il expliqua les avantages des axiomes choisis, et leur origine dans une analyse des idées mises en œuvre lorsqu'on imagine le processus de prolongement analytique, qui oblige, comme on l'a vu dans la section 13, à penser à de petits disques recouvrant de proche en proche des portions du plan.

Remarquons aussi comment, du titre de Klein à celui de Weyl, l'attention est déplacée des fonctions algébriques et de leurs intégrales aux surfaces de Riemann, en accord avec la philosophie présentée dans les extraits précédents. Par la suite, essentiellement à partir de la fin des années 1920, on allait apprendre à définir des variétés abstraites portant divers types de structures : *topologique*, *différentiable* de diverses classes de différentiabilité, *analytique réelle*, *analytique complexe* (ou *holomorphe*), etc.

25. L'uniformisation des surfaces de Riemann

Les surfaces de Riemann furent introduites pour fabriquer de nouveaux domaines de définition sur lesquels les fonctions algébriques multivaluées deviennent univaluées. L'un des avantages qui se perd en faisant cela est de ne plus pouvoir utiliser *un seul paramètre* pour décrire la fonction dans tout son domaine de définition (la surface de Riemann en entier). En fait, cela est possible en relevant la fonction au *revêtement universel* de la surface de Riemann, grâce au théorème fondamental suivant, dit d'*uniformisation* :

Théorème 25.1. *Toute surface de Riemann abstraite simplement connexe est isomorphe soit à la sphère de Riemann, soit au plan complexe, soit au disque unité.*

Expliquons brièvement les notions intimement reliées de simple connexité et de revêtement universel. Nous avons vu dans la section 13 qu'il était possible de mesurer la multiformité d'une fonction en regardant comment ses diverses déterminations sont permutées lorsque l'on parcourt des lacets, et que la permutation obtenue ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet, pourvu que son point d'attache reste fixe. Ce fait, d'abord formulé par Cauchy et Puiseux pour les fonctions algébriques d'une variable, est général. Il mène à introduire la classe des espaces topologiques connexes dans lesquels tout lacet est homotope à un lacet constant. On dit qu'ils sont *simplement connexes*.

De la même manière que le complémentaire dans la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ des points de ramification d'une fonction algébrique est revêtu avec plusieurs feuillets par la surface de Riemann associée à la fonction, tout espace topologique X suffisamment simple localement et globalement (être une variété topologique paracompacte est suffisant) admet un revêtement simplement connexe. On peut montrer que ce revêtement est unique (techniquement, à isomorphisme de revêtement près). On l'appelle *le revêtement universel* de X.

Revenons au cas d'une surface de Riemann T. En utilisant un paramètre t partout sur le revêtement universel, que l'on peut supposer contenu dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème précédent, on voit que l'on peut voir chaque fonction méromorphe sur T comme fonction *uniforme* du paramètre t. C'est pour cette raison que l'on parle de *théorème d'uniformisation.*

Ce théorème, conjecturé par Poincaré vers 1880 et finalement prouvé en toute rigueur vers 1908 par Poincaré d'une part et Koebe d'autre part, a une histoire complexe et foisonnante, qui est contée dans [144].

Est introduite ainsi une trichotomie parmi les courbes algébriques lisses : celles de genre 0 sont leur propre revêtement universel, isomorphe à la sphère de Riemann, celles de genre 1 sont revêtues par le plan complexe et celles de genre au moins 2 le sont par le disque unité. Cette trichotomie est très importante aussi en arithmétique (voir le théorème 28.1).

Au fait, parlons aussi un peu des aspects arithmétiques du genre des courbes.

26. Le genre et l'arithmétique des courbes

En 1928, dans l'introduction de sa thèse [160], Weil explique de la manière suivante l'utilité de la notion de genre en arithmétique :

> La géométrie sur une courbe algébrique a pour objet l'étude des propriétés des points et systèmes de points sur la courbe qui sont invariantes par rapport aux transformations birationnelles. [...] En particulier, la recherche des points rationnels sur une courbe donnée C est évidemment un problème invariant par rapport aux transformations birationnelles à coefficients rationnels, et rentre, à ce titre, dans l'arithmétique sur les courbes algébriques : lorsque le domaine de rationalité se réduit à l'ensemble des nombres rationnels, ce problème n'est autre que celui de la résolution en nombres rationnels des équations diophantiennes à deux variables, ou encore (ce qui revient au même), de la résolution en nombres entiers des équations diophantiennes *homogènes* à trois variables.
>
> Depuis Diophante, qui leur a laissé son nom, l'on a étudié une foule d'équations particulières de cette sorte, et certaines d'entre elles ont provoqué des efforts considérables : il suffira de citer l'équation $x^n + y^n = 1$, dont l'impossibilité en nombres rationnels pour $n > 2$, affirmée par Fermat dans ses Observations sur Diophante, est restée indémontrée jusqu'à ce jour(12). Mais ce n'est qu'à une époque toute récente que les progrès de la géométrie sur les courbes algébriques suggérèrent d'aborder par des méthodes analogues l'étude générale des équations diophantiennes à deux variables. Hilbert et Hurwitz remarquèrent les premiers que la recherche des points rationnels sur une courbe algébrique est un problème invariant par les transformations birationnelles à coefficients rationnels : il en résultait que l'élément fondamental de classification des équations diophantiennes à deux variables est le genre de l'équation et non son degré.

Weil explique ensuite le problème qu'il a résolu dans sa thèse, dans lequel ce sont les systèmes de p points sur les courbes de genre p qui joue un rôle-clé :

(12)Elle ne sera démontrée que dans les années 1990 par Wiles [169].

> [...] la plus grande partie de ce mémoire [[130], de Poincaré] est consacré à l'étude des points rationnels sur les courbes de genre 1, et particulièrement sur les cubiques. Ce qui s'y trouve de plus important, c'est la définition du *rang* d'une courbe de genre 1 à coefficients rationnels [...] on peut dire, brièvement, que c'est le nombre minimum de points rationnels sur la courbe à partir desquels tous les autres puissent se déduire par des opérations rationnelles.
>
> Dans le dernier paragraphe de son mémoire, où il aborde les courbes de genre p quelconque, Poincaré montre que, pour généraliser les résultats trouvés pour le genre 1, il faut considérer, non plus les points rationnels sur la courbe, mais les systèmes rationnels de p points : là encore, il définit un invariant de la courbe par les transformations birationnelles à coefficients rationnels, le *rang*, qui est le nombre minimum des systèmes rationnels de p points à partir desquels tous les autres se déduisent par des opérations rationnelles.
>
> Depuis Poincaré, le progrès le plus important a été fait par Mordell, qui démontra que le rang des courbes de genre 1 est nécessairement fini lorsque le domaine de rationalité se réduit à l'ensemble des nombres rationnels. [...]
>
> Dans le présent travail, je démontre que le rang d'une courbe C est fini quel que soit son genre p et quel que soit le corps de nombres (algébrique et fini) que l'on choisit comme domaine de rationalité.

Le souci de relier la géométrie algébrique et l'arithmétique allait être une constante de l'œuvre mathématique de Weil (voir aussi son exposé [162] de 1950). Nous y reviendrons dans la section 44.

27. Quelques réflexions historiques de Weil

Pour avoir une vision d'ensemble du chemin parcouru jusqu'ici, découvrons le point de vue qu'avait Weil [167] en 1981 sur le paysage dans lequel nous nous sommes promenés.

> En bref, et en gros, il est permis de dire que la géométrie algébrique est l'étude des équations ou systèmes d'équations algébriques à plusieurs variables lorsque les ensembles ainsi déterminés (dits aussi « variétés ») ne se réduisent pas à des points isolés. Typiquement le problème est posé relativement à un corps de base qui peut ou non être spécifié ; lorsque ce corps est choisi en raison de ses propriétés arithmétiques, ou à plus forte raison

lorsqu'on se place sur tel ou tel anneau plutôt que sur un corps, on touche de si près à la frontière assez floue entre théorie des nombres et géométrie algébrique qu'à peine on s'aperçoit si on l'a franchie ; et d'ailleurs peu importe si on l'a franchie en effet.

Ainsi définie, la géométrie algébrique est inséparable de la théorie des fonctions algébriques d'une ou plusieurs variables, qui, depuis le XIX^e^ siècle en constitue un important chapitre ; à celle-ci il convient de joindre la théorie des intégrales de différentielles algébriques (du moins si l'on se place sur le corps des complexes comme il était d'usage pendant tout le XIX^e^ siècle et au-delà), ou en tout cas la théorie de ces différentielles, ce qui conserve un sens quel que soit le corps de base.

Bien entendu, une discipline mathématique ne se caractérise pas moins par ses méthodes que par son objet. À cet égard, ce qui importe avant tout pour la pratique de la géométrie algébrique telle que nous l'entendons, c'est l'usage des transformations rationnelles et plus spécialement des transformations birationnelles dont les transformations affines et projectives ne constituent qu'un cas particulier. En second lieu c'est la classification des objets étudiés vis-à-vis des transformations en question, par exemple (lorsqu'il s'agit de courbes algébriques) au moyen du degré d'abord, puis surtout au moyen du genre. Quant au langage géométrique, on a pu s'en passer parfois par l'étude directe des corps de fonctions algébriques, mais, faute de ce langage et des liens ou du moins des analogies qu'il fait apparaître avec la topologie et la géométrie différentielle, il est à croire que le sujet se serait desséché depuis longtemps.

Après avoir présenté l'exemple d'intégration donné par Johann Bernoulli, et que nous avons repris dans la section 5, Weil donne plusieurs exemples d'apparition de ce type de problème :

Nous retrouvons plus tard la même idée reprise par Daniel, fils de Johann Bernoulli, dans une lettre de 1723 à Goldbach [...] :

[...] « Ces problèmes diophantiens sont souvent d'un grand usage dans l'intégration des expressions différentielles, et je m'en suis souvent servi dans des problèmes d'intégration, de sorte que je m'étonne qu'on les ait si peu cultivés. Autrefois ils ont été discutés par Roberval, Wallis, Fermat, etc. et même avec une ardeur excessive bien qu'ils n'en connussent pas l'usage ».

[...] De même encore d'Alembert, qui s'exprime sur ce sujet avec sa lucidité habituelle dans [...] l'*Encyclopédie* :

« Remarquons en passant que cette méthode de réduire à des quantités rationnelles les quantités irrationnelles est fort utile dans le calcul intégral pour réduire une différentielle donnée en fraction rationnelle. »

Visiblement c'est aux équations de genre 0 que pensent d'Alembert et les Bernoulli dans les passages que nous venons de citer. Leibniz, comme toujours, prenait les choses de plus haut quand il écrivait en 1702 [...] :

[...] « ... il viendra [des mathématiciens], je l'espère, pour répandre plus largement les semences de la nouvelle théorie et en récolter des fruits plus abondants, ce qui sera surtout le cas s'ils s'appliquent, plus qu'il n'a été fait jusqu'ici, à l'avancement de l'Algèbre Diophantienne, presque entièrement négligée par les disciples de Descartes faute d'en avoir vu l'usage en géométrie. Moi au contraire, je me souviens d'avoir à plusieurs reprises (ce qu'on a pu trouver étonnant) indiqué que pour une bonne part les progrès de notre calcul intégral dépendent de l'extension de la sorte d'Arithmétique dont Diophante a été le premier à notre connaissance à traiter systématiquement. »

Comme on le voit par ces lignes prophétiques, non seulement Leibniz avait aperçu dans les intégrales de différentielles algébriques (celles mêmes que plus tard on nomma abéliennes) un champ privilégié pour le développement futur du calcul intégral, mais il avait vu clairement le lien étroit entre ce sujet et la classique « algèbre diophantienne », c'est-à-dire en somme la géométrie algébrique. Quant aux questions de classification des intégrales, il y avait longtemps que Leibniz s'y intéressait, comme on le voit par sa lettre de 1677 à Oldenburg [...] :

[...] « Il nous manque de savoir reconnaître si la quadrature d'une figure donnée peut se ramener à celle du cercle ou de l'hyperbole. Car la plupart des figures traitées jusqu'ici ont pu se quarrer ainsi. Mais si, comme je le crois, on peut démontrer que cela n'est pas toujours possible, alors il reste à trouver des figures d'un genre plus élevé, aux quadratures desquelles toutes les autres puissent se ramener ... Gregory pensait que la rectification de l'hyperbole et de l'ellipse ne dépendent pas de la quadrature du Cercle ou de l'Hyperbole ... »

Les quadratures du cercle et de l'hyperbole, ce sont les fonctions circulaires inverses et logarithmiques ; les quadratures qui en dépendent, ce sont les intégrales de genre 0. La conjecture de Gregory était fondée ; dans la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole, il s'agit d'une intégrale « elliptique » de la forme

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx;$$

les géomètres du XVII^e siècle y joignirent bientôt l'arc de lemniscate

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

> Leibniz, et à sa suite Joh. Bernoulli, ne perdirent jamais tout à fait l'espoir de ramener ces intégrales aux fonctions circulaires inverses et logarithmiques [...]. Même Euler n'y avait pas encore renoncé en 1730 ; du moins pose-t-il la question par deux fois dans des lettres à Goldbach [...], et l'on peut voir là une première indication de l'intérêt passionné qu'il devait porter par la suite aux intégrales dites elliptiques. [...]

Pour le bénéfice du lecteur à fort appétit historique, je voudrais indiquer deux autres références. En 1894, Brill et Noether décrivirent de manière très détaillée dans [24] leur vision du développement historique de la théorie des fonctions et des courbes algébriques. En 1976, Abhyankar proposa dans [4] une agréable promenade historique dans le monde des courbes algébriques planes, en insistant sur la nécessité de garder un point de vue « élémentaire ».

28. Et plus près de nous ?

Pour résumer ce que nous avons vu jusqu'à présent, le genre est une mesure de complexité pour des objets abstraits : les courbes algébriques (définies sur un corps quelconque, etc.) et les surfaces topologiques (orientables, etc.). Et ceci à la différence du degré qui, lui, mesure partiellement le plongement dans un espace ambiant. Pour achever la partie de mon histoire qui concerne les courbes algébriques et les surfaces topologiques, je voudrais énoncer deux théorèmes plus récents et très profonds concernant le genre, d'une part d'un point de vue arithmétique, et d'autre part topologique. Le premier est la réponse affirmative donnée par Faltings [65] à une conjecture de Mordell, et le deuxième est une réponse affirmative donnée par Kronheimer et Mrowka [107] à une conjecture de Thom.

Théorème 28.1. *Toute courbe irréductible de genre* $p > 1$ *qui est définie par des équations à coefficients rationnels admet un nombre fini de points à coordonnées rationnelles.*

Ceci est à contraster avec les courbes de genre 0 ou 1, qui peuvent admettre une infinité de points à coordonnées rationnelles (voir la section 26).

Théorème 28.2. *Si une surface lisse, orientée, compacte, sans bord, est plongée dans le plan projectif complexe et qu'elle est homologue à une courbe algébrique complexe lisse de degré* n*, alors son genre vaut au moins celui d'une telle courbe, c'est-à-dire* $(n-1)(n-2)/2$.

Pour la notion d'*homologie*, on pourra consulter les sections 39 et 40. Notons que toutes les courbes algébriques lisses de même degré sont non seulement homologues, mais de plus déformables continûment les unes dans les autres à l'intérieur du plan projectif complexe.

Le théorème précédent est peut-être le signe de l'existence d'un certain « *principe d'économie de la géométrie algébrique* », encore bien mystérieux, qui affirmerait que pour construire certains objets, on ne peut pas faire plus simplement (ici, avec un moindre genre) que grâce à la géométrie algébrique.

Partie 2. Les surfaces algébriques

29. Les débuts d'une théorie des surfaces algébriques

Les travaux de Riemann impressionnèrent tellement ses contemporains, que pendant tout le reste du XIX^{e} siècle, à de rares exceptions près, on faisait de la géométrie algébrique *complexe* c'est-à-dire que l'on étudiait la géométrie des ensembles de solutions dans $\mathbb{C}$ des systèmes d'équations polynomiales à plusieurs variables. En particulier, *surface algébrique* voulait dire *surface algébrique complexe*, c'est-à-dire paramétrisable localement par des fonctions de deux variables au voisinage de tout point non singulier.

Attention, les surfaces de Riemann ne sont pas des *surfaces* complexes, mais des *courbes* complexes !

C'est principalement Picard qui développa à la fin du XIX^e siècle le point de vue transcendant, de l'étude des intégrales de formes algébriques de degré 1 et 2 sur les surfaces algébriques. Il utilisa beaucoup la technique *tomographique*, de sectionnement des surfaces de l'espace affine par des plans parallèles, ce qui permettait de les voir comme une famille de courbes algébriques dépendant rationnellement d'un paramètre, et d'utiliser la théorie de Riemann pour les surfaces de Riemann associées. On parle de nos jours de « théorie de Picard-Lefschetz » et d'« équations de Picard-Fuchs » pour divers aspects des idées qu'il développa ainsi. Hélas, faute de temps, j'ai dû renoncer à en parler ici. Le lecteur intéressé pourra consulter son traité [127], ainsi que l'introduction à ses travaux [91, Chap. X].

Dans les divers théorèmes sur les surfaces de Riemann et les courbes algébriques vus dans la Partie I, il était très important de considérer des fonctions rationnelles (on dit plutôt *méromorphes*) sur une surface de Riemann, et leurs lieux de zéros et de pôles. À aucun moment une relation d'ordre sur ces ensembles de zéros ou de pôles n'entrait en ligne de compte. Il devint donc commode d'indiquer ces ensembles additivement $\sum_i A_i$, $\sum_j B_j$. On appela de telles sommes des *groupes de points*, et si $\sum_i A_i$, $\sum_j B_j$ étaient reliés comme précédemment, on disait que les deux groupes étaient *linéairement équivalents*. De nos jours, on parle de *diviseurs effectifs*. S'ils contiennent m points, on dit qu'ils sont *de degré m*.

Les théorèmes d'Abel 18.1 et 18.3 montrent que l'étude des sommes d'intégrales abéliennes (perçues comme des objets transcendants, dépendant du calcul intégral) est intimement reliée à celle des groupes de points à équivalence linéaire près (perçue comme géométrique).

Ainsi, Brill et Noether [23] refirent la théorie de Riemann sur des bases géométriques, en bannissant le recours à l'intégration, et en prenant comme objets d'étude centraux sur une courbe algébrique les *séries linéaires*, c'est-à-dire des espaces projectifs de groupes de points linéairement équivalents. De telles séries linéaires sont dites *complètes* si elles contiennent tous les diviseurs effectifs linéairement équivalents à l'un de leurs diviseurs. Le but de leur théorie était de réobtenir géométriquement le plus possible de résultats de Riemann et, bien sûr, d'en découvrir aussi de nouveaux.

Le point de vue géométrique sur la théorie des surfaces algébriques consistait de même à étudier celles-ci à l'aide des *systèmes linéaires* d'hypersurfaces de l'espace projectif ambiant, c'est-à-dire des hypersurfaces définies par les équations :

$$\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m = 0$$

où $F_1, \ldots, F_m$ désignent des polynômes homogènes de même degré et les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ne sont pas tous nuls (ils sont donc présents *linéairement* dans l'équation, d'où le nom de ce type de familles). Les intersections des membres de tels systèmes linéaires avec la surface de départ formaient des *systèmes linéaires* de courbes sur la surface, analogues des séries linéaires de groupes de points sur les courbes.

Venons-en au problème de définir une notion de genre pour les surfaces algébriques. Vu l'importance qu'il prenait dans les travaux de Riemann, il était naturel de s'attendre à ce qu'une notion analogue joue aussi un rôle-clé dans la théorie des surfaces algébriques complexes.

L'une des propriétés essentielles du genre d'une courbe plane est son invariance birationnelle (voir la section 16). Cette propriété est prise dès le début comme guide pour une définition analogue du genre d'une surface algébrique de l'espace. Clebsch [42] donna une telle définition en 1868, en imitant la définition par les courbes adjointes (voir la section 23) du genre d'une courbe plane :

> Je suis parvenu à démontrer le théorème suivant :
>
> « Soient données deux surfaces $f = 0$ et $\phi = 0$ des ordres m et n respectivement. Supposons que l'on puisse faire correspondre à chaque point de $f = 0$ un seul point de $\phi = 0$ et réciproquement, de sorte que ces surfaces soient transformables l'une dans l'autre d'une manière algébrique et rationnelle. Supposons, pour plus de simplicité, que ces surfaces n'aient que des singularités régulières [...]. Alors soit p le nombre de coefficients arbitraires d'une surface de l'ordre $n - 4$ passant par les courbes doubles ou de rebroussement qui se trouvent sur $f = 0$, et p' le nombre correspondant eu égard à $\phi = 0$. On aura toujours $p' = p$.
>
> Ce théorème nous permet de classifier ces surfaces eu égard à leur genre p.

Peu après, essentiellement grâce aux travaux [122], [123] de Noether, allait apparaître une nouvelle notion de genre pour les surfaces. Voici comment Castelnuovo et Enriques présentèrent cela en 1897, dans leur article de survol [31, §§3-4] :

> Par rapport aux transformations birationnelles, les variétés algébriques, ayant un même nombre de dimensions, se répartissent en classes ; nous dirons, avec Riemann, que deux variétés appartiennent à la même classe lorsqu'on peut établir une correspondance birationnelle entre elles. [...]
>
> On sait bien comment Riemann, en étudiant au point de vue de l'*Analysis situs* la surface réelle qui représente les points (réels et imaginaires) d'une *courbe algébrique*, est parvenu au plus important de ces caractères, qu'il a nommé *genre de la courbe*(13) [...] Clebsch et Gordan, en exposant (1866) la même conception sous la forme géométrique, ont donné du genre la définition bien connue qui suit. [...](14)
>
> À côté de cette définition *géométrique*, on peut donner une définition *numérique* de p. Il suffit de remarquer que le nombre des paramètres qui entrent d'une façon homogène dans l'équation d'une courbe de l'ordre $n-3$, assujettie à passer par d points donnés, est
>
> $$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d.$$
>
> On suppose vraiment ici que les d points doubles de C présentent autant de conditions *distinctes* aux courbes d'ordre $n-3$, que l'on contraint de passer par eux ; cela n'est pas évident *a priori*, mais on a démontré plus tard (Brill et Nöther) que la supposition est toujours vérifiée, lorsque on se borne aux courbes irréductibles.
>
> L'extension de ces définitions aux surfaces algébriques est immédiate, dans les cas les plus simples ; Clebsch et M. Nöther l'ont indiqué.
>
> Soit F une surface algébrique d'ordre n de l'espace ordinaire ; supposons que F n'ait d'autres singularités qu'une courbe double de l'ordre d ($\geqslant 0$) et genre π, et un certain nombre fini t ($\geqslant 0$) de points triples pour la surface, et triples aussi pour la courbe double nommée. Considérons maintenant les surfaces d'ordre

(13)Il s'agit ici d'une imprécision historique. Nous avons vu en effet, dans la section 21, que c'est Clebsch qui a introduit cette dénomination.

(14)Ils expliquent ensuite le théorème 23.1.

> $n-4$ qui passent simplement par la courbe double (et en conséquence deux fois, en général, par ses points triples), surfaces que nous appellerons *adjointes* à F ; *le nombre de ces surfaces linéairement distinctes* est (d'après la démonstration de M. Nöther) un caractère invariant (par rapport aux transformations birationnelles) de la surface F ; on l'appelle le *genre géométrique* de F, et on le désigne par p_g.
>
> Or si nous remarquons qu'une surface d'ordre m *assez élevé* doit satisfaire à
> $$md - 2t - \pi + 1$$
> conditions pour contenir la courbe double de F, nous sommes portés (avec Cayley), à former l'expression
> $$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1,$$
> dont la valeur est exactement p_g, si $m = n-4$ est assez élevé pour que l'on puisse appliquer la formule qui précède. Que la dernière condition soit remplie ou non, l'*expression de p_n a toujours la propriété d'invariance* ; c'est ce que MM. Zeuthen[(15)] et Nöther ont montré. La même expression est parfaitement analogue à celle considérée ci-dessus en parlant des courbes planes ; on lui a donné le nom de *genre numérique* de la surface F.
>
> Mais ici s'arrête l'analogie avec les courbes planes ; en effet nous ne pouvons plus affirmer l'égalité entre les valeurs de p_g et p_n ; au contraire *il peut bien arriver que l'on ait $p_g \neq p_n$ et précisément $p_g > p_n$*. Par exemple une surface réglée ayant les sections planes de genre p, a (d'après Cayley[(16)]), $p_g = 0$, $p_n = -p$. [...]

Peu après, on allait utiliser plutôt l'appellation de *genre arithmétique* pour ce que Castelnuovo et Enriques appellent *genre numérique*. Apparaît ainsi une dichotomie des surfaces complexes : certaines, dites *régulières*, vérifient $p_g = p_n$. Les autres, dites *irrégulières*, vérifient $p_g > p_n$.

Les efforts de Humbert, Enriques, Castelnuovo, Severi, Picard et Poincaré (voir [170, §VII.3]) allaient aboutir à montrer au début du XX^e siècle que l'*irrégularité* $p_g - p_n$ d'une surface algébrique peut aussi être vue comme une généralisation de la notion de genre d'une courbe

(15) Dans l'article [175].

(16) Cela fait référence à [38].

algébrique (interprétée via le théorème 18.2). En effet, *elle est égale à la dimension de l'espace vectoriel complexe des formes différentielles holomorphes de degré* 1.

30. Le problème du lieu singulier

Nous voyons dans les extraits précédents que les premières définitions d'une notion de genre pour les surfaces ont été données pour des surfaces de l'espace projectif complexe de dimension trois. On pourrait penser que cela était dû à une répugnance à considérer des surfaces dans un espace de plus grande dimension, où l'intuition géométrique tridimensionnelle était mise à mal.

Mais on peut y voir aussi une autre raison. C'est que, ainsi que l'expliquent Castelnuovo et Enriques dès le départ, le but était de faire une théorie *birationnellement invariante* des surfaces, dans la lignée de celle élaborée par Riemann pour les courbes (voir la section 16). Il s'avère que toute surface dans un espace projectif de dimension arbitraire est birationnellement équivalente à une surface de l'espace projectif tridimensionnel $\mathbb{P}^3$ (il suffit de prendre une projection linéaire générique).

Mais de tels représentants dans $\mathbb{P}^3$ de la classe d'équivalence birationnelle contiennent en général un *lieu singulier*, ce qui explique pourquoi on prenait toujours en compte celui-ci. D'ailleurs, Castelnuovo et Enriques y voient dans [31, p. 275] un avantage dans la recherche d'*invariants* :

> À la notion des invariants on est parvenu tout d'abord en considérant les expressions transcendantes liées à la surface (Clebsch, Nöther 1868-69 ; Picard 1884). Ensuite on s'est proposé de définir les mêmes invariants par la voie géométrique (ou algébrique). Les géomètres qui ont abordé cette question (Cayley, Nöther, Zeuthen), procédaient de la manière suivante. On considérait une surface F de l'espace ordinaire, et on faisait attention à ses caractères projectifs (ordre, courbes et points multiples). On transformait ensuite birationnellement la F en une autre surface F' du même espace, et en comparant les caractères projectifs de F aux caractères analogues de F', on formait des expressions numériques ou des fonctions, qui n'étaient pas modifiées par la transformation.

Ceci est analogue à la manière, amplement utilisée au XX^e siècle, de fabriquer des invariants de nœuds de $\mathbb{R}^3$ à partir de leurs diagrammes, qui contiennent eux aussi des singularités (leurs points de croisement).

Par contre, une fois arrivé à une construction faisant intervenir le lieu singulier, il était important de comprendre comment elle s'exprimait sur un modèle lisse. Voici ce qu'écrivent à ce sujet Castelnuovo et Enriques dans [31, §3] :

> Par rapport aux transformations birationnelles, les variétés algébriques, ayant un même nombre de dimensions, se répartissent en classes [...].
>
> Les variétés d'une même classe diffèrent entre elles, il est vrai, par leurs caractères projectifs (ordre, dimension de l'espace auquel elles appartiennent,...) ; mais elles ont plusieurs propriétés communes, dont la recherche forme le sujet de la *Géométrie sur les variétés algébriques* [...]. Il s'ensuit que lorsqu'on étudie une *classe* de variétés, on peut se rapporter toujours à une variété abstraite, générale, de la classe, sans faire du tout attention à ses caractères projectifs [...].
>
> La considération de la variété générale d'une classe a ce grand avantage, qu'elle permet de faire abstraction de toutes les singularités de nature projective qu'une variété particulière peut présenter. Ainsi, dans la suite, lorsque nous parlerons des points de la variété générale d'une classe, nous allons supposer toujours qu'il s'agit de points *simples* ; on n'exclut pas naturellement que ces points ne peuvent correspondre à des points multiples sur des variétés particulières de la classe ; mais on affirme simplement qu'un point multiple est une particularité projective de quelque représentant de la classe, pas de la classe elle-même ; c'est, pour ainsi dire, un défaut de l'image, pas du modèle.

En particulier, les auteurs affirment que *toute variété projective est birationnellement équivalente à une variété projective lisse.* On savait prouver cela facilement pour les courbes projectives, et diverses approches apparaissaient de temps en temps pour les surfaces projectives, chacune d'entre elles donnant lieu ultérieurement à des critiques. On pourra consulter [170, Chap. I] pour une description des principaux travaux sur la question jusqu'en 1935, ainsi que [71] et [72] pour des détails sur les discussions autour de ce problème en Italie dans les années 1890.

En 1935, dans son traité [170] présentant la théorie des surfaces algébrique suivant le point de vue italien, Zariski considérait que la première preuve entièrement rigoureuse du fait que tout surface projective est birationnellement équivalente à une surface lisse venait d'être obtenue par Walker dans [158]. À partir de ce moment, Zariski se mit à essayer d'étendre ce théorème en dimensions plus grande. Il réussit à le faire dans [173] pour les variétés projectives de dimension 3, mais ce n'est que son élève Hironaka qui le démontra finalement dans [81] pour toute variété algébrique définie sur un corps de caractéristique nulle(17) (voir le théorème 30.1).

Mais revenons à l'article de survol de Castelnuovo et Enriques. Voici comment ils expliquent dans [31, §2] les difficultés qui apparaissent en géométrie birationnelle à partir de la dimension deux, même lorsqu'on ne travaille qu'avec des variétés non singulières :

> En revenant aux variétés F et F' en correspondance birationnelle, il y a deux cas à distinguer, suivant que les F, F' sont des courbes, ou bien des variétés à plus d'une dimension. Dans le premier cas en effet, on a entre les courbes F, F' une correspondance biunivoque *sans exceptions* [...]. Mais si F, F' sont par exemple des surfaces [...], il peut bien exister sur F ou F' des points simples (en nombre fini), à chacun desquels vont correspondre sur F' (ou F) tous les points d'une courbe. La projection stéréographique d'une surface du second ordre sur un plan donne un exemple bien simple de telles courbes.

Expliquons un peu plus ce dernier exemple. La *projection stéréographique* est présentée d'habitude comme la projection d'une sphère de l'espace euclidien standard, à partir de l'un de ses points pensé comme pôle, sur le plan tangent au pôle diamétralement opposé.

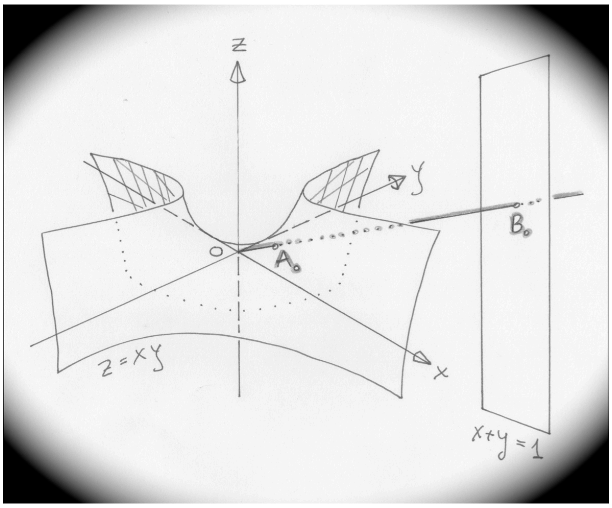
Mais nous avons ici à penser à cette opération à la fois projectivement et sur le corps des nombres complexes. La sphère n'est alors pas distinguable (à transformations projectives complexes près) des autres quadriques non singulières, dont les modèles affines réels sont les ellipsoïdes, les hyperboloïdes à une ou deux nappes et enfin, les

(17)Cela est encore une question ouverte de nos jours en caractéristique positive, pour les variétés de dimension au moins 4.

paraboloïdes elliptiques et hyperboliques : à transformations projectives près, il y a une seule quadrique lisse dans l'espace projectif complexe, un résultat vrai en toutes dimensions.

Projeter stéréographiquement une telle quadrique signifie la projeter à partir de l'un de ses points sur un hyperplan qui ne le contient pas. Nous avons déjà vu dans la section 5 qu'en utilisant ce type de projection, on peut montrer qu'une conique est birationnellement équivalente à une droite. En fait, en toutes dimensions, *la projection stéréographique établit une équivalence birationnelle entre une quadrique lisse et l'hyperplan de projection.*

Expliquons cela sur l'exemple d'un paraboloïde hyperbolique S. Nous avons choisi ce modèle affine réel afin de mieux comprendre ce qui se passe à l'aide de notre intuition spatiale usuelle, et en même temps suivre les opérations par le calcul. On peut choisir le système de coordonnées affines tel que S soit défini dans l'espace $\mathbb{R}^3$ par l'équation $z = xy$ et que le centre de projection soit l'origine O. Comme plan de projection, choisissons celui d'équation $x + y = 1$, noté P. Si $A_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, alors la droite joignant O et A_0 coupe le plan P au point $B_0(\frac{x_0}{x_0+y_0}, \frac{y_0}{x_0+y_0}, \frac{z_0}{x_0+y_0})$.



En prenant sur S le système de coordonnées (x, y) et sur P celui de coordonnées (x, z), que nous noterons (X, Z) pour éviter les confusions, notre projection stéréographique σ est donnée par :

$$(x,y) \longrightarrow (X,Z) = \Big(\frac{x}{x+y}, \frac{xy}{x+y}\Big).$$

On en déduit immédiatement l'expression de l'inverse σ^{-1} :

$$(X,Z) \longrightarrow (x,y) = \Big(\frac{Z}{1-X}, \frac{Z}{X}\Big),$$

ce qui montre bien que σ est birationnelle. Géométriquement, cela provient du fait que, la quadrique S étant du deuxième degré, *toute* droite passant par le centre de projection O la coupe en un seul autre point, éventuellement confondu avec O ou situé à l'infini.

Vraiment *toute* ? Presque, avec comme seule exception le cas où la droite *est contenue dans* S. Et en fait par tout point de S passent deux droites contenues dans S : on dit que la quadrique est *doublement réglée*. Cela aussi peut se comprendre géométriquement : le plan tangent en un point A de S coupe S suivant une conique singulière en A, qui est donc l'union de deux droites. Dans la figure j'ai représenté celles qui passent par l'origine, qui sont en fait les axes des coordonnées x et y.

La projection σ envoie donc les deux droites de S passant par O en deux points distincts M et N de P. Par ailleurs, elle n'est pas définie en O, car on obtient comme limites possibles des points $\sigma(A)$, lorsque A tend vers O, tous les points de la droite L qui joint les points M et N : l'inverse σ^{-1} envoie bien L, défini dans le système de coordonnées (X,Z) par l'équation $Z=0$, dans l'origine O. On dit que σ *éclate* le point O et qu'elle *contracte* les deux droites passant par O.

Les transformations birationnelles σ entre surfaces lisses contractent toujours certaines courbes et en éclatent d'autres. Dans l'exemple précédent, cette transformation se fait entre surfaces qui ne sont pas isomorphes (deux droites du même réglage d'une quadrique lisse dans $\mathbb{P}^3$ ne s'intersectent pas ; par contre, dans $\mathbb{P}^2$, deux courbes distinctes ont toujours des points en commun). Mais il y a de tels exemples aussi entre surfaces isomorphes. L'un des plus simples est la *transformation quadratique* d'un plan projectif de coordonnées homogènes $(X:Y:Z)$ en un autre plan de coordonnées homogènes $(U:V:W)$, définie par :

$$(X:Y:Z) \dashrightarrow (U:V:W) = (YZ:ZX:XY).$$

Cette transformation « contracte » les côtés du triangle défini par $XYZ = 0$ en les sommets de celui défini par $UVW = 0$ et en même temps « éclate » les sommets du premier en les côtés du deuxième.

Les transformations birationnelles étaient ainsi toujours vues comme des mélanges, plus ou moins intriqués, d'éclatements et de contractions. Mais en 1942, Zariski réussit à dégager dans [172] une notion d'*éclatement d'un point*, permettant de factoriser toute transformation birationnelle entre surfaces lisses en produit d'éclatements en de de leurs inverses.

Plus généralement, et en toutes dimensions, il définit la notion d'*éclatement d'une sous-variété lisse* M d'une variété projective lisse N : en termes modernes, on remplace chaque point de la sous-variété M par le projectifié de l'espace normal à M (le quotient de l'espace tangent à N par celui tangent à M). Il montra aussi que cela fournissait une notion d'éclatement d'une sous-variété lisse d'une variété projective pas nécessairement lisse : on la plonge dans un espace ambiant lisse et on l'éclate dedans ; en restriction à la variété initiale cela donne une construction indépendante du plongement choisi.

C'est le fait que Zariski ait isolé ainsi les opérations d'éclatement qui permit d'envisager un algorithme de résolution *par éclatements successifs de sous-variétés lisses.* C'est finalement Hironaka qui parvint à démontrer en 1964 :

Théorème 30.1. *Soit donnée une variété algébrique X définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Il existe alors une* résolution des singularités *de X, c'est-à-dire une application birationnelle partout définie et propre $\rho : Y \to X$, qui soit un isomorphisme au-dessus de la partie lisse de X. De plus, on peut obtenir une telle application ρ en composant des éclatements de centres lisses.*

31. Une profusion de genres pour les surfaces

L'école italienne de géométrie algébrique des surfaces, dont les représentants les plus fameux furent Castelnuovo, Enriques et Severi, privilégia une méthode géométrique d'étude des surfaces algébriques, via les familles algébriques de courbes tracées dessus. Les plus simples de ces familles sont celles qui dépendent de manière linéaire des paramètres : les *systèmes linéaires de courbes*, qui généralisaient les séries linéraires de groupes de points sur les courbes, considérées par Brill et Noether (voir le début de la section 29).

Le lien entre ce point de vue et celui transcendant des intégrales simples ou doubles développé essentiellement par Picard, est fourni par les *lieux des zéros* des 2-formes partout holomorphes : ce sont des courbes algébriques tracées sur la surface, qui varient en un système linéaire lorsque la forme différentielle varie. Comme ce système linéaire ne nécessite pas de faire référence à une quelconque structure supplémentaire, telle qu'un plongement dans un espace ambiant, il est appelé *le système canonique* $|K|$ de la surface. Il est essentiel pour comprendre les propriétés de la surface algébrique considérée, et ceci selon les deux points de vue, géométrique et transcendant.

Suivant leur optique géométrique, les italiens désirèrent en donner une définition qui ne fasse pas appel aux formes différentielles. Pour cela, ils définirent $|K|$ comme différence $|C'-C|$ où $|C|$ est un système linéaire de courbes sur la surfaces et $|C'|$ est son *système adjoint*(18), qui passe par les *points-base* de $|C|$ (les points communs à toutes les courbes du système) et qui découpe sur chacune d'entre elles un ensemble de points de la *série canonique* (voir [31, §§ 16, 17 & 21]). On est ramené ainsi au même type de considérations en dimension un de moins : la série canonique d'une courbe est la série linéaire des lieux de zéros des formes de degré un partout holomorphes. Mais les italiens avaient à disposition une définition géométrique : c'est la seule série linéaire de degré $2p-2$ et dimension $p-1$, si p désigne le genre de la courbe (c'est-à-dire de la surface de Riemann associée).

Un problème qui était gênant pour cette manière de voir les choses, était de comprendre ce qui se passe lorsque *la surface n'admet aucune 2-forme partout holomorphe qui soit non nulle*. Dans ce cas, le système canonique $|K|$ paraît vide. Et pourtant il est possible que son double soit non vide ! En termes de formes différentielles, il est possible qu'il n'y ait pas des 2-formes holomorphes non nulles sur la

(18) Il s'agit d'une réinterprétation et d'une généralisation de l'idée de courbe adjointe d'une courbe plane, expliquée dans la section 23.

surface, mais qu'il y ait des 2-formes holomorphes de poids 2, c'est-à-dire qui s'écrivent $a(x, y)(dx \wedge dy)^2$ dans des coordonnées locales complexes (x, y) arbitraires, avec $a(x, y)$ holomorphe. Voici ce qu'écrivent à ce sujet Castelnuovo et Enriques dans [31, §30] :

> Nous avons parlé jusqu'à présent d'un seul système invariant situé sur une surface donnée, à savoir du système canonique $|K|$. Mais on peut tout de suite introduire de nouveaux systèmes invariants, car il suffit de considérer les multiples $|K_i| = |iK|$ du système canonique. Il ne vaudrait pas même la peine de faire attention à ces nouveaux systèmes, s'il n'arrivait parfois de rencontrer des systèmes analogues sur des surfaces qui ne possèdent pas de système canonique. [...]
>
> Le système *i-canonique* nous fournit de nouveaux caractères invariants de la surface ; tels sont par exemple le nombre P_i des courbes i-canoniques qui sont linéairement indépendantes, le genre de ces courbes, etc. Pour $i = 1$, $P_i = P_1$ nous donne le genre géométrique p_g de la surface ; pour $i = 2$ on a un caractère P_2 qu'on pourrait appeler *bigenre*, et qui va jouer (comme on verra) un rôle fondamental dans la théorie des surfaces rationnelles ; etc. Quelques-uns de ces nouveaux caractères peuvent s'exprimer en fonction des anciens ; pas tous pourtant ; c'est ce que nous allons reconnaître au sujet de P_2.
>
> [...] Un premier exemple, bien simple, est fourni par *la surface du sixième ordre qui passe deux fois par les six arêtes d'un tétraèdre*, et en conséquence trois fois par les sommets de celui-ci ; la surface a le genre géométrique $p_g = 0$, car il n'existe pas de surface du second ordre passant simplement par les six arêtes. Il existe au contraire une surface bi-adjointe de l'ordre 4, qui est formée par les quatre faces du tétraèdre ; par suite l'on a $P_2 = 1$.

Ce dernier exemple, trouvé peu de temps auparavant par Enriques (et analysé en détail dans [58]), est historiquement le premier exemple de surface algébrique non rationnelle (c'est-à-dire qui n'est pas birationnellement équivalente au plan) qui ait un genre géométrique et un genre numérique nul. Ceci est à contraster avec la situation en dimension un, où la rationalité d'une courbe est caractérisée par l'annulation du genre.

Se pose alors la question de *trouver une caractérisation analogue des surfaces rationnelles par des caractères invariants.* L'exemple précédent montre que le genre géométrique et le genre numérique ne suffisent pas. Le premier avantage des *plurigenres*, définis dans l'extrait précédent, est qu'ils fournissent de tels invariants supplémentaires permettant de résoudre ce problème. Mais ils permettent en fait de caractériser bien d'autres sortes de surfaces, et d'aboutir à une véritable *classification* de celles-ci.

32. La classification des surfaces algébriques

C'est la classification des courbes algébriques qui a servi de modèle à celle des surfaces, développée par Enriques avec l'aide de Castelnuovo entre 1890 et 1914, et qui est présentée de manière détaillée dans [32] et [58]. Voici déjà comment Enriques présente le principe de classification des courbes dans [56] :

> Rappelons d'abord ce qui a été établi par Riemann, Clebsch, Brill et Nöther touchant la classification des courbes
>
> $$f(x, y) = 0.$$
>
> Un nombre entier, qu'on appelle le *genre* joue ici le rôle fondamental. Pour chaque valeur du genre p il y a une famille de courbes, renfermant une infinité continue de classes distinctes, qui est précisément ∞^{3p-3} pour $p > 1$ (∞^1 pour $p = 1$, ∞^0 pour $p = 0$).
>
> Et il est essentiel de remarquer que cette famille est *irréductible*, de sorte que dans la classification des courbes il ne s'introduit d'autres nombres entiers en dehors du genre.

L'irréductibilité dont parle Enriques signifie qu'il existe une famille de courbes de genre p, paramétrée par une variété algébrique irréductible, et qui contient au moins un représentant de toutes les classes d'équivalence birationnelle de courbes de genre p.

Continuons avec les explications données par Enriques dans [57] sur le cas des surfaces(19) :

> Pour une surface rationnelle on a : $p_g = p_a = 0$. Mais ces conditions nécessaires ne suffisent pas à déterminer la classe des surfaces rationnelles. [...] Pour une surface rationnelle on a toujours $P_2 = 0$, mais réciproquement le bigenre ne s'annule pas nécessairement avec le genre p_g ou p_a. [...] Par contre M. Castelnuovo a démontré que les conditions de rationalité

(19)Remarque terminologique : le genre numérique était désormais appelé aussi *genre arithmétique*, et noté p_a.

> d'une surface se ramènent à annuler en même temps le genre, géométrique et numérique, et le bigenre ; elles se réduisent d'ailleurs à $p_a = P_2 = 0$.
>
> Un problème plus général, qui renferme celui des surfaces rationnelles, est celui de la détermination des surfaces $f(x, y, z) = 0$, représentables paramétriquement par des fonctions rationnelles d'un paramètre et algébriques d'un autre, c'est-à-dire des surfaces que l'on ramène par une transformation birationnelle au type du cylindre [...]. Pour résoudre ce problème, la considération du bigenre ne suffit plus ; il est nécessaire d'introduire encore des genres d'ordre supérieur [...]. Et alors, résultat remarquablement simple, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface puisse être ramenée au type du cylindre sont simplement $P_4 = P_6 = 0$.
>
> Les genres d'ordre supérieur ou plurigenres jouent aussi un rôle dans le problème général de la classification des surfaces, à côté des genres p_a et p_g [...]. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on parvienne à définir ainsi toutes les familles de surfaces, ou de classes de surfaces, dépendant de paramètres ou modules arbitraires. À ce sujet il faut s'attendre à des complications qui n'ont pas leur analogue dans la théorie des courbes. Je me bornerai à vous en donner un exemple. Tandis que les surfaces pour lesquelles $p_a = P_3 = P_5 = ... = 0, P_2 = P_4 = ... = 1$, se ramènent à la famille des surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, au contraire les surfaces dont tous les genres sont égaux à 1, $p_a = P_i = 1$, donnent lieu à une infinité de familles distinctes, renfermant chacune 19 modules. La première de ces familles est constituée par les surfaces du quatrième ordre, la seconde par les surfaces du sixième ordre passant doublement par une courbe du même ordre qui appartient à une quadrique, etc.

Les surfaces de cette *infinité de familles distinctes* furent plus tard baptisées *surfaces K3* par Weil (voir [163]). Le fait qu'elles forment une infinité de familles provient d'un autre phénomène qui ne commence à se manifester qu'à partir de la dimension 2 : c'est qu'*on peut déformer leurs structures analytiques complexes aussi peu que l'on veut pour qu'elles cessent d'être algébriques* !

Mais pour qu'on puisse envisager un tel phénomène, il a fallu attendre que la vision des surfaces de Riemann abstraites expliquée par Weyl dans [168] (voir la section 24) devienne commune aussi en dimensions plus grandes. Et ainsi, à une époque où c'était le cas, Kodaira [105] fit une classification des *surfaces analytiques complexes* analogue à celle des surfaces algébriques complexes. Dans cette classification, les surfaces K3 ne forment plus qu'une seule famille (on pourra consulter l'exposé [12] de Beauville pour un point de vue moderne sur les surfaces K3 et sur cette propriété, ainsi que l'ouvrage collectif [13] pour beaucoup plus de détails).

Dans l'image suivante est représenté le tableau de classification des surfaces algébriques, tel qu'on le trouve à la fin du traité [58].

- $P_{12} = 0$: rigate $n > 2\pi - 2$, curve eccezionali non eliminabili, schiera continua di trasformazioni non formanti gruppo.
  - $p_a = 0$ superficie razionali ($p_a = P_2 = 0$)
  - $p_a = -1$ rigate ellittiche ($p_a = -1$, $P_4 = P_6 = 0$)
  - $p_a < -1$ rigate di genere $p = -p_a > 1$.
- $P_{12} = 1$: curva canonica virtuale d'ord. 0, $n = 2\pi - 2$ ($p^{(1)} = 1$)
  - $p_g = 1$
    - $p_a = 1$, infinite famiglie di superficie ($p_a = P_2 = 1$)
    - $p_a = -1$, infinite famiglie di superficie iperellittiche di divisore $\delta = 1, 2, \ldots$ ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$).
  - $p_g = 0$
    - $p_a = 0$, superficie del 6° ordine passanti doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).
    - $p_a = -1$, superficie ellittiche $I_a\, I_b\, II_a\, II_b\, III_a\, III_b\, III_c$ ($P_2 = 0{,}1$, $P_4 = 0{,}1$, $P_3 = 0{,}1$, $P_4 = 0{,}1$).
- $P_{12} > 1$ ($n < 2\pi - 2$)
  - $p^{(1)} = 1$
    - $p_a = -1$, superficie ellittiche con un fascio di genere p_g di curve ellittiche ($p_a = -1$, $P_4 + 1$).
    - $p_a \geq 0$, superficie le cui curve canoniche e pluricanoniche sono composte colle curve ellittiche d'un fascio di genere $p_g - p_a$: dipendono da più caratteri interi arbitrarii.
  - $p^{(1)} > 1$
    - $p_a \geq 0$, superficie che ammettono un modello proiettivo canonico ($p_g > 3$) o bicanonico ($p^{(1)} > 3$) ecc.: un numero finito di tipi per un dato valore del $p^{(1)}$.

Cette classification est beaucoup plus compliquée que pour les courbes, où il suffisait de déterminer la valeur d'un invariant (le genre) pour caractériser la courbe à transformation birationnelle et déformation près. Ceci est vrai pour certaines familles de surfaces, pourvu que l'on connaisse les valeurs de plusieurs types de genres (et c'est le succès principal de l'entreprise de classification de Castelnuovo-Enriques), mais même de nos jours on ne dispose pas d'une liste d'invariants numériques qui permettent de déterminer toute surface algébrique à transformation birationnelle et déformation près.

Le lecteur curieux de découvrir comment on pouvait percevoir la théorie des surfaces algébriques en 1913 pourra lire le survol [10] de Baker. Pour plus de détails sur le développement historique de cette classification, on pourra consulter [73]. Une présentation moderne peut être trouvée dans le cours [137] de Reid. Des présentations de la classification des surfaces complexes pas nécessairement algébriques pourront être trouvées dans les livres [68] de Friedman et Morgan et [11] de Barth, Hulek, Peters et Van de Ven.

33. Le genre géométrique et le polyèdre de Newton

Les diverses définitions de notions de genres dont nous avons discuté jusqu'à présent ne nous disent pas comment calculer effectivement l'un des genres d'une surface algébrique si on part d'une équation de définition $f(x, y, z) = 0$ dans $\mathbb{C}^3$ (ce qui détermine sa classe d'équivalence birationnelle). C'est ce problème qu'a étudié Hodge dans [87]. Il se rendit compte que l'objet-clé associé à f, qui contrôle le *genre géométrique*, est *le polyèdre de Newton de* f. Il définit celui-ci comme *l'enveloppe convexe dans* $\mathbb{R}^3$ *des exposants* $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ *des monômes apparaissant dans l'écriture réduite de* f.

Newton avait introduit l'analogue en dimension deux, afin d'expliquer comment on pouvait exprimer y comme série fractionnaire de x (dite *de Newton-Puiseux*, voir la section 14), si on connaît une relation polynomiale $f(x, y) = 0$, avec $f(0, 0) = 0$. Un tel *polygone de Newton* est représenté dans la Figure 11 de l'article [135] de Puiseux, visible dans la reproduction de la section 14.

Hodge démontra que :

> *Si les coefficients sont suffisamment généraux, les points entiers situés à l'intérieur du polyèdre de Newton mènent à des polynômes de la forme* $xyz\psi$, *où* $\psi = 0$ *est d'ordre* $N - 4$ *et de plus est adjoint de la surface à l'origine et à l'infini.*

> Si la surface $f(x, y, z) = 0$ n'a pas d'autres singularités ailleurs qu'à l'origine et à l'infini et si, de plus, la nature de ces singularités est fidèlement représentée dans le diagramme de Newton, le nombre de points entiers qui se trouvent à l'intérieur du polyèdre de Newton sera exactement égal au genre géométrique p_g de la surface. Plus généralement, si le diagramme de Newton représente fidèlement une singularité isolée, nous pouvons d'un seul coup déterminer l'effet de cette singularité sur le genre p_g.

En fait, l'étude du lien entre divers invariants des hypersurfaces ou de leurs singularités et leurs polyèdres de Newton n'a pris son essor qu'à partir de la création dans les années 1970 de la *géométrie torique*. Une présentation modernisée du théorème précédent de Hodge est faite dans cet esprit par Merle et Teissier dans [113].

Dans cette dernière référence est étudiée aussi de manière détaillée la notion d'*adjonction* selon le point de vue nécessaire à la compréhension de tous les écrits discutés précédemment. En effet, la motivation essentielle de Merle et Teissier était de comprendre les travaux [54] de Du Val de 1933 sur les singularités de surfaces *qui n'affectent pas les conditions d'adjonction.*

34. Les singularités qui n'affectent pas le genre

Du Val dit qu'un point singulier isolé P d'une surface algébrique S de $\mathbb{P}^3$ *n'affecte pas les conditions d'adjonction* s'il n'impose pas de conditions sur les surfaces adjointes à S, c'est-à-dire si celles-ci ne sont pas obligées de passer par P. Plus précisément (comparer cela avec les explications données pour les courbes dans la section 23), en choisissant une carte affine (x, y, z) centrée en P, si pour tout polynôme $q(x, y, z)$, indépendamment du fait qu'il s'annule ou pas en $(0, 0, 0)$, la 2-forme :

$$q(x, y, z)\frac{dx \wedge dy}{\partial f/\partial z}$$

est holomorphe au voisinage de la préimage de P sur toute surface projective *non singulière* qui se projette birationnellement sur S (c'est-à-dire sur toute résolution des singularités, voir le théorème 30.1). Remarquons qu'une telle surface joue le même rôle par rapport à la surface algébrique complexe S que la surface de Riemann (qui est *non singulière* par construction !) d'une courbe algébrique C par rapport à C.

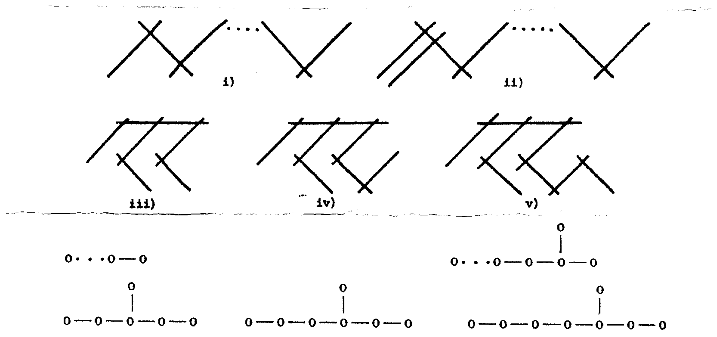
Comme le genre géométrique d'une surface de degré n est égal par définition à la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré $n-4$ qui définissent des surfaces adjointes, on déduit que la présence de points singuliers isolés qui n'affectent pas les conditions d'adjonction *n'affectent pas le genre*.

Du Val se proposa de trouver toutes les singularités de surfaces de $\mathbb{P}^3$ qui n'affectent pas les conditions d'adjonction. En langage modernisé, il démontra le théorème suivant :

Théorème 34.1. *Si un point singulier isolé de surface de* $\mathbb{P}^3$ *n'affecte pas les conditions d'adjonction, alors il admet une résolution dont la courbe exceptionnelle est formée de courbes rationnelles lisses d'auto-intersection* -2*. De plus, dans ce cas, leur graphe dual est un arbre ayant au plus un point de ramification, qui est alors de valence* 3*, et les longueurs des trois segments maximaux partant de ce point font partie des triplets (ordonnés dans l'ordre croissant)* $(1, 1, n \geqslant 1)$*,* $(1, 2, 2)$*,* $(1, 2, 3)$*,* $(1, 2, 4)$*.*

Voici une explication succincte des notions en jeu. Une *résolution* du point singulier $P \in S$ est une application birationnelle $\rho : \Sigma \to S$ (définie partout), avec Σ une surface non singulière, telle que ρ soit un isomorphisme au-dessus d'un voisinage de P privé de P (voir aussi le théorème 30.1). Dans ce cas, la préimage de P est une courbe E, appelée la *courbe exceptionnelle* de la résolution. Le *graphe dual* de celle-ci a un ensemble de sommets en bijection avec les composantes irréductibles de E, deux sommets étant joints par autant d'arêtes que le nombre d'intersection des composantes associées. De plus, chaque sommet est pondéré par l'auto-intersection dans la surface lisse Σ de la composante associée.

Dans la figure ci-après, combinant les diagrammes des articles [6] et [7], dans lesquels Michael Artin généralise les résultats de Du Val, en classifiant les singularités de surfaces qui n'affectent pas le genre (arithmétique), *indépendamment de leur dimension de plongement*, sont représentées de deux manières schématiques différentes les configurations de courbes exceptionnelles décrites par le théorème 34.1. La deuxième représentation est celle des graphes duaux, expliquée dans le paragraphe précédent.



Rational double points. ($o^2 = -2$)

Le théorème 34.1 permet de voir que si une surface de $\mathbb{P}^3$ n'a que des singularités de Du Val, alors elle a le même genre géométrique qu'une surface non singulière de même degré. En fait, Brieskorn montra dans [20] que, dans ce cas, la résolution de la surface obtenue en recollant les résolutions décrites dans le théorème pour les divers points singuliers, est *difféomorphe* aux surfaces lisses de même degré.

On pourra trouver des renseignements sur l'évolution de la compréhension des singularités décrites par Du Val dans l'article de souvenirs [21] de Brieskorn. Cette classe de singularités admet de multiples autres caractérisations. Celles connues en 1979 ont été rassemblées par Durfee dans [55]. On pourra consulter aussi les divers articles de [46], ainsi que l'article [152] de Slodowy.

35. Hodge et l'interprétation topologique des genres

On remarquera que les définitions des diverses notions de genre introduites pour les surfaces sont toutes algébriques, qu'aucune d'entre elles n'est purement topologique. Si les italiens préféraient en donner des définitions à partir de modèles (birationnellement équivalents) situés dans l'espace projectif de dimension trois, dans lesquels les courbes singulières étaient en général inévitables, la question de la signification topologique du genre se pose plutôt sur un modèle lisse, situé dans un espace de dimension plus grande.

Dans [88] Hodge démontra le théorème suivant :

Théorème 35.1. *Le genre géométrique d'une surface projective complexe lisse est un invariant topologique.*

La preuve de Hodge dépend de manière essentielle de l'extension faite par Poincaré [128] (voir la section 39) aux variétés de dimension quelconque de la théorie de Riemann des cycles tracés sur les surfaces. Elle dépend aussi de sa propre théorie des formes harmoniques sur les variétés riemanniennes de dimension quelconque (voir la section 43). C'est le signe qu'il est temps pour nous aussi de regarder vers les dimensions supérieures. Mais auparavant, je voudrais expliquer les pas de la preuve de Hodge du théorème précédent, au bénéfice du lecteur qui connaît un peu ces théories.

Hodge prouva en fait que l'indice d'inertie (le couple formé par le nombre de signes positifs et le nombre de signes négatifs dans une diagonalisation) de la forme d'intersection sur le deuxième groupe de cohomologie $H^2(V, \mathbb{R})$ de la surface V (voir les explications qui suivent les théorèmes 40.2 et 42.3) est égal à $(2p_g + 1, B_2 - 2p_g - 1)$, où p_g désigne le genre géométrique et B_2 le deuxième nombre de Betti. Comme cette forme d'intersection est invariante topologiquement, il s'ensuit que p_g l'est aussi.

Plus précisément, il munit la surface donnée dans un espace projectif de dimension arbitraire de la métrique riemannienne induite par celle de l'espace ambiant. Puis, il décompose l'espace des formes harmoniques de degré 2, isomorphe à $H^2(V, \mathbb{R})$ par son théorème général 43.1, en somme directe des formes anti-autoduales (telles que $*\phi = -\phi$) et autoduales (telles que $*\phi = \phi$). Il montre ensuite que la forme d'intersection est définie positive sur le premier espace et définie négative sur le deuxième (ce qui est vrai sur toute variété riemannienne orientée de dimension 4). Enfin (et ceci est spécifique aux surfaces algébriques), il prouve que le premier espace est de dimension $2p_g + 1$.

Remarquons que de nos jours les deux espaces de formes se retrouveraient permutés. Cela dépend en fait de la convention de signe que l'on prend dans la définition de l'involution $*$ de Hodge et dans celle de l'orientation induite par la structure complexe.

L'irrégularité $p_g - p_a$ (voir la fin de la section 29) est elle aussi invariante topologiquement. En effet, comme on l'a mentionné précédemment, elle est égale à la dimension de l'espace des formes holomorphes de degré 1, qui est égal à son tour à la moitié du premier nombre de Betti B_1 de la surface algébrique complexe considérée. Ceci est une conséquence du fait, connu auparavant pour les surfaces de Riemann des fonctions algébriques, et valable en fait pour les variétés projectives complexes lisses de dimension quelconque, que toute forme de degré un à valeurs complexes est cohomologue à une unique somme d'une forme holomorphe et d'une conjuguée de forme holomorphe (voir aussi les commentaires qui suivent le théorème 43.2).

Le genre géométrique et l'irrégularité étant des invariants topologiques, il s'ensuit que le genre arithmétique l'est aussi.

36. Plus récemment : comparaisons de structures

La question de l'invariance topologique des plurigenres a résisté beaucoup plus longtemps. En fait ce sont des invariants de la structure différentiable, mais non pas topologique. Plus précisément :

Théorème 36.1. *S'il existe un difféomorphisme préservant l'orientation entre deux surfaces kählériennes compactes lisses, alors leurs plurigenres sont égaux. Il existe des surfaces projectives complexes lisses qui sont homéomorphes, mais qui n'ont pas les mêmes plurigenres.*

La première assertion, répondant positivement à une conjecture de Van de Ven, a été prouvée autour de 1996 par Brussee [25] et Friedman et Morgan [69], en utilisant la toute nouvelle théorie des équations de Seiberg-Witten. La deuxième a été obtenue en 1987 par Donaldson dans [53]. Plus précisément, il a exhibé deux surfaces projectives complexes lisses, l'une rationnelle et l'autre pas, qui sont homéomorphes mais pas difféomorphes. Pour cela il a utilisé les mêmes techniques de « théorie de jauge » qui lui avaient permis auparavant de prouver le théorème 36.3 présenté plus bas, ainsi que le fait qu'il existe des variétés topologiques de dimension 4 qui n'admettent aucune structure différentiable, et d'autres qui en admettent plusieurs.

C'est Milnor qui avait découvert en 1956, dans [114], le premier exemple de variétés différentiables qui sont difféomorphes, mais pas homéomorphes. C'étaient topologiquement des sphères de dimension 7. Peu avant, Moise avait prouvé dans [117] qu'une variété topologique close de dimension 3 admet toujours une structure différentiable, et que celle-ci est unique à difféomorphisme près.

À partir de là s'est beaucoup développée la classification des structures différentiables sur les variétés topologiques de dimension au moins 5, mais la situation en dimension 4 restait mystérieuse. D'une certaine manière, il y avait suffisamment d'espace pour que la complexité structurelle explose par rapport à la situation en dimension 3, mais pas encore suffisamment pour que les problèmes puissent devenir flexibles algébriquement comme en dimension au moins 5 (techniquement, cela veut dire que l'on peut les ramener à des problèmes homotopiques ... qui ne sont pas forcément faciles à résoudre, mais qui sont en principe plus simples que ceux de départ).

C'est en 1982 qu'apparurent presque simultanément les travaux de Freedman et de Donaldson, montrant que les problèmes de classification topologique et différentiable des variétés de dimension 4 étaient radicalement différents. Plus précisément, Freedman montra dans [67] que (les notions utilisées sont expliquées plus bas dans les sections 39 et 40) :

Théorème 36.2. *Toute variété topologique simplement connexe V de dimension 4 est déterminée à ambiguïté de cardinal 2 près, par sa forme d'intersection sur le second groupe d'homologie $H_2(V, \mathbb{Z})$. De plus, toute forme bilinéaire symétrique de déterminant ± 1 apparaît ainsi.*

Par contraste, Donaldson prouva dans [52] que l'existence d'une structure différentiable impose de sérieuses restrictions sur la forme d'intersection de $H_2(V, \mathbb{Z})$:

Théorème 36.3. *Une forme bilinéaire symétrique de déterminant ± 1 peut être réalisée par une variété différentiable close V, orientée et simplement connexe de dimension 4 si et seulement si elle se réduit au signe près, dans une base convenable de $H_2(V, \mathbb{Z})$, au produit scalaire standard d'un groupe $\mathbb{Z}^n$.*

Le lecteur curieux de découvrir d'autres applications des techniques de théorie de jauge de Donaldson puis de Seiberg et Witten à l'étude de la structure des surfaces complexes lisses, pourra consulter le panorama rapide de [11, Chapitre IX]. Pour la situation pré-Seiberg-Witten, une présentation systématique de l'état de l'art a été faite par Friedman et Morgan dans [68].

Partie 3. Les dimensions supérieures

37. Hilbert et sa fonction caractéristique d'un module

Nous avons vu dans la section 29 que, pour définir une notion birationnellement invariante de genre pour les surfaces algébriques, Clebsch, Cayley, Noether et leurs continuateurs considérèrent certaines surfaces passant par le lieu singulier de la surface donnée. Ce sont des analogues des courbes adjointes d'une courbe plane, passant d'une manière contrôlée par les points singuliers de celle-ci (voir la section 23).

En 1890, dans [79], Hilbert commença une étude algébrique systématique des hypersurfaces dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$, passant par un sous-ensemble algébrique fixé V. L'ensemble I des polynômes définissant ces hypersurfaces est alors un *idéal* de l'algèbre A des polynômes associée à l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. C'est à cette occasion que Hilbert prouva :

Théorème 37.1. *Tout idéal dans une algèbre de polynômes est finiment engendré.*

De nos jours, et suite au travail [121] d'Emmy Noether[(20)] sur les anneaux qui satisfont la même propriété, on dit plutôt que *les algèbres de polynômes sont noethériennes.* Pour Emmy Noether, il était important d'élaborer une théorie générale des idéaux en partant de la notion abstraite d'anneau commutatif, afin d'unifier les constructions basées sur les idéaux et les modules en théorie des nombres et en géométrie algébrique.

(20) Il s'agit de la fille de Max Noether.

Mais en 1890, année de la publication de l'article de Hilbert, ces constructions étaient quasiment absentes de la géométrie algébrique, en particulier de la théorie des surfaces. En fait, encore en 1935, dans le traité [170] de Zariski, la notion d'idéal n'est même pas mentionnée ! Comme allait l'expliquer Zariski plus tard, c'est pendant l'écriture de ce livre sur la théorie des surfaces algébriques qu'il se convainquit de la nécessité de raffermir les bases de celle-ci et de rendre ses démonstrations plus rigoureuses, et qu'il se rendit compte que la théorie des idéaux dans les anneaux commutatifs était parfaitement adaptée à cela.

Dans [171], l'un des premiers articles où Zariski utilisa la théorie des idéaux pour l'étude des surfaces complexes, il réexamina la notion de système linéaire de courbes passant par des points-base assignés d'une surface lisse S, certains pouvant être *infiniment voisins* (c'est-à-dire situés sur des courbes créées par éclatements successifs). Il montra comment l'assignation d'un tel ensemble de points infiniment voisins d'un point géométrique donné O de S peut être codée par un idéal de l'anneau des fonctions rationnelles qui n'ont pas de pôles au point considéré : une courbe passe par ces points si et seulement si une fonction la définissant est contenue dans l'idéal. À partir de ce moment-là, il allait devenir important de considérer non seulement les idéaux des fonctions qui s'annulent sur une sous-variété d'une variété donnée, mais *tous* les idéaux : ceux-ci définissent des conditions de passage par des points-base, éventuellement infiniment voisins.

Remarquons en passant que la notion de *nombre idéal* a été introduite par Kummer lors de considérations arithmétiques, et que c'est Dedekind qui en décanta celle d'*idéal* au sens mathématique moderne du terme (voir [45]). Le lecteur curieux de découvrir comment Kummer parlait des nombres idéaux pourra consulter [134].

Les idéaux I définis par des sous-ensembles de l'espace projectif, qui sont ceux considérés par Hilbert dans [79], ont la propriété d'être *gradués* : ils sont engendrés par leurs éléments homogènes, et ils peuvent être donc vus comme sommes directes sur $d \in \mathbb{N}$ des sous-espaces vectoriels I_d constitués des polynômes de degrés d. L'algèbre quotient A/I est elle aussi naturellement graduée, I et A/I étant les exemples fondamentaux de *modules gradués* considérés par Hilbert. Celui-ci définit alors comme mesure de complexité pour un tel module *sa fonction caractéristique* $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, qui associe à chaque $d \in \mathbb{N}$ la dimension du sous-espace vectoriel de gradation d.

Géométriquement, la fonction caractéristique de A/I associe à chaque d, la dimension du système linéaire des sections par les hypersurfaces de degré d de V, augmentée de 1 (cette différence de 1 provenant du fait que des polynômes proportionnels définissent le même membre du système linéaire, et réciproquement ; on utilise alors le fait que la dimension d'un espace vectoriel surpasse de 1 la dimension de l'espace projectif associé).

Le théorème essentiel de [79] concernant cette fonction, appelée de nos jours *fonction de Hilbert* de V ou de A/I, est le suivant :

Théorème 37.2. *Soit χ la fonction caractéristique d'un module gradué de type fini sur A. Alors $\chi(d)$ est un polynôme en d, pour d suffisamment grand. Lorsque $M = A/I$, I étant l'idéal engendré par les polynômes qui s'annulent sur le sous-ensemble algébrique V de $\mathbb{P}$, le degré est égal à la dimension de V.*

L'invariant intrinsèque de base d'une variété, sa dimension, est donc lisible sur sa fonction de Hilbert, définie à partir d'un plongement dans un espace projectif. Ceci laisse présager que l'on pourrait en tirer d'autres invariants indépendants du plongement. C'est ce qu'affirme en fait Hilbert au sujet de possibles généralisations du genre, aux pages 519-520 de [79, §IV][(21)] :

> Soit donnée une courbe ou bien un système de courbes et de points dans l'espace tridimensionnel. Par le théorème prouvé dans la section I, on peut toujours faire passer par cette configuration un nombre fini de surfaces
>
> $$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0$$
>
> de telle manière que toute autre surface qui contient la configuration est donnée par une équation de la forme
>
> $$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m = 0.$$

(21) Je remercie Walter Neumann pour m'avoir traduit cet extrait en Anglais.

> Ces considérations montrent qu'à toute configuration algébrique correspond un module $(F_1, F_2, \dots, F_m)$ et à travers lui, cette fonction caractéristique $\chi(R)$. Cette dernière fonction décrit combien de conditions indépendantes doit satisfaire une surface de degré donné dépassant une certaine borne, pour contenir la configuration donnée. De cette manière, la fonction caractéristique d'une courbe de l'espace sans points doubles, d'ordre R et genre p a la valeur
>
> $$\chi(R) = -p + 1 + rR.$$
>
> [...] En ce qui concerne la généralisation de ces considérations à des espaces de plus grande dimension, le résultat suivant semble important. Soit donnée une configuration algébrique dans un espace de dimension arbitraire et soit la fonction caractéristique associée au module correspondant de la configuration, donnée par :
>
> $$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \chi_2 \binom{R}{2} + \cdots + \chi_d \binom{R}{d},$$
>
> alors le degré de cette fonction caractéristique donne la dimension et le coefficient χ_d donne l'ordre de la configuration algébrique, pendant que les autres coefficients $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{d-1}$ sont en connexion étroite avec les genres de la configuration définis et discutés par M. Noether. La preuve générale de ce fait dépend du passage de $n-1$ variables à n. Comme on le voit, les théorèmes que nous avons donnés dans le cas des courbes dans l'espace tridimensionnel sont en effet confirmés.

Remarquons le fait que cette technique n'impose aucune contrainte sur les éventuels points singuliers de B, et ouvre donc la voie à une définition en dimension arbitraire du genre, indépendante de la nature de ceux-ci. C'est Severi qui proposa une telle définition, en suivant la piste ouverte par Hilbert.

38. Severi et des genres en dimension quelconque

Afin de comprendre l'extrait suivant de [149, pp. 40-41], dans lequel Severi propose une définition du *genre arithmétique* valable en dimension quelconque, il faut savoir que Severi appelle *postulation* $v(\ell)$ le polynôme auquel est égale la fonction de Hilbert $\chi(\ell)$ pour $\ell \in \mathbb{N}$ suffisamment grand (et que l'on appelle *polynôme de Hilbert* de nos jours). Remarquons aussi que Severi utilise une autre base que Hilbert pour le $\mathbb{Z}$-module des polynômes de degré au plus d qui ne prennent que des valeurs entières pour les valeurs entières de la variable.

> Dans S_r [un espace projectif de dimension r] soit V_d une variété algébrique, irréductible ou non, privée de variétés multiples de sa dimension, et soit
>
> $$v(\ell) = k_0 \binom{\ell+d}{d} + k_1 \binom{\ell+d-1}{d-1} + \cdots + k_{d-1}(\ell+1) + k_d$$
>
> la formule de postulation qui lui est associée.
>
> La signification des coefficients $k_0, k_1, \ldots, k_d$ est bien connue lorsque $d = 0, 1, 2$. Dans le cas $d = 0$, le coefficient k_0 n'est rien d'autre que le nombre de points du groupe ; dans le cas d'une courbe irréductible, sans singularités, d'ordre $p_0 + 1$, et de genre p_1, on a (Cayley, Noether, Castelnuovo) :
>
> $$k_0 = p_0 + 1, \ k_1 = -(p_0 + p_1);$$
>
> dans le cas d'une surface, sans singularités, de genre arithmétique p_2, dont la section hyperplane a l'ordre p_0+1 et le genre p_1, on a (Severi) :
>
> $$k_0 = p_0 + 1, \ k_1 = -(p_0 + p_1), \ k_2 = p_1 + p_2.$$
>
> Donc dans le cas d'une courbe il résulte que
>
> $$p_1 = -(k_0 + k_1 - 1);$$
>
> et dans le cas d'une surface
>
> $$p_2 = k_0 + k_1 + k_2 - 1.$$
>
> Ceci étant dit, pour une V_d quelconque vient immédiatement l'idée de définir le *genre arithmétique virtuel* à l'aide de la formule
>
> $$p_d = (-1)^d (k_0 + k_1 + \cdots + k_d - 1).$$
>
> Après cela *la formule de postulation d'une variété V_d quelconque pourra s'écrire ainsi*
>
> $$\begin{cases} v(\ell) = (p_0+1)\binom{\ell+d}{d} - (p_0+p_1)\binom{\ell+d-1}{d-1} + \cdots \\ \cdots + (-1)^{d-1}(p_{d-2}+p_{d-1})(\ell+1) + (-1)^d(p_{d-1}+p_d), \end{cases}$$
>
> où $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_d$ sont les genres arithmétiques virtuels des sections de V avec des espaces $S_{r-d}, S_{r-d+1}, S_{r-d+2}, \ldots, S_r$ respectivement.
>
> Lorsque la [variété] V_d sera irréductible et privée de singularités, le nombre p_d se nommera *genre arithmétique effectif* ou simplement *genre arithmétique*.

> Mais la [dernière relation] resterait une transformation formelle inutile de [la première], si on n'établissait pas que, dans le cas des variétés irréductibles, les genres arithmétiques sont des caractères invariants par rapport aux transformations birationnelles.

Severi propose donc la définition suivante du genre arithmétique d'une variété *lisse* de dimension d, plongée dans un espace projectif, en fonction de son polynôme de Hilbert $v(l)$:

$$p_a = (-1)^d (v(0) - 1). \tag{38.1}$$

Remarquons qu'il n'est même pas clair que cette notion soit intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépende pas du plongement choisi de la variété dans l'espace projectif. Par contre, on obtient ainsi une définition du genre arithmétique pour n'importe quelle sous-variété, même singulière, ou ayant des composantes multiples, de l'espace projectif. Il est important d'avoir une telle notion, car lorsqu'on considère une famille de sous-variétés de $\mathbb{P}^n$, pour des valeurs particulières des paramètres elle contient en général de telles variétés singulières (on pourra penser à la famille de toutes les coniques de $\mathbb{P}^2$, qui contient des unions de deux droites, ainsi que des droites doubles). On a alors le théorème suivant (voir [78, §III.9]) :

Théorème 38.2. *Une famille à un paramètre $f : X \to T$ de sous-variétés d'un espace projectif $\mathbb{P}^n$ est plate (c'est-à-dire que chacun de ses membres $f^{-1}(t)$ est la limite algébrique des autres membres, ou dit autrement, la fermeture de $X \setminus f^{-1}(t)$ dans $\mathbb{P}^n$ est égale à X) si et seulement si les polynômes de Hilbert des membres $f^{-1}(t)$ de la famille sont constants.*

En particulier, *le genre arithmétique est invariant dans une telle famille.*

Mentionnons aussi que si C est une courbe, qui peut avoir des singularités ou des composantes multiples, mais qui est contenue dans une surface projective lisse S (c'est donc un diviseur effectif sur cette surface), alors on peut calculer son genre arithmétique *numériquement* à l'intérieur de la surface S, c'est-à-dire en termes de nombres d'intersection (voir [78, Exercice V.1.3]) :

Théorème 38.3. *Si S est une surface projective lisse de classe canonique K et que C est une courbe algébrique contenue dans S, on a la* formule d'adjonction *suivante :*

$$p_a(C) = 1 + \frac{1}{2} C \cdot (C + K).$$

L'invariance birationnelle du genre arithmétique des variétés projectives *lisses* n'est pas la seule conjecture faite par Severi dans cet article. À la dernière page il conjecture que pour une variété lisse, le genre arithmétique défini par lui est égal à la somme alternée :

$$i_d - i_{d-1} + i_{d-2} - \cdots + (-1)^{d-1} i_1$$

où i_k désigne « *le nombre d'intégrales finies k-uples* », c'est-à-dire la dimension de l'espace des formes rationnelles de degré k sans pôles. Cette deuxième conjecture entraînerait la première, car il est facile de voir par un calcul en coordonnées locales qu'une transformation birationnelle entre variétés lisses envoie toute forme différentielle rationnelle sans pôles en une forme qui reste sans pôles.

La deuxième conjecture de Severi n'allait être prouvée qu'en 1952 par Kodaira [104]. Sa preuve utilise de manière essentielle les développements de la première moitié du XX^e siècle en topologie des variétés de dimension quelconque initiés pas l'article [128] de Poincaré. Tournons-nous maintenant vers ces travaux de Poincaré. Le lecteur curieux d'apprendre comment Severi voyait, juste avant l'article de Kodaira, l'évolution des problèmes initiés par son article de 1909 dont nous avons parlé dans cette section, pourra consulter [150].

39. Poincaré et l'Analysis Situs

Les notions de genre que nous avons examinées jusqu'ici pour les surfaces algébriques, ainsi que celle proposée en toutes dimensions par Severi, sont définies par des moyens algébriques. Aucune d'entre elles ne généralise le point de vue topologique de Riemann, basé sur les courbes tracées sur les surfaces différentiables (voir la section 15).

En 1895, Poincaré se proposa dans [128] de remédier à cela et d'étendre les outils topologiques utilisés en dimensions réelles 2 et 3 aux dimensions quelconques. Comme il l'expliqua dans l'introduction, il était partiellement motivé par des questions de géométrie des surfaces algébriques :

> L'emploi des figures a donc [...] pour but de nous faire connaître certaines relations entre les objets de nos études, et ces relations sont celles dont s'occupe une branche de la Géométrie que l'on a appelée *Analysis situs*, et qui décrit la situation relative des points des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur.
>
> Il y a des relations de même nature entre les êtres de l'hyperespace ; il y a donc une *Analysis situs* à plus de trois dimensions, comme l'ont montré Riemann et Betti.
>
> Cette science nous fera connaître ce genre de relations, bien que cette connaissance ne puisse plus être intuitive, puisque nos sens nous font défaut. Elle va ainsi, dans certains cas, nous rendre quelques-uns des services que nous demandons d'ordinaire aux figures de Géométrie.
>
> Je me bornerai à trois exemples.
>
> La classification des courbes algébriques en genres repose, d'après Riemann, sur la classification des surfaces fermées réelles, faite au point de vue de l'*Analysis situs*. Une induction immédiate nous fait comprendre que la classification des surfaces algébriques et la théorie de leurs transformations birationnelles sont intimement liés à la classification des surfaces fermées réelles de l'espace à cinq dimensions au point de vue de l'*Analysis situs*. M. Picard, dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences, a déjà insisté sur ce point.
>
> D'autre part, dans une série de Mémoires insérés dans le *Journal de Liouville*, et intitulés : *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, j'ai employé l'*Analysis situs* ordinaire à trois dimensions à l'étude des équations différentielles. Les mêmes recherches ont été poursuivies par M. Walther Dyck. On voit aisément que l'*Analysis situs* généralisée permettrait de traiter de même les équations d'ordre supérieur et, en particulier, celles de la Mécanique céleste.
>
> M. Jordan a déterminé analytiquement les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à n variables. M. Klein avait antérieurement, par une méthode géométrique d'une rare élégance, résolu le même problème pour le groupe linéaire à deux variables. Ne pourrait-on pas étendre la méthode de M. Klein au groupe à n variables ou même à un *groupe continu quelconque* ?

> Je n'ai pu jusqu'ici y parvenir, mais j'ai beaucoup réfléchi à la question et il me semble que la solution doit dépendre d'un problème d'*Analysis situs* et que la généralisation du célèbre théorème d'Euler sur les polyèdres doit y jouer un rôle.

Nous voyons que Poincaré parle explicitement du problème de trouver une notion birationnellement invariante de genre pour les surfaces algébriques. Il a bien sûr en tête toutes les définitions données par Riemann pour les courbes algébriques, ce qui le fait s'intéresser en particulier aux intégrales multiples partout finies portées par la surface algébrique (c'est-à-dire aux formes différentielles algébriques sans pôles).

Comme son but est de créer un cadre qui puisse s'appliquer à des problèmes de nature très variée (notons que, dans son introduction, il parle de *géométrie algébrique*, d'*équations différentielles* et de *théorie des groupes*), il développe sa théorie pour des variétés réelles lisses qui ne sont pas nécessairement algébriques. Elles ne sont pas encore définies abstraitement (voir la section 24), mais en tant que sous-variétés d'espaces $\mathbb{R}^n$, décrites soit implicitement, soit paramétriquement (voir [128, §§1–4]).

Riemann considérait des courbes fermées tracées sur ses surfaces. Par analogie, Poincaré considère des sous-variétés fermées d'une variété donnée, c'est-à-dire compactes et sans bord. Riemann regardait plusieurs courbes en même temps, de telle manière qu'elles ne forment pas la frontière complète d'une portion de surface. Comme nous l'avons discuté dans la section 15, grâce à cela il définit la notion d'ordre de connexion. Sa preuve de l'invariance topologique de cette notion est basée sur le fait qu'en rajoutant une courbe fermée supplémentaire, l'ensemble des courbes borde une portion de surface. C'est cette notion, d'*être bord d'une portion de surface*, que Poincaré généralise en toutes dimensions (voir [128, §5]) :

> Considérons une variété V à p dimensions ; soit maintenant W une variété à q dimensions ($q \leqslant p$) faisant partie de V. Supposons que la frontière complète de W se compose de λ variétés continues à q dimensions
>
> $$v_1, v_2, \dots, v_\lambda.$$

> Nous exprimerons ce fait par la notation
>
> $$v_1 + v_2 + ... + v_\lambda \sim 0.$$
>
> Plus généralement la notation
>
> $$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4,$$
>
> où les k sont des entiers et les v des variétés à $q-1$ dimensions, signifiera qu'il existe une variété W à q dimensions faisant partie de V et dont la frontière complète se composera de k_1 variétés peu différentes de v_1, de k_2 variétés peu différentes de v_2, de k_3 variétés peu différentes de la variété opposée [c'est-à-dire, obtenue en changeant l'orientation] à v_3 et de k_4 variétés peu différentes de la variété opposée à v_4.
>
> Les relations de cette forme pourront s'appeler des *homologies*.
>
> Les homologies peuvent se combiner comme des équations ordinaires.

Ces définitions permirent à Poincaré d'étendre aux variétés de dimension quelconque la définition donnée par Riemann de l'ordre de connexion d'une surface (voir [128, §6]) :

> Nous dirons que les variétés [...] d'un même nombre de dimensions et faisant partie de V, sont *linéairement indépendantes*, si elles ne sont liées par aucune homologie à coefficients entiers.
>
> S'il existe $P_m - 1$ variétés *fermées* à m dimensions faisant partie de V et linéairement indépendantes et s'il n'en existe que $P_m - 1$, nous dirons que l'ordre de connexion de V par rapport aux variétés à m dimensions est égal à P_m.
>
> Ainsi se trouvent définis, en ce qui concerne une variété V à m dimensions, $m-1$ nombres [...].
>
> Je les appellerai dans la suite les *nombres de Betti*.

Ultérieurement, comme on l'expliquera plus bas, c'est $P_m - 1$ qu'on appellera m-ème *nombre de Betti*. Même si Poincaré ne cite aucun article de Betti, cela fait probablement référence à [17], où Betti tenta déjà d'étendre en dimension quelconque les idées topologiques bidimensionnelles de Riemann. En fait, Betti avait discuté de cela avec Riemann lui-même, comme on peut le voir par les lettres qu'il a échangées avec Tardy, traduites en Français par Weil dans [166], et discutées par Pont [132, §II.3.2].

Dans le même article, Poincaré s'occupe aussi du problème de la multiformité des fonctions à la manière de Cauchy et Puiseux (voir les sections 13 et 14), ce qui le mène à introduire la notion de *groupe fondamental* d'une variété :

> Soient [...] λ fonctions [F] des coordonnées [...] d'un point M d'une variété [...]. Je ne suppose pas que les fonctions F soient uniformes. Lorsque le point M, partant de sa position initiale M_0, reviendra à cette position, après avoir parcouru un chemin quelconque, il pourra se faire que les fonctions F ne reviennent pas à leurs valeurs primitives.
>
> [...] *L'ensemble de toutes les substitutions que les fonctions F subiront ainsi, quand le point M décrira tous les contours fermés que l'on peut tracer sur la variété V en partant du point initial M_0, formera évidemment un groupe que j'appelle g.* [...]
>
> Si maintenant $M_0AM_1, M_0BM_1, M_0CM_1$ sont trois chemins différents tracés sur V et allant de M_0 à M_1, je conviendrai d'écrire
>
> $$M_0AM_1CM_0 \equiv M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0.$$
>
> [...] Nous sommes ainsi conduits à envisager des relations de la forme
>
> $$k_1C_1 + k_2C_2 \equiv k_3C_3 + k_4C_4,$$
>
> où les k sont des entiers et les C des contours fermés tracés sur V et partant de M_0. Ces relations, que j'appellerai des *équivalences*, ressemblent aux homologies que j'ai étudiées plus haut. Elles en diffèrent :
>
> 1° Parce que, dans les homologies, les contours peuvent partir d'un point initial quelconque ;
>
> 2° Parce que, dans les homologies, on a le droit d'intervertir l'ordre des termes d'une somme.
>
> [...] il est clair que l'on peut imaginer un groupe G satisfaisant aux conditions suivantes :
>
> 1° À chaque contour fermé M_0BM_0 correspondra une substitution S du groupe ;
>
> 2° La condition nécessaire et suffisante pour que S se réduise à la substitution identique, c'est que [le contour fermé soit homotope à un contour constant] ;
>
> 3° Si S et S' correspondent aux contours C et C' et si $C'' \equiv C + C'$, la substitution correspondant à C'' sera SS'.
>
> Le groupe G s'appellera le *groupe fondamental* de la variété V.
>
> Comparons-le au groupe g des substitutions subies par les fonctions F.
>
> Le groupe g sera isomorphe à G [c'est-à-dire, suivant le langage de l'époque, l'image de G par un morphisme de groupes].

> L'isomorphisme pourra être holoédrique [c'est-à-dire un isomorphisme selon nos conventions actuelles].
>
> Il pourra être mérièdrique [c'est-à-dire avoir un noyau non trivial] si un contour fermé M_0BM_0 [qui n'est pas homotope à un contour constant] ramène les fonctions F à leurs valeurs primitives.

De nos jours, on définit le *groupe fondamental* d'un espace topologique connexe par arcs comme ensemble des classes d'homotopie des lacets basés en un point fixé, le produit de deux classes s'obtenant en parcourant à la suite des représentants de ces classes, et en prenant la classe d'homotopie du résultat.

Du point de vue de la théorie des fonctions multiformes qui vivent dessus, les variétés les plus simples sont celles dont le groupe fondamental est trivial. On appela de telles variétés *simplement connexes*, même si pour Poincaré cette expression signifie plutôt *être homéomorphe à une boule ou une sphère.*

Poincaré parle de « substitutions » car à son époque tous les groupes connus étaient des groupes de permutations (de racines de polynômes chez Galois) ou de substitutions (c'est-à-dire de changements de variables). Mais en fait le groupe qu'il définit est abstrait, il ne transforme rien a priori (même si a posteriori il agit sur le *revêtement universel*, c'est-à-dire le seul revêtement non ramifié simplement connexe).

Il s'agit là de *la première définition d'invariant d'un objet géométrique qui ne soit pas un nombre* (comme l'étaient toutes les notions de genre vues précédemment, celle d'ordre de connexion d'une surface ou celle de nombre de Betti).

Au XX$^{\text{e}}$ siècle on allait comprendre qu'il était très important de ne pas associer directement des nombres comme invariants des objets géométriques, mais des objets algébriques, dont ces nombres sont eux-mêmes des invariants. Par exemple, comme nous allons l'expliquer maintenant, les nombres de Betti allaient être vus comme dimensions de *groupes d'homologie* (semble-t-il en suivant une suggestion d'Emmy Noether, comme l'explique Dieudonné dans [50], article à lire en parallèle avec l'article [112] de Mac Lane, qui modère le propos du premier).

40. Les théories homologiques et cohomologiques

Il n'est pas clair a priori que les nombres de Betti d'une variété compacte sont finis ou que son groupe fondamental est finiment engendré. Afin d'éclaircir entre autres ces questions, Poincaré proposa en 1899 dans la suite [129] de l'article [128], une définition alternative des nombres de Betti, inspirée en fait par sa définition d'une notion de *caractéristique d'Euler* pour les variétés quelconques (voir la section 47) :

> J'envisage donc, dans la suite, une variété V fermée, mais pour calculer ses nombres de Betti, je la suppose divisée en variétés plus petites, de façon à former un polyèdre [...].

Dit autrement, en utilisant une expression plus récente, il *discrétisa le problème*, comme on le fait de nos jours en analyse numérique lorsque, pour calculer de manière approchée une fonction solution d'une équation aux dérivées partielles, on utilise les sommets d'une triangulation adéquate du domaine dans lequel on étudie l'équation.

Dans son cas, il discrétisa les sous-variétés à bord en ne considérant que celles qui sont des sommes de faces de dimension fixée k de sa décomposition polyédrale (toutes les faces ayant été orientées arbitrairement une fois pour toutes). On parle de nos jours de *chaînes de dimension k*. Ce sont donc les éléments du groupe abélien libre C_k engendré par les faces orientées de dimension k. Le *bord* d'une chaîne s'obtient en associant à chaque face de dimension k la composant, la somme formelle de ses propres faces de dimension $k-1$.

Parmi les chaînes, on distingue les *cycles*, dont le bord est nul. Ils forment un sous-groupe de C_k. Le *k-ème groupe d'homologie de V à coefficients entiers* (car C_k peut être vu comme le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les faces de dimension k), est par définition le groupe des cycles de dimension k modulo celui des bords des chaînes de dimension $k+1$. On le note :

$$H_k(V;\mathbb{Z}).$$

Son rang est par définition (au sens moderne) *le k-ème nombre de Betti* de V (remarquer le décalage de 1 par rapport à la définition de Poincaré). Le groupe C_k étant de rang fini, le nombre de Betti discrétisé obtenu de la sorte est lui aussi fini. On peut en fait répéter la même définition en considérant des chaînes à coefficients dans d'autres anneaux A. On obtient les *groupe d'homologie de V à coefficients dans A*, notés :

$$H_k(V; A).$$

Les questions suivantes se posent alors immédiatement :

• Pourquoi toute variété admet-elle toujours une telle structure polyédrale

• Est-ce que deux décompositions distinctes fournissent les mêmes nombres de Betti ?

On allait répondre plus tard positivement aux deux questions, mais on allait aussi étendre la théorie précédente à tous les espaces topologiques, même à ceux qui n'admettent pas de décomposition polyédrale. Pour cela, on allait élaborer plusieurs définitions alternatives des groupes d'homologie, qui donnent les mêmes groupes pour les variétés, mais qui s'appliquent à des espaces plus généraux (pour l'histoire de tout cela, on pourra consulter [51] et [93]).

Ces recherches allaient pousser à dégager les axiomes qui font qu'on appelle certains groupes des *groupes d'homologie.* L'objet fondamental est une suite de groupes abéliens :

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow C_k \longrightarrow C_{k-1} \longrightarrow \cdots \tag{40.1}$$

les flèches désignant des morphismes de groupe (associant dans notre cas la somme des faces de dimension $k-1$ à toute face de dimension k) tels que la composée de deux consécutifs s'annule (dans notre cas, cela correspond au fait que *le bord d'un bord est nul*).

On appelle une suite de groupes et de morphismes vérifiant cette condition d'annulation un *complexe de chaînes.* Son *homologie* est alors la suite des groupes :

$$H_k = \ker(C_k \longrightarrow C_{k-1})/\mathrm{im}(C_{k+1} \longrightarrow C_k).$$

Expliquons maintenant pourquoi il est avantageux de travailler avec des groupes d'homologie plutôt qu'avec leurs invariants numériques. Tout d'abord, toute sous-variété W close et orientée, de dimension m, se représente dans $H_m(V, \mathbb{Z})$ par sa *classe fondamentale*, qui peut être obtenue en choisissant une décomposition polyédrale telle que W soit une union de faces, et en prenant la somme de celles-ci avec les orientations données par l'orientation de W. En particulier, si V est de dimension n, elle-même admet une classe fondamentale dans $H_n(V, \mathbb{Z})$. Ceci permet d'une certaine manière de *linéariser* les problèmes de disposition réciproque globale des sous-variétés de V.

Un premier exemple de ce procédé de linéarisation est donné par le *théorème de dualité de Poincaré*, que celui-ci a énoncé de la manière suivante (voir [128, §9]) :

> [...] pour une variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

En fait, il existe une *forme bilinéaire d'intersection* canonique :

$$H_k(V, \mathbb{Z}) \times H_{n-k}(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

pour toute variété fermée orientée de dimension n. On peut la décrire géométriquement de la manière suivante : le produit de deux classes d'homologie s'obtient en choisissant des représentants de ces deux classes s'intersectant transversalement, puis en comptant leur nombre de points d'intersection en tenant compte des orientations. De plus, modulo les sous-groupes de torsion, cette forme d'intersection établit une dualité entre les deux groupes $H_k(V, \mathbb{Z})$ et $H_{n-k}(V, \mathbb{Z})$, ce qui montre qu'ils ont le même rang. En particulier, en travaillant avec des coefficients réels, ce qui a pour effet d'éliminer la torsion, on a :

Théorème 40.2. *Si V est une variété close, orientée, de dimension n, alors on a un isomorphisme canonique*

$$H_{n-k}(V, \mathbb{R}) \simeq H_k(V, \mathbb{R})^*.$$

Si n est pair et que $k = n/2$, on obtient une forme d'intersection non dégénérée sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H_k(V, \mathbb{R})$, qui est symétrique lorsque $n/2$ est pair et alternée lorsque $n/2$ est impair. Dans le premier cas, on obtient alors comme nouvel invariant topologique de V l'indice d'inertie de cette forme d'intersection, qui classifie complètement la forme à isomorphisme près. Dans le deuxième cas, il n'y a pas d'invariant supplémentaire par rapport au nombre de Betti $B_{n/2}$.

Mais comme une forme alternée non dégénérée n'existe que sur les espaces vectoriels réels de dimension paire, on obtient la généralisation suivante du fait prouvé par Riemann, que le premier nombre de Betti d'une surface de Riemann compacte est pair (voir la section 15) :

Théorème 40.3. *Si V est une variété orientable close de dimension $4m + 2$, alors B_{2m+1} est pair.*

Dans le théorème 43.2 de la section 43 nous verrons une autre extension du résultat de Riemann aux variétés kählériennes.

Chaque fois que l'on fabrique un complexe de chaînes dans un contexte suffisamment général, on dit que l'on a une *théorie homologique*. Ces théories fleurirent au vingtième siècle, à partir de ce premier exemple de Poincaré. Mais il fallut attendre les années 1930 pour qu'apparaisse une seconde de nature assez différente, la *cohomologie de De Rham*. Elle est construite à partir des formes différentielles. Il est temps pour nous d'examiner ces dernières d'un peu plus près.

41. Élie Cartan et les formes différentielles

Les courbes tracées sur les surfaces de Riemann servent à y intégrer des formes de degré 1. De même, les (morceaux de) sous-variétés orientées de dimension k d'une variété donnée V servent de support pour le calcul d'intégrales de formes différentielles de degré k (voir [128, §7]).

En fait, lorsque Poincaré écrivait son article [128], la notion de forme différentielle de degré quelconque n'avait pas encore été dégagée. Elle n'allait l'être qu'en 1899 par Élie Cartan, dans [27]. Mais l'habitude de parler du *nombre d'intégrales k-uples indépendantes* plutôt que de *dimension de l'espace vectoriel des formes holomorphes de degré k* allait perdurer un certain temps.

Élie Cartan introduit la notion de *forme différentielle* de degré quelconque, sous le nom d'*expression différentielle*. Voici comment il explique cette notion dans l'introduction de son article :

> Le présent travail constitue une exposition du problème de Pfaff[22] fondée sur la considération de certaines expressions différentielles symboliques, entières et homogènes par rapport aux différentielles de n variables, les coefficients étant des fonctions quelconques de ces variables. Ces expressions peuvent être soumises aux règles ordinaires du calcul, à la condition de ne pas échanger l'ordre des différentielles dans un produit. Le calcul de ces quantités est, en somme, celui des expressions différentielles qui sont placées sous un signe d'intégrale multiple. Ce calcul présente aussi de nombreuses analogies avec le calcul de Grassmann ; il est d'ailleurs identique au calcul géométrique dont se sert M. Burali-Forti dans un Livre récent.

Les règles de calcul *des expressions différentielles qui sont placées sous un signe d'intégrale multiple* ont par ailleurs mis du temps à se dégager (voir les articles historiques [96], [97], [98]). Par exemple[23], Euler explique dans [62, p. 87] que si l'on considère l'isométrie du plan euclidien $(t, v) \to (x, y)$ donnée par les formules (où $|m| \leqslant 1$) :

$$\begin{cases} x = a + mt + v\sqrt{1-m^2} \\ y = b + t\sqrt{1-m^2} - mv \end{cases}$$

alors, en multipliant les différentielles $dx = m\ dt + dv\ \sqrt{1-m^2}$, $dy = dt\sqrt{1-m^2} - m\ dv$, on obtient :

$$dx\ dy = m\sqrt{1-m^2}\ dt^2 + (1-2m^2)dt\ dv - m\sqrt{1-m^2}\ dv^2,$$

formule inutilisable pour le calcul d'une intégrale double de la forme $\iint f(x, y) dx\ dy$ par le changement de variable précédent.

En fait, Euler ne trouve pas de règle de calcul convenable pour effectuer des changements de variables dans une intégrale multiple. De telles règles ne semblent se dégager que dans les années 1890. Par exemple, dans l'article [26, p. 143] paru en 1896, Élie Cartan se sent obligé d'expliquer en note comment on fait un changement de variables dans une intégrale double :

---

(22) C'est-à-dire du problème de résoudre un système d'équations de la forme $\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0$, où les ω_i sont des formes de degré 1, dites aussi *formes de Pfaff*.

(23) Je reprends cet exemple à [97].

> [...] si l'on pose
> $$u = f(\lambda, \mu, \nu, \ldots, \xi), \quad v = \phi(\lambda, \mu, \nu, \ldots, \xi),$$
> $$du = A\ d\lambda + B\ d\mu + \ldots + C\ d\xi, \quad dv = A'\ d\lambda + B'\ d\mu + \ldots + C'\ d\xi,$$
> on a
> $$du\ dv = (A\ d\lambda + B\ d\mu + \ldots + C\ d\xi)(A'\ d\lambda + B'\ d\mu + \ldots + C'\ d\xi),$$
> à condition de remplacer, dans le produit du second membre effectué *sans altérer l'ordre des différentielles* de chaque produit partiel, $d\lambda\ d\lambda$ par 0 et $d\lambda\ d\mu = -d\mu\ d\lambda$ [...].

La règle-clé est que les produits de formes de degré 1 sont *alternés.* Pour bien attirer l'attention sur le fait que ce produit n'est pas commutatif, comme le supposait Euler, on a introduit par la suite la notation $\omega \wedge \phi$ pour le produit de deux formes différentielles ω et ϕ. Si on applique la règle d'antisymétrie au calcul de l'exemple d'Euler, on trouve bien qu'une isométrie préserve les aires !

Dans [27], Cartan définit de manière *purement symbolique* les formes différentielles :

> Étant données n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérons des expressions ω, purement symboliques, se déduisant, au moyen d'un nombre fini de *signes* d'addition ou de multiplication, des n différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ et de certains coefficients fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ces expressions étant, dans le sens ordinaire du mot, *homogènes* en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Comme elles sont purement symboliques, nous nous astreindrons, toutes les fois qu'il y aura un signe d'addition ou de multiplication, à ne pas changer l'ordre des termes ou des facteurs réunis par ce signe.

Il définit aussi la notion de *dérivée* (de nos jours on parle plutôt de *différentielle*) d'une forme de degré un ([27, §12])[24] :

> Étant donnée une expression de Pfaff à n variables
> $$\omega = A_1\ dx_1 + A_2\ dx_2 + \ldots + A_n\ dx_n,$$
> on appelle *expression dérivée* l'expression différentielle du deuxième degré définie par l'égalité
> $$\omega' = dA_1\ dx_1 + dA_2\ dx_2 + \ldots + dA_n\ dx_n.$$
> La propriété fondamentale de cette dérivée est la suivante :

[24] Toujours pour l'étude du problème de Pfaff, Frobenius avait introduit auparavant dans [70] une notion très proche, qui lui est équivalente, sous le nom de *covariant bilinéaire* (voir [98, p. 325]).

> *THÉORÈME. – Si un changement de variable transforme l'expression de Pfaff ω en une expression ϖ, ce même changement de variables transforme l'expression dérivée ω' dans l'expression dérivée ϖ'.*

Ce théorème est ce qui permit ultérieurement de voir l'opération de dérivation comme *intrinsèque*, s'appliquant aux formes définies sur des variétés abstraites, indépendamment des systèmes de coordonnées. Notons que dans [27], Cartan ne définit l'opération de dérivation que pour les formes de degré un. Peu après, en 1901, il l'étendit dans [28] aux formes de degré quelconque, et il démontra le théorème-clé suivant :

> *Si ω désigne une expression de Pfaff quelconque, ω' son expression dérivée (covariant bilinéaire), l'expression du troisième degré dérivée de ω' est identiquement nulle.*

Avec le recul historique, on voit là le point de départ de *la cohomologie de de Rham* : si V est une variété différentiable, son k-ème *groupe de cohomologie de de Rham*, noté $H^k(V, \mathbb{R})$, est égal à l'espace des formes différentielles de degré k de dérivée nulle, modulo celles qui sont la dérivée d'une forme de degré $k-1$. Examinons à présent la raison pour laquelle ces groupes sont dits *de cohomologie* et celle pour laquelle le nom de de Rham leur est attaché.

42. De Rham et sa cohomologie

Dans les articles de Cartan dont nous venons de parler, les opérations sur les formes différentielles ne servent que pour des études *locales* de résolution de systèmes de Pfaff. Ce n'est que dans les années 1920 que Cartan s'intéressa à des problèmes concernant le comportement global des formes différentielles, et ce, sur des groupes de Lie (qui sont à la fois des groupes et des variétés différentiables).

En particulier, dans [29], Élie Cartan proposa les conjectures suivantes au sujet de l'intégration dans les variétés sous-jacentes aux groupes de Lie :

> Si une intégrale de différentielle exacte[(25)] d'ordre p, définie dans l'espace clos $\mathcal{E}$, est nulle pour tout domaine d'intégration

[(25)] De nos jours on dirait *fermée*, c'est-à-dire de différentielle nulle.

> fermé à p dimensions, elle résulte, par application de la formule de Stokes généralisée, d'une intégrale multiple d'ordre $p-1$ (définie et régulière dans tout l'espace).
>
> Si l'on considère h variétés fermées à p dimensions entre lesquelles n'existe aucune homologie, il existe h intégrales de différentielles exactes telles que le tableau carré des valeurs de ces intégrales étendues aux h variétés ait un déterminant différent de zéro.

Peu après, de Rham, jeune mathématicien suisse, démontra dans sa thèse que ces conjectures étaient en fait vraies dans n'importe quelle variété fermée, et pas seulement dans les groupes de Lie. Voici comment il décrivit bien des années plus tard, dans [138], le contexte de son travail :

> À cette époque, travaillant en vue d'une thèse sur l'Analysis Situs, j'avais étudié les mémoires de Poincaré, et pendant un séjour d'études à Paris, où j'ai bénéficié des précieux conseils et encouragements d'Henri Lebesgue, je m'étais familiarisé avec le calcul différentiel extérieur en suivant un cours d'Élie Cartan et en lisant ses Leçons sur les invariants intégraux. Les rares mathématiciens qui s'occupaient alors de topologie ne connaissaient guère le calcul différentiel extérieur. Ces circonstances ont fait que j'ai eu la chance de donner la première démonstration de ces conjectures que, avec sa modestie et sa gentillesse bien connue, Élie Cartan a appelé d'abord propositions de Poincaré et ensuite théorèmes de de Rham.
>
> En réalité, Poincaré n'a pas énoncé ces propositions. [...] Poincaré n'introduit pas, même sous un autre nom, la notion de différentielle extérieure. [...] Il ne mentionne pas la formule générale de Stokes. Cependant, dans ses Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann, dont la première édition a paru en 1928, E. Cartan donne le nom de théorème de Poincaré au fait que la différentielle seconde d'une forme différentielle est toujours nulle, ce qui est d'ailleurs trivial et résulte immédiatement de la définition de cette différentielle extérieure. La réciproque, valable dans l'espace euclidien, n'est pas triviale, et dans ses Leçons sur les invariants intégraux, parues en 1922, E. Cartan démontre le théorème et sa réciproque sans mentionner Poincaré ni personne d'autre. Et aujourd'hui, c'est cette réciproque qui est assez couramment appelée lemme de Poincaré. Or ces propositions sont

> parfaitement énoncées et démontrées dans des travaux *de Volterra*[26] datant de 1889 ; on y trouve aussi la formule de Stokes sous sa forme générale, ainsi d'ailleurs que - sous un autre nom il est vrai - la notion de forme harmonique dans l'espace euclidien. Il est clair que Cartan n'a pas eu connaissance de ces travaux, sinon il n'aurait pas manqué de les citer et de rendre justice à Volterra.

La formule-clé qui permet de comprendre ces considérations sur le lien entre la notion d'homologie introduite par Poincaré et les formes différentielles est bien la *formule de Stokes généralisée*. De nos jours on peut l'écrire très simplement de la manière suivante :

Théorème 42.1. *Si V est une variété de dimension n, compacte, orientée, à bord orienté par la règle de* la normale sortante d'abord*, que ω désigne une forme différentielle de degré $n-1$ sur V, alors, en désignant par ∂V le bord de V et $d\omega$ la différentielle de ω, on a :*

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega.$$

Notons un grand avantage de la notation $d\omega$ pour la différentielle de ω : elle permet de parler des propriétés *de l'opérateur d*, la notation avec apostrophe rendant plus difficile de se concentrer sur les propriétés de ' ! Ainsi, le théorème de Cartan cité en dernier dans la section 41 peut se récrire :

$$d \circ d = 0.$$

Par conséquent, si on note par Ω^k l'espace vectoriel des formes lisses de degré k, on obtient un complexe de chaînes :

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{k-1} \longrightarrow \Omega^k \longrightarrow \Omega^{k+1} \longrightarrow \cdots \qquad (42.2)$$

donc une théorie homologique, comme expliqué dans la section 39, à la suite de la formule (40.1). Remarquons que, à la différence de cette dernière formule, ici les indices vont croissant dans le sens des flèches. Pour cette raison, on parle plutôt de *cohomologie*. Cela fait aussi référence au fait que les *groupe de cohomologie de de Rham*

---

[26]Voir en particulier : *Opere matematiche.* Vol. I, P. 407 et 422.

$H^k(V, \mathbb{R})$ sont *duaux* des groupes d'homologie $H_k(V, \mathbb{R})$. En effet, les théorèmes de de Rham peuvent se reformuler de la manière suivante :

Théorème 42.3. *La forme bilinéaire canonique*

$$H^k(V, \mathbb{R}) \times H_k(V, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

donnée par l'intégration d'une forme sur un cycle (et qui bien définie, par la formule de Stokes généralisée) est non dégénérée.

Donc $H^k(V, \mathbb{R})$ est canoniquement isomorphe au dual de $H_k(V, \mathbb{R})$. En combinant cela avec le théorème de dualité de Poincaré 40.2, on obtient une identification canonique :

$$H_{n-k}(V, \mathbb{R}) \simeq H^k(V, \mathbb{R}) \tag{42.4}$$

En particulier, sur une variété orientée de dimension 4, la forme d'intersection sur $H_2(V, \mathbb{R})$ se transporte en une forme d'intersection sur $H_2(V, \mathbb{R})$. C'est elle qu'a étudiée Hodge dans sa preuve du théorème 35.1, esquissée dans la section 35.

Pour beaucoup plus de détails sur le développement des théories homologiques et cohomologiques, on pourra consulter les ouvrages historiques [51] et [93].

43. Hodge et les formes harmoniques

En fait, Riemann ne travaillait pas sur ses surfaces avec des formes fermées de degré 1 quelconques, mais avec des formes qui s'écrivent $f(z)dz$ lorsqu'on fixe une coordonnée locale holomorphe z, la fonction $f(z)$ étant holomorphe. La condition d'holomorphie sur $f(z)$ se traduit par le fait que ses parties réelles et imaginaires sont *harmoniques* (c'est-à-dire que leur laplacien par rapport à z s'annule) et *conjuguées* (c'est-à-dire qu'elles vérifient le système de Cauchy-Riemann).

Hodge réussit à étendre cette théorie en dimensions plus grandes, mais cette fois-ci non pas sur une variété algébrique, mais sur une variété munie d'une métrique riemannienne, car c'est cette dernière structure qui permet de généraliser à la fois les notions de conjugaison de formes et d'opérateur laplacien, donc d'harmonicité. Il présenta systématiquement sa théorie dans le traité [89] de 1941. Son théorème fondamental est le suivant :

Théorème 43.1. *Soit X une variété différentiable close, orientée, munie d'une métrique riemannienne. Alors chaque classe de cohomologie de de Rham contient une unique forme harmonique.*

Voici ce que raconte à ce sujet de Rham dans [139] :

> À propos du théorème assurant l'existence, sur une variété close à n dimensions, d'une p-forme fermée ayant des périodes assignées, Hodge s'est demandé si l'on ne pouvait pas imposer à cette p-forme des conditions qui, pour $p = 1$, sur une surface de Riemann close, se réduisent à la condition que la 1-forme soit harmonique, plus précisément, qu'elle soit localement la différentielle d'une fonction harmonique. Il était en effet bien connu que, sur une telle surface, il existe une 1-forme et une seule, ayant les périodes assignées, qui est localement la différentielle d'une fonction harmonique ; elle est la partie réelle d'une différentielle abélienne de première espèce.
>
> Pour pouvoir formuler de telles conditions, sur une variété à $n > 2$ dimensions, il fallait introduire une structure plus précise que celle de variété différentielle. Guidé par les travaux de Volterra sur les fonctionnelles harmoniques, Hodge a vu qu'il convenait simplement de munir la variété d'une métrique riemannienne. Celle-ci permet de définir l'opérateur $*$ qui associe à toute p-forme ω la $(n-p)$-forme $*\omega$, dite adjointe à ω, dont la valeur sur un $(n-p)$-vecteur est égale à la valeur de ω sur le p-vecteur orthogonal de même norme.
>
> Sur une surface de Riemann, la structure analytique complexe détermine une métrique riemannienne seulement à un facteur près, $ds^2 = \lambda\ |dz|^2$, $z = x + iy$ étant une coordonnée complexe locale. Mais l'adjointe à une 1-forme $\alpha = a\ dx + b\ dy$, qui est $*\alpha = a\ dy - b\ dx$, ne dépend pas de ce facteur λ et l'on voit que α est localement la différentielle d'une fonction harmonique si et seulement si α et $*\alpha$ sont fermées.
>
> Aussi Hodge, toujours inspiré par les travaux de Volterra, pose la définition suivante : dans un espace de Riemann, *une p-forme ω est dite harmonique si ω et $*\omega$ sont fermées.*

Les applications aux variétés complexes lisses, dont nous avons vu un exemple dans la section 35, se faisaient en considérant une métrique riemannienne auxiliaire, adaptée en un certain sens à la structure complexe. La propriété-clé de cette métrique était d'être *kählérienne* (c'est-à-dire que la forme différentielle de degré 2 associée est fermée). Les variétés kählériennes étant restées fondamentales en géométrie algébrique et différentielle, j'ai choisi de transcrire ici ce que raconte Weil à ce sujet dans [166] :

> Dans son mémoire aujourd'hui classique sur les variétés hermitiennes [36], Chern avait marqué en passant l'intérêt qui s'attache, du point de vue de la géométrie différentielle, aux métriques hermitiennes « sans torsion », et il avait cité à ce sujet (p. 112) le travail assez peu connu de Kähler [95] où celui-ci avait le premier introduit cette sorte de structure. [...] L'étude du livre de Hodge ne tarda pas à faire apparaître l'importance de ces métriques « sans torsion », ou, comme je proposai de dire, kählériennes.

Expliquons l'une des conséquences du fait qu'une métrique riemannienne sur une variété complexe X est kählérienne. La structure complexe permet d'écrire de manière unique toute forme différentielle α de degré m à coefficients complexes comme une somme :

$$\alpha = \sum_{p+q=m} \alpha^{p,q},$$

où $\alpha^{p,q}$ s'exprime dans n'importe quel système de coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n)$ comme une somme de monômes différentiels du type :

$$a(z_1, \dots, z_n) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge \overline{dz_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz_{j_q}}$$

(on dit que $\alpha^{p,q}$ est *de type* (p, q)).

Eh bien, *lorsque la métrique est kählérienne*, si on applique cette décomposition à une forme harmonique, alors *chacune des formes $\alpha^{p,q}$ est encore harmonique.* Cela entraîne que l'on a une décomposition canonique :

$$H^m(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(X, \mathbb{C}),$$

l'isomorphisme du théorème 43.1 de Hodge envoyant chaque sous-espace $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ sur l'espace des formes harmoniques de type (p, q). Comme l'espace vectoriel complexe $H^m(X, \mathbb{C})$ est le complexifié de $H^m(X, \mathbb{R})$, il est invariant par conjugaison. On montre que les espaces $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ et $H^{q,p}(X, \mathbb{C})$ sont conjugués donc, en particulier, ils ont la même dimension. En notant par $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ le (p, q)-*ème nombre de Hodge*, on obtient les égalités suivantes :

$$B_m = \sum_{p+q=m} h^{p,q}$$
$$h^{p,q} = h^{q,p}.$$

Une conséquence immédiate est :

Théorème 43.2. *Pour une variété kählérienne, les nombres de Betti en dimension impaire sont pairs.*

Ce théorème constitue une généralisation du fait démontré par Riemann (voir la section 15) que le premier nombre de Betti d'une surface de Riemann fermée (c'est-à-dire compacte et sans bord) est pair.

Un simple calcul en coordonnées locales montre que les formes harmoniques de type $(p, 0)$ *sont exactement les formes holomorphes de degré p*. Par exemple, pour les courbes complexes lisses, le genre p est égal à $h^{1,0}$; pour les surfaces projectives complexes lisses, le genre géométrique p_g est égal à $h^{2,0}$ et l'irrégularité $p_g - p_a$ est égale à $h^{1,0}$.

De ce point de vue, *les nombres de Hodge d'une variété kählérienne sont une généralisation du genre d'une surface de Riemann.* Par contre, à la différence du cas des surfaces de Riemann, dès la dimension complexe 2, ils ne sont définis que pour les surfaces complexes qui admettent une métrique kählérienne. En fait (pour plus de détails, on pourra consulter [151, Chap. VIII]) :

- Pour chaque dimension $n \geqslant 2$, il existe des variétés complexes compactes lisses qui n'admettent pas une telle métrique (par le théorème 43.2, une telle métrique n'existe pas si leur premier nombre de Betti est impair ; un théorème profond, dont on trouvera une preuve dans [11, §IV.3], montre qu'une surface complexe lisse admet une métrique kählérienne si et seulement si son premier nombre de Betti est pair).
- Pour chaque dimension $n \geqslant 2$, il existe des variétés complexes compactes lisses qui admettent des métriques kählériennes, mais qui ne sont pas projectives (voir mes commentaires sur les surfaces K3 à la fin de la section 32).

En 1950, Hodge présenta une vue d'ensemble de sa théorie dans [90]. Entre autres, c'est là qu'il formula sa célèbre conjecture, toujours ouverte, ayant comme but de caractériser dans $H_{2k}(X, \mathbb{Q})$ le sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les classes fondamentales des sous-variétés algébriques de dimension complexe k, éventuellement singulières. Légèrement reformulée par la suite afin d'éviter des contre-exemples simples, la conjecture s'énonce ainsi : *l'espace recherché est envoyé isomorphiquement par l'identification* 42.4 *sur le sous-espace* $H^{n-k,n-k}(X, \mathbb{C}) \cap H^{2(n-k)}(X, \mathbb{Q})$ *de* $H^{2(n-k)}(X, \mathbb{Q})$.

Le lecteur curieux de découvrir le visage actuel de la théorie de Hodge des variétés algébriques pourra étudier le traité [157] de Voisin.

44. Weil et ses conjectures

Nous avons vu dans la section 26 que dès ses débuts, Weil était très intéressé par les analogies entre arithmétique et géométrie algébrique classique, sur le corps des nombres complexes. Son article le plus célèbre dans cette direction est probablement [161], paru en 1949, dans lequel il proposa quelques liens conjecturaux entre le monde des nombres complexes et celui des corps finis. Les voici :

> Ceci, et d'autres exemples que nous ne pouvons discuter ici, semblent appuyer les énoncés conjecturaux suivants, que l'on sait être vrais pour les courbes, mais que je n'ai pas été capable jusqu'à présent de prouver pour des variétés de dimension plus grande.
>
> Soit V une variété sans points singuliers, de dimension n, définie sur un corps fini k ayant q éléments. Soit N_ν le nombre de points rationnels de V sur l'extension k_ν de k de degré ν. Alors nous avons
>
> $$\sum_1^\infty N_\nu U^{\nu-1} = \frac{d}{dU} \log Z(U),$$
>
> où $Z(U)$ est une fonction rationnelle en U, satisfaisant une équation fonctionnelle
>
> $$Z(\frac{1}{q^n U}) = \pm q^{n\chi/2} U^\chi Z(U),$$
>
> avec χ égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de V (nombre d'intersection de la diagonale avec elle-même sur le produit $V \times V$).

De plus, nous avons :

$$Z(U) = \frac{P_1(U)P_3(U)\cdots P_{2n-1}(U)}{P_0(U)P_2(U)\cdots P_{2n}(U)},$$

avec $P_0(U) = 1-U,\ P_2(U) = 1-q^nU$, et, pour $1 \leqslant h \leqslant 2n-1$:

$$P_h(U) = \prod_{i=1}^{B_h}(1-\alpha_{h_i}U)$$

où les α_{h_i} sont des entiers algébriques de valeur absolue $q^{h/2}$.

Finalement, appelons les degrés B_h des polynômes $P_h(U)$ les *nombres de Betti* de la variété V ; la caractéristique d'Euler-Poincaré χ est alors exprimée par la formule usuelle

$$\chi = \sum_h (-1)^h B_h.$$

Les indices disponibles semblent suggérer que, si $\overline{V}$ est une variété sans points singuliers, définie sur un corps K de nombres algébriques, les nombres de Betti des variétés $V_{\mathfrak{p}}$, déduites de $\overline{V}$ par réduction modulo un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans K, sont égaux aux nombres de Betti de $\overline{V}$ (considérée comme une variété sur les nombres complexes) au sens de la topologie combinatoire, pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$, à l'exception d'un nombre fini.

Ces conjectures posaient en particulier la question de développer des théories d'homologie et cohomologie pour les variétés définies sur des corps quelconques. Ce fut un programme de recherche important jusque dans les années 1970, guidé entre autres par Grothendieck, et finalisé par Deligne. On pourra partir du texte [91, Chap. XIII] de Houzel pour explorer leur préhistoire, et du texte [78, App. C] de Hartshorne pour explorer l'histoire de leur démonstration.

Nous ne parlerons plus des conjectures de Weil, mais j'ai voulu passer par là afin de présenter l'une des raisons essentielles du développement grandissant à partir des années 1950 du souci de développer la géométrie algébrique, ses théories et théorèmes essentiels, *sur tout corps* de coefficients, et même plus généralement sur tout anneau de coefficients. Un tel théorème essentiel de la géométrie algébrique classique est celui de Riemann-Roch, dont nous avons parlé dans la section 17 dans le cas des courbes.

45. Serre et l'esprit du théorème de Riemann-Roch

Dès le début du développement de la théorie des surfaces algébriques, les géomètres tentèrent de prouver une généralisation du théorème de Riemann-Roch sur les courbes algébriques (voir le texte [170, Chap. IV] de Zariski, ainsi que l'article [74] de Gray). Max Noether formula une telle généralisation en 1886, dans [125]. Mais il ne réussit à prouver qu'une inégalité (j'utilise les notations et les explications de [31, §§7 et 35]) :

Théorème 45.1. *Considérons une surface algébrique de genre numérique p_n. Soit un système linéaire $|C|$ complet et spécial (c'est-à-dire contenu dans le système canonique $|K|$), de genre π (c'est le genre de la courbe C), de degré n (c'est le nombre d'intersections variables de deux courbes générales du système) et de dimension r. Désignons par r_1 la dimension du système résiduel $|K-C|$. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$r_1 \geqslant p_n - (\pi - n + r).$$

En dépit de nombreux efforts, il resta longtemps difficile d'interpréter la différence des deux membres de l'inégalité. De plus, il n'était même pas clair comment conjecturer un théorème analogue en dimensions plus grandes. Cela semblait devoir concerner les dimensions de systèmes complets $|H|$ et $|K - H|$ sur une variété projective, H désignant une hypersurface de celle-ci, ainsi que le genre arithmétique de la variété, mais il était difficile de dire plus.

Finalement, Serre réussit à formuler une conjecture générale en 1953, comme il s'ensuit de l'extrait suivant de la lettre [148] envoyée à Armand Borel :

> Je suis maintenant armé pour parler du théorème de Riemann-Roch. On a une variété *compacte* X, et un diviseur D sur X. Il s'agit de dire ce qu'on peut sur la dimension $l(D)$ de l'espace des fonctions f, méromorphes sur X, telles que $(f) \succ -D$. L'entier $l(D)$ est fini, comme on va le voir, et ne dépend que de la *classe* de D (pour l'équivalence linéaire, où un diviseur est dit ~ 0 si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe).
>
> On sait qu'un diviseur définit un espace fibré principal de fibre $\mathbb{C}^*$, qui caractérise entièrement sa classe. En ajoutant un 0 à

> chaque fibre, on obtient un fibré à fibre vectorielle de dimension 1, E_D, et on voit tout de suite que les f telles que $(f) \succ -D$ correspondent biunivoquement aux *sections* de E_D. Convenons de noter $H^q(D)$ le groupe de cohomologie H^q de X, à coef. dans le faisceau des germes de sections de E_D, et $h^q(D)$ la dimension de $H^q(D)$. On a donc :
>
> $$l(D) = h^0(D), \text{ ce qui montre la finitude de } l(D).$$
>
> Pour la suite, il est important de décrire directement le faisceau des germes de sections de E_D (notons-le F_D), à partir de D : c'est tout simplement le sous-faisceau du faisceau de toutes les fonctions méromorphes sur X formé des germes de fonctions qui sont (localement) $\succ -D$. En un point non situé dans D, c'est donc le faisceau des germes de fonctions holomorphes ; de toutes façons, c'est un faisceau localement libre de dimension 1 (sur $\mathcal{O}_X$).
>
> Je noterai $\chi(D)$ l'entier $h^0(D) - h^1(D) + ... + (-1)^n h^n(D)$, c'est *la caractéristique d'E-P. de* D (ou plutôt du faisceau F_D). Bien entendu, au point où j'en suis, je ne sais pas encore qu'elle est définie, c'est-à-dire que les $h^q(D)$ sont *finis*. Riemann-Roch tel que je le conçois me paraît être ceci :
>
> *$\chi(D)$ est défini pour tout diviseur D, ne dépend que de la classe de cohomologie x du diviseur D, et peut se calculer à partir de x et des classes de Chern $C_2, \dots, C_{2n}$ de X par une formule* :
>
> $$\langle P(x, C_2, \dots, C_{2n}), X\rangle = \chi(D),$$
>
> *où P est un polynôme de degré $2n$, ne dépendant que de n.*
>
> L'énoncé précédent n'a pas encore été démontré dans toute sa généralité. Mais j'ai bon espoir, au moins pour les variétés algébriques.

Dans la suite de la lettre, Serre démontra le théorème de Riemann-Roch sous la forme qu'il proposait, dans les cas des courbes et des surfaces. Voici son énoncé du théorème pour les surfaces, sous une hypothèse restrictive qui lui permit d'indiquer à Borel les idées principales de la preuve :

> Soit X une surface projective lisse. Si $\chi(0)$ est défini et égal à $p_a + 1$, et si toutes les composantes irréductibles du diviseur D sont sans points multiples, on a la formule :
>
> $$\chi(D) = [...] = p_a + 1 + D \cdot (D - K)/2.$$
>
> [...] Au cas où la surface est kählérienne,
>
> $$\chi(D) = \langle x \cdot (C_2 + x)/2 + (C_4 + C_2 \cdot C_2)/12, X\rangle.$$

Dans la section suivante nous allons parler brièvement des nouveaux points de vue présents dans cette lettre. Mais expliquons d'abord pourquoi le théorème précédent est une généralisation de l'inégalité 45.1. Nous n'allons le faire que dans le cas où le système linéaire $|C|$ est sans points-base. Alors, en comparant le langage de Castelnuovo et Enriques à celui de Serre :

- la dimension r du système complet $|C|$ est égale à $h^0(C) - 1$;
- la dimension r_1 du système complet résiduel $|K - C|$ est égale à $h^0(K - C) - 1$, qui est égale à $h^2(C) - 1$, par un théorème de dualité que Serre prouva à la même époque, et qui affirme que $H^2(C)$ est canoniquement isomorphe au dual de $H^0(K - C)$;
- le genre numérique p_n est le genre arithmétique p_a ;
- le degré n de C est égal à l'auto-intersection $C \cdot C$ de la courbe C sur la surface ;
- le genre π de C peut être calculé par la formule d'adjonction 38.3.

En mettant ensemble tous ces ingrédients, on voit que l'inégalité 45.1 est équivalente à :

$$h^0(C) + h^2(C) \geqslant p_a + 1 + C \cdot (C - K)/2.$$

Mais ceci est bien une conséquence de l'égalité prouvée par Serre, puisque celle-ci affirme que :

$$h^0(C) + h^2(C) - (p_a + 1 + C \cdot (C - K)/2) = h^1(C) \geqslant 0.$$

On voit donc que *la cohomologie des faisceaux permet enfin d'interpréter la différence des deux membres de l'inégalité* 45.1 : c'est la dimension de $H^1(C)$, premier groupe de cohomologie du faisceau des sections holomorphes du fibré E_C. C'est l'un des premiers succès de la théorie naissante de cohomologie des faisceaux. On comprend mieux que les italiens aient eu du mal à interpréter cette différence !

46. Les nouveaux ingrédients

Les ingrédients tout récents pour l'époque qui apparaissent dans la lettre de Serre à Borel sont : *les fibrés vectoriels complexes et leurs classes de Chern, les faisceaux de leurs sections holomorphes et leurs groupes de cohomologie.*

Je vais expliquer brièvement de quoi il s'agit, en essayant de relier cela aux objets discutés jusqu'à présent.

Les fonctions peuvent se représenter géométriquement par leur graphe, qui vit dans le produit cartésien de l'espace-source et l'espace-but. Mais cette construction ne s'applique pas pour des « fonctions » qui prennent des valeurs dans des espaces différents en des points différents. Tel est le cas par exemple des formes différentielles sur une variété.

La solution pour construire un analogue du graphe est alors de considérer un espace-but différent pour chaque point de l'espace-source, et de mettre tous ces espaces ensemble, comme les fibres dans la tige d'un plante. On obtient alors ce qu'on appelle un *espace fibré*. Lorsque les fibres sont des espaces vectoriels de même dimension, on parle de *fibré vectoriel*. Si, de plus, la dimension vaut 1, on parle de *fibré en droites*. Le graphe d'une fonction en ce sens généralisé est une sous-variété de l'espace fibré qui contient dans chaque fibre correspondant à un point s de l'espace-source S l'image de s par la « fonction ». Un tel graphe est appelé une *section* du fibré, car c'est ce que l'on obtient par exemple en sectionnant la tige d'une plante transversalement aux fibres.

Un polynôme ou une fraction rationnelle unitaires en une variable sont déterminés de manière unique par leurs racines et pôles, vus comme somme formelle à coefficients entiers de points de la droite complexe. Ce fait se généralise aux sommes formelles à coefficients entiers d'hypersurfaces d'une variété algébrique lisse, appelées *diviseurs*, pourvu que l'on admette des fonctions au sens généralisé précédent. En fait, comme l'explique Serre, chaque diviseur D engendre canoniquement un espace fibré en droites E_D, muni d'une section dont le lieu des zéros et des pôles est exactement D ! Un diviseur D quelconque engendre alors un système linéaire complet, qui est formé par les lieux de zéros (comptés avec multiplicités) de leurs sections régulières.

On réussit à comprendre enfin géométriquement un problème qu'avaient les géomètres algébristes qui tenaient à ne travailler qu'avec des systèmes linéaires : il y a des fibrés en droites qui n'admettent pas de sections régulières globales. Ils ne peuvent donc être décrits que comme espaces E_D avec D contenant des coefficients strictement négatifs. Si on ne sait penser qu'en termes de systèmes linéaires, ce doit être déroutant de sentir la présence d'un système linéaire qui ne devient « visible » qu'en prenant ses multiples (on pourra penser aux considérations de [31] retranscrites dans la section 31).

Revenons à un fibré vectoriel quelconque. On peut définir des notions de compatibilité entre la structure de l'espace fibré et celle de sa *base* (l'espace-source de ses sections). On peut ainsi parler de *fibré holomorphe* et de *sections holomorphes* ou *méromorphes.* Comme on vient de l'expliquer, une telle section n'existe pas nécessairement globalement, mais il en existe toujours pléthore localement. Afin de pouvoir penser les problèmes de *passage du local au global*, on a introduit pour chaque ouvert de la base, l'espace des sections holomorphes audessus de cet ouvert. C'est l'exemple fondamental de *faisceau* d'espaces vectoriels : la donnée d'un espace vectoriel de « sections » pour chaque ouvert d'un espace topologique, tel que l'on puisse restreindre les sections à un ouvert plus petit et que l'on puisse recoller de manière unique des sections données pour chaque ouvert d'un recouvrement, lorsque leurs restrictions aux intersections de ces ouverts coïncident.

Le lecteur intéressé par les développements historiques ayant mené à cette notion de faisceau pourra consulter le travail récent [40] de Chorlay.

En reformulant des idées de Leray, qui avait aussi formulé en premier, sous une forme un peu différente, la notion de faisceau, Henri Cartan(27) avait expliqué vers 1950 comment on pouvait associer des *groupes de cohomologie* à chaque faisceau en groupes abéliens. C'était clair qu'il fallait les appeler des groupes de *cohomologie*, car lorsque l'on prenait comme faisceau celui des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$, on obtenait exactement les groupes de cohomologie de de Rham. Une explication élégante de cela a été donnée en 1947 par Weil dans sa lettre [165] à Henri Cartan.

(27)Il s'agit du fils d'Élie Cartan.

En fait, les groupes de cohomologie de de Rham interviennent aussi dans la lettre de Serre, via les *classes de Chern*. Ces dernières sont des classes de cohomologie de de Rham de degrés pairs canoniquement associées à tout fibré vectoriel complexe. Elles ont été introduites par Chern dans [39], comme mesure de l'éloignement d'un fibré à un fibré trivial. Comme ce sont des classes de cohomologie, on peut les additionner et les multiplier, cela a donc un sens de parler de polynôme en certaines classes de cohomologie.

Lorsque l'on a un fibré en droites sur la variété V, on n'a qu'une seule classe de Chern $C_1 \in H^2(V, \mathbb{Z})$, c'est la classe duale de la classe d'homologie du diviseur défini par une section méromorphe du fibré. Plus généralement, l'une des interprétations des classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe est comme classes duales des classes d'homologie des lieux de zéros et de pôles de sections méromorphes du fibré donné et de fibrés construits à partir de celui-ci par certaines opérations algébriques.

On comprend de ce qui précède, que le début des années 1950 était une période d'intense reformulation du langage de la géométrie en général. C'est ce qui rend difficile de nos jours de pratiquer des va-et-vient entre les anciens (pré-1950) et les modernes (post-1950).

La recherche d'une généralisation du théorème de Riemann-Roch, et en même temps d'une démonstration des conjectures de Severi dont nous avons parlé dans la section 38 jouèrent un rôle important pour mettre à l'épreuve les nouveaux outils cohomologiques. Ainsi, apparaissaient coup sur coup plusieurs articles importants sur le sujet, de Zariski [174] , Kodaira et Spencer [104], [103], [106], et enfin Hirzebruch [82] et [83], qui conjectura une formule explicite à la Serre en termes de classes de Chern, puis la démontra. Mais avant d'expliquer cela dans la section 48, analysons un peu plus la notion de *caractéristique d'Euler-Poincaré*, devenue centrale dans l'approche de Serre du théorème de Riemann-Roch.

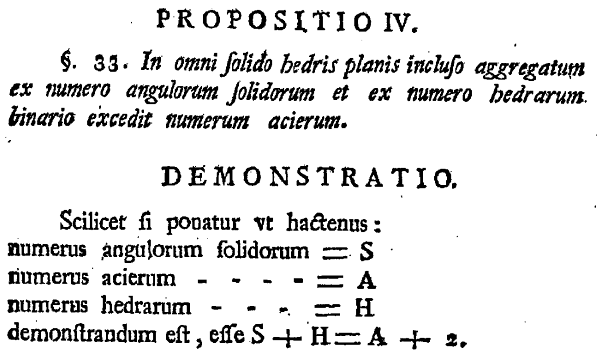
47. Genre versus caractéristique d'Euler-Poincaré

En 1758, Euler publia dans [60] le théorème suivant :

Théorème 47.1. *Si S désigne le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces d'un polyèdre convexe, alors*

$$S - A + F = 2.$$

En fait, comme le montre l'extrait de son article reproduit dans la photo suivante, Euler écrivit cette relation sous la forme (les notations étant, elles, différentes) : $S + F = A + 2$. Cela est, bien sûr, équivalent d'un point de vue logique. Mais cela ne l'est pas psychologiquement, car rien n'indique alors que la somme alternée $S - A + F$ aurait une importance spéciale, dans un monde d'objets beaucoup plus généraux que les polyèdres convexes.


PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni ſolido hedris planis incluſo aggregatum ex numero angulorum ſolidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet ſi ponatur vt hactenus:
numerus angulorum ſolidorum = S
numerus acierum - - - - = A
numerus hedrarum - - - = H
demonſtrandum eſt, eſſe S + H = A + 2.

Une relation équivalente à celle du théorème 47.1 avait déjà été obtenue par Descartes, mais elle est restée sous forme manuscrite, puis s'est perdu, et n'a été redécouverte qu'en 1860 grâce à une copie faite par Leibniz (voir les commentaires historiques qui accompagnent [48]). Voici comment Descartes énonce cela :

> Si quatre angles plans droits sont multipliés par le nombre des angles solides et si l'on retranche du produit 8 angles plans droits, il reste l'agrégat de tous les angles plans qui existent à la surface du corps solide considéré.

Démontrer que cet énoncé est équivalent au théorème d'Euler est un exercice plaisant, basé sur le fait que la somme des angles d'un polygone à n côtés est égale à $2(n-2)$ « angles plans droits ». Mais la formulation de Descartes attire encore moins l'attention que celle d'Euler sur l'importance de la somme alternée $S - A + F$.

Pendant le XIX[e] siècle, le théorème d'Euler est généralisé à des polyèdres qui ne sont pas nécessairement convexes, et qui ont éventuellement des trous. Ces recherches montrent que l'on obtient toujours une formule du type $S - A + F = \textit{constante}$, cette constante pouvant s'exprimer en termes du nombre de trous du polyèdre. Cette recherche fut pleine de péripéties et inspira le célèbre livre d'épistémologie [109] de Lakatos. Le lecteur intéressé par les détails de cette histoire pourra consulter le livre [132] de Pont.

En tout cas, avant l'article [128] de Poincaré dont nous avons parlé dans la section 39, la recherche autour des généralisations de cette formule ne semblait concerner que les polyèdres. Par contre, Poincaré explique dans [128, §§16-17] que cela concerne en fait même les variétés lisses :

> Ce théorème [d'Euler] a été généralisé par M. l'amiral de Jonquières, pour le cas des polyèdres non convexes. Si un polyèdre forme une variété fermée à deux dimensions, dont le nombre de Betti est P_1, on aura
>
> $$S - A + F = 3 - P_1.$$
>
> [Avec la définition moderne des nombres de Betti, expliquée dans la section 40, on obtient plutôt $2 - B_1$.]
>
> Le fait que les faces sont planes n'a évidemment aucune importance, le théorème s'applique également aux polyèdres curvilignes ; il s'applique encore à la subdivision d'une surface fermée quelconque en régions simplement connexes [pour Poincaré, cela signifie homéomorphe à une boule] ; [...].
>
> Je me propose de généraliser ces résultats pour un espace quelconque.
>
> Soit donc V une variété fermée à p dimensions. Subdivisons-la en un certain nombre de variétés v_p à p dimensions ; ces variétés ne seront pas fermées et leurs frontières seront formées par un certain nombre de variétés v_{p-1} à $p - 1$ dimensions ; [etc.]
>
> La variété V peut avoir des nombres de Betti quelconques, mais je suppose expressément que les variétés $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_1$ sont simplement connexes.
>
> J'appellerai $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_1$ et α_0 le nombre des v_p, des v_{p-1},. . ., des v_1 et des v_0. [...]
>
> Je me propose de calculer le nombre
>
> $$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - ... \mp \alpha_1 \pm \alpha_0.$$
>
> [...] En général, on aura
>
> $$N = P_{p-1} - P_{p-2} + ... + P_2 - P_1$$

> si p est impair, et
> $$N = 3 - P_1 + P_2 - \cdots + P_{p-1}$$
> si p est pair.
>
> Si nous observons maintenant que les nombres de Betti, également distants des extrêmes, sont égaux [ce *théorème de dualité de Poincaré* est présenté dans [128, §9]], on verra que l'on doit avoir
> $$N = 0$$
> si p est impair [...].

En reprenant le langage expliqué dans la section 40, le nombre v_k de polyèdres de dimension k est égal au rang des groupes de chaînes $C_k(V, \mathbb{Z})$ portées par la décomposition polyédrale fixée. Par la suite, on allait changer une fois sur deux le signe dans la définition de Poincaré, et on allait définir la *caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(C_\bullet)$ d'un complexe de chaînes $C_\bullet$ (voir l'expression (40.1)) fini et formé de groupes de rang fini comme étant la somme alternée :
$$\sum_k (-1)^k \text{ rg } C_k.$$

On a alors la propriété-clé purement algébrique suivante :
$$\chi(C_\bullet) = \sum_k (-1)^k \text{ rg } H_k. \tag{47.2}$$

En particulier, cela montre que *la caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à la somme alternée des nombres de Betti pour tous les espaces topologiques qui n'ont qu'un nombre fini de groupes d'homologie non nuls, de rang fini*, et pas seulement pour les variétés compactes sans bord.

Avec ces conventions de signe, on montre que la caractéristique d'Euler-Poincaré est au sens suivant une généralisation de la notion de cardinal d'un ensemble fini (qui n'est rien d'autre qu'une variété compacte de dimension 0) :

Théorème 47.3

(1) *Soit X un espace topologique compact et soient Y, Z deux sous-espaces compacts, tels qu'il existe une décomposition polyédrale de X pour laquelle Y et Z sont des sous-polyèdres. Alors*
$$\chi(X) = \chi(Y) + \chi(Z) - \chi(Y \cap Z).$$

(2) *Si Y et Z admettent des décomposition polyédrales finies, alors $\chi(Y \times Z) = \chi(Y) \cdot \chi(Z)$.*

Ce théorème permet en principe de calculer la caractéristique d'Euler d'un espace en le découpant en espaces plus simples, eux-mêmes écrits comme produits d'espaces encore plus simples.

Il existe des extensions de ce théorème à des cas plus généraux que les espaces topologiques admettant une décomposition polyédrale. L'une des manières de faire cela a été initiée par Čech : elle consiste à travailler avec les parties d'un recouvrement de l'espace X et avec toutes leurs intersections plutôt qu'avec les polyèdres d'une décomposition polyédrale. C'est cela qui a permis à Leray, puis à Cartan et Serre de définir une notion de *cohomologie* pour les faisceaux.

Plus précisément, le k-ème groupe de (co)chaînes $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ d'un faisceau d'espaces vectoriels, associé à un recouvrement $\mathcal{U}$ par des ouverts U_i est la donnée, pour chaque k-uplet d'indices $(i_0, \ldots, i_k)$, d'une section $s_{i_0,\ldots,i_k}$ du faisceau sur $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k}$, et cela de manière antisymétrique. Le (co)bord $\delta : C^k \to C^{k+1}$ est alors défini en associant à chaque intersection $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{k+1}}$ la somme alternée :

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant k} (-1)^j s_{i_0,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_{k+1}},$$

la notation « $\widehat{i_j}$ » signifiant que l'on ne marque pas cet indice.

On voit en particulier qu'une 0-cochaîne (s_i) est fermée (c'est-à-dire que $\delta(s_i) = 0$), si et seulement si les s_i se recollent en une section globale du faisceau $\mathcal{F}$. Cela montre que *le 0-ème espace de cohomologie $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est isomorphe à l'espace des sections globales du faisceau $\mathcal{F}$*. Les autres espaces de cohomologie $H^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sont donc des généralisations de cet espace de sections globales. Tels qu'on les a définis, ils dépendent du choix d'un recouvrement, mais le passage à la limite pour des recouvrements de plus en plus fins permet d'obtenir une notion de groupe de cohomologie $H^k(X, \mathcal{F})$ d'un faisceau $\mathcal{F}$ défini sur un espace topologique X, indépendante du choix d'un recouvrement.

Classiquement, dans le problème d'extension en dimension plus grande du théorème de Riemann-Roch, ce qu'il importait de calculer étaient des dimensions de systèmes linéaires complets $|D|$, ce qui revient à calculer des dimensions d'espaces de sections globales de faisceaux F_D (avec les notations de la lettre de Serre). En fait, ces dimensions sont plus difficiles à calculer prises séparément que la caractéristique d'Euler-Poincaré du faisceau. En effet, cette dernière satisfait un théorème réminiscent de 47.3 :

Théorème 47.4. *Si $\mathcal{G}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$, alors :*

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{G}) + \chi(\mathcal{F}/\mathcal{G}).$$

L'approche proposée par Serre pour démontrer le théorème de Riemann-Roch, était basée sur l'utilisation itérée de ce théorème. Il réussit à faire fonctionner cette machine pour obtenir une nouvelle preuve du théorème de Riemann-Roch pour les courbes et les surfaces. Mais il lui manquait quelques ingrédients pour parvenir en dimension quelconque. C'est Hirzebruch qui parvint à une définition générale pour les variétés complexes et Grothendieck pour les variétés définies sur des corps algébriquement clos quelconques. Les deux sections suivantes sont consacrées à leurs approches.

48. Le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch

Une partie de la difficulté de la conjecture formulée par Serre dans sa lettre à Borel était de trouver un candidat pour le polynôme $P(x, C_2, \ldots, C_{2n})$. En fait, au moins en ce qui concerne le genre arithmétique des variétés de dimension au plus 6, un tel candidat avait été trouvé par Todd [155], dans un langage différent, mais équivalent à celui des classes de Chern (voir les explications d'Atiyah [8]).

Les formules de Todd furent suffisantes pour que Hirzebruch réussisse à deviner la règle de formation de ces polynômes, publiée initialement dans [82]. Peu après, il réussit à prouver le théorème, preuve qu'il esquissa dans [83], et qu'il expliqua avec tous les détails dans [84]. Sa preuve utilisait des résultats très récents de Thom sur la structure de l'anneau de cobordisme des variétés différentiables fermées et orientées. Je renvoie à son récit de souvenirs [85], ainsi qu'au récit de Dieudonné [51, §VII.2.A] pour des détails sur la manière dont il a réussi à prouver le théorème.

Expliquons juste la règle de formation des polynômes, car elle mena Hirzebruch à une généralisation de la notion de genre (voir [86]). Je suis les notations et les explications de [84, §I.1].

Étant donné un anneau commutatif B muni d'un élément unité, considérons pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$ une variable p_i de poids i. Posons de plus $p_0 = 1$. Étant donnée une suite $(K_j(p_1, \ldots, p_j))_{j\geqslant 0}$ de polynômes homogènes de degré égal à l'indice, on note pour abréger :

$$K\Big(\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1, \ldots, p_j) z^j.$$

La suite est dite *multiplicative* si, pour deux suites d'indéterminées :

$$K\bigg(\Big(\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i\Big) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i\Big)\bigg) = K\Big(\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i\Big) \cdot K\Big(\sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i\Big).$$

La série formelle :

$$K(1+z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \in B\, [\![z]\!]$$

est appelée la *série caractéristique* de la suite multiplicative : la construction précédente établit une bijection entre l'ensemble des suites multiplicatives de polynômes à coefficients dans l'anneau B et le sous-groupe multiplicatif de $B\,[\![z]\!]$ formé des séries dont le terme constant vaut 1.

Le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch pour les fibrés en droites est le suivant :

Théorème 48.1. *Soit D un diviseur sur la variété projective complexe lisse X de dimension n. Alors, si x désigne la classe de Chern du fibré en droites E_D, et que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est la suite multiplicative de polynômes à coefficients rationnels de série caractéristique $z/(1-e^{-z})$, alors :*

$$\chi_X(D) = \langle e^x \cdot T_n(C_2, \ldots, C_{2n}), X\rangle.$$

En fait, Hirzebruch démontra aussi un théorème analogue pour les fibrés vectoriels holomorphes.

En l'honneur du travail précurseur [155], Hirzebruch appela la suite multiplicative de série caractéristique $z/(1-e^{-z})$ la *suite de Todd.*

De même, il appela *genre de Todd* de X l'expression du genre arithmétique $\chi_X(0)$ donnée par le second membre du théorème précédent (appliqué donc à $x = 0$).

Remarquons que Hirzebruch utilise comme définition du genre arithmétique la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_X(0)$ (0 désignant le diviseur nul), c'est-à-dire la caractéristique du faisceau structural $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes, vues comme sections du fibré trivial, associé au diviseur nul. Si $p_a(X)$ désigne la définition proposée par Severi (voir la formule (38.1)), on a :

$$\chi_X(0) = 1 + (-1)^n p_a(X)$$

ce qui résulte de la preuve des conjectures de Severi par Kodaira (voir la section 38) et d'un théorème de dualité de Serre.

L'avantage de cette nouvelle définition du genre arithmétique, pourtant équivalente formellement à l'ancienne, est que l'on a :

Théorème 48.2. *Le genre arithmétique à la Hirzebruch est additif (le genre d'une union disjointe est la somme des genres) et multiplicatif (le genre d'un produit est le produit des genres).*

Hirzebruch définit alors la notion générale de *genre* pour une classe de variétés stable par union disjointe et produit : c'est un invariant qui vérifie les propriétés précédentes. Comme il l'expliqua dans son livre [84], cette notion est intimement reliée à celle de suite multiplicative. Pour explorer des développements plus récents de cette généralisation de la notion de genre, on pourra partir de [86].

49. Le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck

La démonstration de Hirzebruch du théorème 48.1 utilise de manière fondamentale la topologie usuelle d'une variété complexe, ainsi que toute la panoplie moderne des groupes d'homologie et de cohomologie, des espaces fibrés vectoriels et de leurs classes caractéristiques. Elle ne permettait donc pas d'obtenir une preuve d'un théorème analogue pour une variété algébrique définie sur un autre corps. Même conjecturer un énoncé analogue était difficile, puisque la théorie des classes de Chern n'existait que pour les fibrés vectoriels complexes. Quels analogues leur trouver pour des variétés définies par exemple sur des corps finis ? Si elles doivent être encore des classes de cohomologie, il faudrait donc développer une théorie cohomologique pour de telles variétés qui soit l'analogue de la cohomologie de de Rham pour les variétés complexes. On voit que ces questions sont intimement reliées aux conjectures de Weil présentées dans la section 44.

Dans son article [146] de 1955, cité par la suite entre connaisseurs sous l'appellation « FAC », Serre posa les bases d'une théorie cohomologique des faisceaux pour des variétés définies sur un corps quelconque. Voici comment débute son article :

> On sait que les méthodes cohomologiques, et particulièrement la théorie des faisceaux, jouent un rôle croissant, non seulement en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes (cf. [30]), mais aussi en géométrie algébrique classique (qu'il me suffise de citer les travaux récents de Kodaira-Spencer sur le théorème de Riemann-Roch). Le caractère algébrique de ces méthodes laissait penser qu'il était possible de les appliquer également à la géométrie algébrique abstraite ; le but du présent mémoire est de montrer que tel est bien le cas.

La structure de base permettant de définir une notion de faisceau pour ces variétés est qu'elles sont naturellement munies d'une topologie, baptisée *topologie de Zariski*. Dans cette topologie, les fermés sont exactement les sous-variétés algébriques.

En ce qui concerne la notion de genre, sa théorie lui permit d'aller jusqu'à prouver la conjecture de Severi présentée dans la section 38 pour une variété projective lisse définie sur un corps de caractéristique quelconque. Mais il n'obtint pas de théorème de type Riemann-Roch général pour ces variétés.

C'est Grothendieck qui formula et démontra peu après un tel théorème vers 1957. Il donna une preuve purement algébrique, valable *sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque*, d'une généralisation du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch. La généralisation consistait en ce que, cette fois-ci, il ne s'agissait plus d'un théorème concernant une seule variété, mais *une famille de variétés*. La première preuve de ce théorème a été rédigée dans [18] par Borel et Serre. Bott explique la philosophie de la nouvelle formulation du théorème dans son commentaire [19] :

La venue de la théorie des faisceaux a, parmi de nombreuses choses, apporté avec elle un grand développement du théorème classique de Riemann-Roch. Ce papier est consacré à la version de Grothendieck du théorème. Grothendieck a généralisé le théorème au point où non seulement il est plus généralement applicable que la version de F. Hirzebruch [84], mais il dépend d'une preuve plus simple et naturelle. [...]

[Théorème I :] Soit $f : X \to Y$ une application propre entre variétés quasi-projectives, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, et soient les faisceaux $R^q f(\mathcal{F})$ sur Y définis par $R^q f(\mathcal{F})_U = H^q(f^{-1}(U); \mathcal{F})$ (U ouvert dans X). Alors ces faisceaux sont aussi cohérents.

[...] Si X est une variété algébrique [...] le groupe $K(X)$ est défini ainsi. Soit $F(X)$ le groupe abélien libre engendré par les faisceaux cohérents sur X. De plus, si E $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2 \to 0$ est une suite exacte courte de tels faisceaux, soit $Q(E)$ le « mot » $\mathcal{F} - (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$ dans $F(X)$. Maintenant définissons $K(X)$ comme le quotient de $F(X)$ modulo le sous-groupe engendré par $Q(E)$, lorsque E varie parmi les suites exactes courtes. (Nous appelons cette construction la K-construction ; elle peut clairement être appliquée à n'importe quelle catégorie dans laquelle des suites exactes courtes sont définies). Par exemple, si p est un point, alors $K(p) \approx \mathbb{Z}$ [...], l'isomorphisme étant déterminé en attachant à un faisceau (qui est simplement un module sur le corps de base dans ce cas) sa dimension. Cet homomorphisme est noté $ch : K(p) \stackrel{\approx}{\to} \mathbb{Z}$.

Comme on le verra, le théorème de Riemann-Roch est un énoncé de comparaison entre $K(X)$ et l'anneau de Chow $A(X)$ qui est valide seulement sur des variétés non singulières. En conséquence, $\mathfrak{A}$ désignera la catégorie des variétés non singulières quasi-projectives et de leurs applications propres. Sur cette catégorie $K(X)$ et $A(X)$ partagent à la fois une nature covariante et contravariante, et c'est précisément afin de compléter $K(X)$ en un foncteur covariant que le théorème I est essentiel.

Grothendieck note cet homomorphisme covariant, induit par une application $f : X \to Y$ de $\mathfrak{A}$, par $f_!$, et il le définit ainsi : si $\mathcal{F}$ est un faisceau [...] alors $f_!(\mathcal{F}) \in K(Y)$ sera la classe du mot $\sum_q (-1)^q R^q f(\mathcal{F})$ dans $K(Y)$. Parce que cette somme est finie sur les objets de $\mathfrak{A}$ cette opération est bien définie, et on voit que son extension linéaire à $F(X)$ s'annule sur les mots de la forme $Q(E)$, en induisant ainsi un homomorphisme $f_! : K(X) \to K(Y)$.

La condition de naturalité $(f \circ g)_! = f_! \circ g_!$ est valide, et s'ensuit de la suite spectrale qui relie $R^q(f \circ g)$ à $R^s f$ et $R^t g$. Ainsi l'aspect évident de « caractéristique d'Euler » de $f_!$ est essentiel pas seulement pour l'annulation de $f_!$ sur $Q(E)$, mais aussi pour la naturalité ! Notez aussi que si $f : X \to p$ est l'application sur un point, alors $ch\ f_!(\mathcal{F})$ peut être identifié avec $\sum(-1)^q \dim\ H^q(X; \mathcal{F}) = \chi(X; \mathcal{F})$; et c'est une expression de cette sorte qui a été évaluée par Hirzebruch dans sa version topologique du théorème de Riemann-Roch par une certaine classe de cohomologie. [...]

Dans la théorie de Grothendieck, le rôle de la cohomologie est pris par l'anneau de Chow $A(X)$, des cycles à équivalence linéaire près, le produit étant défini par l'intersection. Dans notre catégorie, $A(X)$ a aussi un côté covariant $f_* : A(X) \to A(Y)$, défini par l'image directe d'un cycle. Néanmoins, f_* est seulement un homomorphisme additif. L'extension contravariante de $A(X)$, *i.e.* $f \to f^*$ où f^* est induit par l'image inverse d'un cycle, est bien sûr un homomorphisme d'anneaux ; et ces deux opérations sont reliées par la loi de permanence : $f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y$, $x \in A(X)$, $y \in A(Y)$.

Les propriétés contravariantes de $K(X)$ sont le mieux mises en évidence à l'aide du théorème II qui suit : soit $K_1(X)$ le groupe obtenu en appliquant la K-construction à la catégorie des fibrés vectoriels algébriques sur $X, X \in \mathfrak{A}$. De plus, soit $\varepsilon : K_1(X) \to K(X)$ l'homomorphisme défini par l'opération qui associe à un fibré le faisceau des germes de ses sections. Alors ε est une bijection.

Au moins pour un topologue, ce théorème est réminiscent du théorème de dualité de Poincaré. De toutes manières, en identifiant $K(X)$ avec $K_1(X)$ on peut induire l'extension contravariante évidente (image inverse d'un fibré) de $K_1(X)$ à $K(X)$. Cet homomorphisme est noté $f^!$. De plus, la structure d'anneau de $K_1(X)$ induite par le produit tensoriel des fibrés est maintenant imprimée aussi sur $K(X)$, et [...] la loi de permanence est aussi valable : $f_!(x \cdot f^!(y)) = f_!(x) \cdot y$ pour une application f dans $\mathfrak{A}$. Cette nouvelle interprétation de $K(X)$ [...] amène aussi un homomorphisme d'anneaux $ch : K(X) \to A(X) \otimes \mathbb{Q}$ qui est naturel du côté contravariant (à savoir, $ch(f^! x) = f^* ch(x)$) et coïncide avec notre définition de ch sur $K(p)$. Cette fonction est déduite du caractère de Chern des fibrés et peut être caractérisée par : (1) Si L est un fibré en droites sur $X \in \mathfrak{A}$, alors $ch(L) = e^c = 1 + c + c^2/2! + \cdots$, etc., où $c = c_1(L)$ est la classe dans $A(X)$ des zéros d'une section rationnelle générique de L ; (2) ch est un homomorphisme d'anneaux ; (3) la condition de naturalité déjà mentionnée.

En général, l'identification de $K_1(X)$ avec $K(X)$ étend la notion de classes caractéristiques des fibrés vectoriels aux faisceaux cohérents. Nous allons en particulier avoir besoin de la classe de Todd, qui sur les fibrés vectoriels est uniquement caractérisée par ces conditions : (1) Si L est un fibré en droites sur un objet X dans $\mathfrak{A}$, alors $T(L) = c/(1 - e^c)$ [...] ; (2) T est multiplicative : $T(E + F) = T(E) \cdot T(F)$; (3) $Tf^! = f^*T$ pour des applications dans $\mathfrak{A}$.

Cette classe de Todd entre dans la réponse à la question suivante, très naturelle dans notre contexte : Comment se comporte $ch : K(X) \to A(X) \otimes \mathbb{Q}$ sous les homomorphismes covariants $f_!$ et f_* ? La réponse à cette question est précisément la formule de Riemann-Roch de Grothendieck : [...] Soit f une application $X \to Y$, dans $\mathfrak{A}$. Alors

$$ch\{f_!(x)\} \cdot T(Y) = f_*\{ch(x) \cdot T(X)\},$$

où $x \in K(X)$ et $T(X), T(Y)$ désignent les valeurs de la classe de Todd sur les fibrés tangents de X et Y respectivement.

Et voilà, ainsi le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch généralisé par Grothendieck peut s'écrire de manière aussi concise que la formule de Stokes généralisée du théorème 42.1. Où se retrouve la notion de genre là-dedans ? Dans le fait que la « bonne » notion de genre d'une variété est la caractéristique d'Euler du faisceau structural, qui se généralise en la caractéristique d'Euler de n'importe quel faisceau cohérent, qui se généralise à son tour en l'image directe d'un faisceau cohérent par un morphisme propre.

Expliquer convenablement les diverses notions et constructions nouvelles qui entrent en jeu dans le texte précédent nécessiterait encore bien des pages. Je décide donc d'arrêter ici cette promenade historique. Le lecteur pourra découvrir d'autres développements du théorème de Riemann-Roch et de la notion de genre (par exemple le théorème de l'index d'Atiyah-Singer) dans les appendices de [84].

Quant à Grothendieck, il était en pleine période de réorganisation complète de la géométrie algébrique, de son langage et de ses problèmes, activité motivée en partie par le besoin de créer un cadre dans lequel démontrer « naturellement » les conjectures de Weil. On pourra lire son exposé [77] de 1958 pour une vision d'ensemble de ses préoccupations cohomologiques du moment.

Si les conjectures de Weil ont ainsi beaucoup stimulé les modernes, elles étaient nourries par une profonde connaissance de l'histoire. C'est ce que j'ai essayé de montrer à travers les nombreuses citations de Weil présentées pendant cette promenade. En voici à ce sujet une dernière, tirée du commentaire de [160] publié dans son oeuvre complète :

> [...] je m'étais tôt persuadé que la fréquentation assidue des grands mathématiciens du passé est une source d'inspiration non moins féconde que la lecture des auteurs à la mode du jour.

Voici à présent quelques références historiques générales sur les thèmes principaux de notre promenade. Pour un panorama des mathématiques du XIX^{e} siècle, on pourra lire [101]. Pour des détails sur l'évolution de la géométrie algébrique, on pourra consulter [49] et [91]. Pour une description de l'évolution de la topologie algébrique et géométrique jusqu'aux travaux de Poincaré, on pourra lire [132] et pour celle entre Poincaré et les années 1960, on pourra consulter [51]. Pour des renseignements historiques sur diverses notions topologiques essentielles de nos jours, on pourra consulter [93].

Une partie des articles que j'ai cités sont accessibles gratuitement sur les sites :

- `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/`
- `http://www.mathunion.org/ICM/`
- `http://www.numdam.org/`
- `http://www.emani.org/`
- `http://retro.seals.ch/digbib/home`

50. Épilogue

Ce texte n'est pas un travail d'historien, mais une invitation à consulter les recherches des historiens des mathématiques, ainsi que les regards sur l'histoire portés par les mathématiciens eux-mêmes et, bien sûr, les écrits de recherche originaux. Il est toujours surprenant de découvrir à quel point les approches, les problèmes et le langage varient au cours du temps ou d'un auteur à l'autre. Comprendre ces divers langages est un excellent entraînement mathématique, et comprendre l'esprit d'une époque à partir de ses écrits est un excellent entraînement de l'imagination.

Mais au-delà du plaisir que l'on peut avoir à fréquenter ainsi le passé, est-ce d'une quelconque utilité ? Je dirais que l'utilité est au moins double. Premièrement, elle est expliquée ainsi par Feynman[(28)] :

> Les théories du connu qui sont décrites par des idées physiques différentes peuvent être équivalentes quant à leurs prédictions, et sont donc scientifiquement indiscernables. Cependant, psychologiquement, elles ne sont pas identiques, dès qu'il s'agit de quitter cette base pour aller vers l'inconnu. En effet, divers points de vue suggèrent différentes modifications possibles et ne sont donc pas équivalents quant aux hypothèses qu'ils suscitent lorsqu'on essaye de comprendre ce qui est encore incompris.

Deuxièmement, lorsque l'on explique des mathématiques, il est important d'avoir en tête une pluralité de points de vue, car pluriels sont aussi les imaginaires mathématiques. Faire un exposé parfaitement construit logiquement, partant d'une définition qui sort de nulle part, continuant par une suite de lemmes et de théorèmes, est une habitude bien répandue, mais qui est trop souvent peu porteuse de sens. Connaître les grandes lignes du développement d'un sujet, sentir comment on est parvenu à telle définition, pourquoi telle question est importante, combien on a peiné pour comprendre un phénomène, c'est tout cela qui permet de construire un sens accessible à des personnes qui ont forcément une multitude de manières de penser aux objets et aux phénomènes étudiés.

---

(28) Cette conférence faite en 1965 à l'occasion de la réception du prix Nobel de physique est traduite en Français dans [66].

Mais qu'est-ce donc que le genre ?

Une notion bien vivante, qui ne se laissera pas de si tôt enfermer dans une seule définition ! J'espère avoir donné envie à certains de mes lecteurs de continuer l'exploration de cette notion et, pourquoi pas, de contribuer à la création de nouvelles interprétations ou généralisations.

Références

[1] N. H. Abel – « Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes », Présenté à l'Académie des Sciences à Paris le 30 Octobre 1826, 1826, Repris dans *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel.* Édité par L. Sylow et S. Lie, Grondahl & Son, Christiania, tome I, 1881, 145-211.

[2] ———, « Lettre à Legendre du 25 novembre 1828 », 1828, Repris dans *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel.* Édité par L. Sylow et S. Lie, Grondahl & Son, Christiania, tome II, 1881, 271-279.

[3] ———, « Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes », *J. reine angew. Math.* **4** (1829), p. 200–201, Repris dans *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel.* Édité par L. Sylow et S. Lie, Grondahl & Son, Christiania, tome I, 1881, 515-517.

[4] S. S. Abhyankar – « Historical ramblings in algebraic geometry and related algebra », *Amer. Math. Monthly* **83** (1976), no. 6, p. 409–448.

[5] Aristote – *Métaphysique*, J. Vrin, Paris, 2000, Trad. et notes de Jean Tricot.

[6] M. Artin – « Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces », *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 485–496.

[7] ———, « On isolated rational singularities of surfaces », *Amer. J. Math.* **88** (1966), p. 129–136.

[8] M. F. Atiyah – « Obituary : John Arthur Todd », *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998), no. 3, p. 305–316.

[9] R. Ayoub – « The lemniscate and Fagnano's contributions to elliptic integrals », *Arch. Hist. Exact Sci.* **29** (1984), no. 2, p. 131–149.

[10] H. F. Baker – « On some recent advances in the theory of algebraic surfaces », *Proc. London Math. Soc. (2)* **12** (1913), p. 1–40.

[11] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters & A. Van de Ven – *Compact complex surfaces*, 2e éd., Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[12] A. Beauville – « Surfaces $K3$ », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 1982/83*, Astérisque, vol. 105-106, Société Mathématique de France, Paris, 1983, Exp. no. 609, p. 217–229.

[13] A. Beauville, J.-P. Bourguignon & M. Demazure (éds.) – *Géométrie des surfaces $k3$: modules et périodes - Séminaire Palaiseau*, Astérisque, no. 126, Société Mathématique de France, Paris, 1985.

[14] Jak. Bernoulli – « Constructio curvae accessus et recessus aequabilis ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae addenda nuperae solutioni mensis Junii », *Acta Eruditorum* **13** (1694), Repris dans *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli*, Herman H. Goldstine ed., Birkhäuser, 1991, Jac. Op. LX, 188-192.

[15] Joh. Bernoulli – « Constructio facilis curvae recessus aequabilis a puncto dato, per rectificationem curvae algebraicae », *Acta Eruditorum* **13** (1694), Repris dans *Opera Omnia Johann Bernoulli*, J.E. Hofmann, G. Olms Éd., Hildesheim, vol. I, 1968, XIX, 119-122.

[16] ———, « Lectiones mathematicae de methodu integralium, aliisque, conscriptae in usum ill », Marchionis Hospitalii cum Auctor Parisiis ageret Annis 1691 et 1692, 1742, Dans *Opera Omnia.* Laus. et Gen. 1742. Réimpression Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1968. Tome III, 386-558.

[17] E. Betti – « Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni », *Annali di Mat. (2)* **4** (1870), p. 140–158.

[18] A. Borel & J.-P. Serre – « Le théorème de Riemann-Roch », *Bull. Soc. math. France* **86** (1958), p. 97–136.

[19] R. Bott – « Rapport sur [18] », Math. Reviews, MR0116022 (22 #6817), 1958.

[20] E. Brieskorn – « Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen », *Math. Ann.* **166** (1966), p. 76–102.

[21] ———, « Singularities in the work of Friedrich Hirzebruch », in *Surveys in differential geometry*, Surv. Differ. Geom., vol. 7, Int. Press, Somerville, MA, 2000, p. 17–60.

[22] E. Brieskorn & H. Knörrer – *Plane algebraic curves*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986.

[23] A. Brill & M. Noether – « On algebraic functions and the use in geometry », *Math. Ann.* **7** (1874), p. 269–316.

[24] ———, « Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuer Zeit », *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **3** (1894), p. 107–108.

[25] R. Brussee – « The canonical class and the C^∞ properties of Kähler surfaces », *New York J. Math.* **2** (1996), p. 103–146.

[26] É. Cartan – « Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé », *Bull. Soc. math. France* **24** (1896), p. 140–177, Repris dans *Œuvres Complètes.* Partie II, Vol. 1, 265-302.

[27] ———, « Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **16** (1899), p. 239–332, Repris dans *Œuvres Complètes.* Partie II, Vol. 1, 303-397.

[28] ———, « Sur l'intégration de certaines systèmes de Pfaff de caractère deux », *Bull. Soc. math. France* **29** (1901), p. 233–302, Repris dans *Œuvres Complètes.* Partie II, Vol. 1, 483-554.

[29] ———, « Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos », *C. R. Acad. Sci. Paris* **187** (1928), p. 196–198, Repris dans *Œuvres Complètes.* Partie I, Vol. 2, 999-1001.

[30] H. Cartan – « Variétés analytiques complexes et cohomologie », in *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables (Bruxelles, 1953)*, Georges Thone, Liège, 1953, p. 41–55.

[31] G. Castelnuovo & F. Enriques – « Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques », *Math. Ann.* **48** (1896), no. 3, p. 241–316.

[32] ———, « Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformation aus », *Enz. d. Math. Wiss. III* **2** (1915), no. 6, p. 674–768.

[33] G. Castelnuovo, F. Enriques & F. Severi – « Max Noether », *Math. Ann.* **93** (1925), no. 1, p. 161–181.

[34] F. Catanese – « From Abel's heritage : transcendental objects in algebraic geometry and their algebraization », in *The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, Berlin, 2004, p. 349–394.

[35] A. L. Cauchy – *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, De Bure Frères, Paris, 1825, Republié dans *Œuvres de Cauchy*, Série II, tome XV, 41-89.

[36] ———, « Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires », *C. R. Acad. Sci. Paris* **XXIII** (1846), p. 689, Republié dans *Œuvres de Cauchy*, Série I, tome X, 153-168.

[37] A. Cayley – « On the transformation of plane curves », *Proc. London Math. Soc.* **s1-1** (1865), no. 1, p. 1–11, Aussi dans *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. vol. VI, 1-8, Cambridge Univ. Press, 1893.

[38] ———, « On the deficiency of certain surfaces », *Math. Ann.* **3** (1871), no. 4, p. 526–529.

[39] S.-s. Chern – « Characteristic classes of Hermitian manifolds », *Ann. of Math. (2)* **47** (1946), p. 85–121.

[40] R. Chorlay – « L'émergence du couple local/global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953) », Thèse, Univ. Paris 7 Diderot, 2007.

[41] A. Clebsch – « Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind », *J. reine angew. Math.* **64** (1865), p. 43–65.

[42] ———, « Sur les surfaces algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **67** (1868), p. 1238–1239.

[43] W. K. Clifford – « On the canonical form and dissection of a Riemann's surface », *Proc. London Math. Soc.* **s1-8** (1876), no. 1, p. 292–304, Repris dans *Mathematical Papers*, Macmillan, London, 1882. Réimprimé par Chelsea, New York, 1968.

[44] D. A. Cox – *Galois theory*, 2e éd., Pure and Applied Math., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012.

[45] R. Dedekind – « Sur la théorie des nombres entiers algébriques », *Bull. Sciences Math. et Astron.* **11** (1876), p. 278–288.

[46] M. Demazure, H. C. Pinkham & B. Teissier (éds.) – *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, Lect. Notes in Math., vol. 777, Springer, Berlin, 1980, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1976–1977.

[47] R. Descartes – *Géométrie*, Ian Maire marchand libraire à Leyde, 1637, Reproduction facsimilée dans *The Geometry of René Descartes*. Dover Publications, 1954.

[48] ———, « Exercices pour les éléments des solides », Traduction commentée par Pierre Costabel d'une copie par Leibniz d'un manuscrit de Descartes intitulé *Progymnasmata de solidorum elementis*, 1987, Collection « Épiméthée », P.U.F.

[49] J. Dieudonné – *Cours de géométrie algébrique. Vol. I : Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique*, Presses Univ. de France, Paris, 1974.

[50] ———, « Emmy Noether and algebraic topology », *J. Pure Appl. Algebra* **31** (1984), no. 1-3, p. 5–6.

[51] ———, *A history of algebraic and differential topology 1900–1960*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2009.

[52] S. K. Donaldson – « An application of gauge theory to four-dimensional topology », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 2, p. 279–315.

[53] ———, « Irrationality and the h-cobordism conjecture », *J. Differential Geom.* **26** (1987), no. 1, p. 141–168.

[54] P. Du Val – « On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction. I, II & III », *Proc. Camb. Philos. Soc.* **30** (1934), p. 453–459, 460–465, 483–491.

[55] A. H. Durfee – « Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points », *Enseign. Math. (2)* **25** (1979), no. 1-2, p. 131–163.

[56] F. Enriques – « Sur la classification des surfaces algébriques au point de vue des transformations birationnelles », *Bull. Soc. math. France* **52** (1924), p. 602–609.

[57] ———, « Sur la théorie des équations et des fonctions algébriques d'après l'école géométrique italienne », *Enseign. Math.* **23** (1924), p. 309–322.
[58] ———, *Le superficie algebriche*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1949.
[59] F. Enriques & O. Chisini – *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Libro II*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1918.
[60] L. Euler – « Elementa doctrinae solidorum », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **4** (1758), p. 109–140, Repris dans *Opera Omnia.* Serie 1, Vol. 26, 71-93.
[61] ———, « Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **6** (1761), p. 58–84, Repris dans *Mathematische Werke.* I 20, *Commentationes analyticae*, Commentatio 252, 80-107, Leipzig et Berlin, 1912.
[62] ———, « De formulis integralibus duplicatis », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **14** (1770), p. 72–103, Repris dans *Opera Omnia.* Serie 1, Vol. 17, 289-315.
[63] G. C. di Fagnano – « Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma I », *Giornale de' Letterati d'Italia* **29** (1718), p. 258 et suivantes, Repris dans *Produzioni mathematiche.* II, Pesaro, 1750, 343-348.
[64] ———, « Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma II », *Giornale de' Letterati d'Italia* **30** (1718), p. 87 et suivantes, Repris dans *Produzioni mathematiche.* II, Pesaro, 1750, 356-368.
[65] G. Faltings – « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern », *Invent. Math.* **73** (1983), no. 3, p. 349–366.
[66] R. Feynman – *La nature de la physique*, Points Science, Éditions du Seuil, Paris, 1980.
[67] M. H. Freedman – « The topology of four-dimensional manifolds », *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 3, p. 357–453.
[68] R. Friedman & J. W. Morgan – *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 27, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
[69] ———, « Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants », *J. Algebraic Geom.* **6** (1997), no. 3, p. 445–479.
[70] G. Frobenius – « Über das Pfaffsche Problem », *J. reine angew. Math.* **82** (1877), p. 230–315.
[71] P. Gario – « Resolution of singularities of surfaces by P. Del Pezzo. A mathematical controversy with C. Segre », *Arch. Hist. Exact Sci.* **40** (1989), no. 3, p. 247–274.
[72] ———, « Singolarità e geometria sopra una superficie nella corrispondenza di C. Segre a G. Castelnuovo », *Arch. Hist. Exact Sci.* **43** (1991), no. 2, p. 145–188.
[73] J. Gray – « The classification of algebraic surfaces by Castelnuovo and Enriques », *Math. Intelligencer* **21** (1999), no. 1, p. 59–66.
[74] J. J. Gray – « The Riemann-Roch theorem and geometry, 1854–1914 », in *Proc. Internat. Congress Math., Vol. III (Berlin, 1998)*, 1998, p. 811–822.
[75] P. A. Griffiths – « Variations on a theorem of Abel », *Invent. Math.* **35** (1976), p. 321–390.
[76] ———, « The legacy of Abel in algebraic geometry », in *The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, Berlin, 2004, p. 179–205.
[77] A. Grothendieck – « The cohomology theory of abstract algebraic varieties », in *Proc. Internat. Congress Math. 1958*, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, p. 103–118.
[78] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
[79] D. Hilbert – « Über die Theorie der algebraischen Formen », *Math. Ann.* **36** (1890), p. 473–534.

[80] H. Hironaka – « On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves », *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math.* **30** (1957), p. 177–195.

[81] ———, « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II », *Ann. of Math. (2)* **79** (1964), p. 109–326.

[82] F. Hirzebruch – « On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), p. 951–956.

[83] ———, « Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **40** (1954), p. 110–114.

[84] ———, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 9, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962, Traduction Anglaise : *Topological Methods in Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1978.

[85] ———, « The signature theorem : reminiscences and recreation », in *Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1970)*, Ann. of Math. Stud., vol. 70, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, p. 3–31.

[86] F. Hirzebruch & M. Kreck – « On the concept of genus in topology and complex analysis », *Notices Amer. Math. Soc.* **56** (2009), no. 6, p. 713–719.

[87] W. V. D. Hodge – « The isolated singularities of an algebraic surface », *Proc. London Math. Soc. (2)* **30** (1929), no. 2, p. 133–143.

[88] ———, « The geometric genus of a surface as a topological invariant », *J. London Math. Soc.* **8** (1933), no. 4, p. 312–319.

[89] ———, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge University Press, Cambridge, 1941.

[90] ———, « The topological invariants of algebraic varieties », in *Proc. Internat. Congress Math. (Cambridge, Mass., 1950)*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1952, p. 182–192.

[91] C. Houzel – *La géométrie algébrique. Recherches historiques*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris, 2002.

[92] C. G. J. Jacobi – « Considerationes generales de transcendentibus abelianis », *J. reine angew. Math.* **9** (1832), p. 394–403.

[93] I. M. James (éd.) – *History of topology*, Elsevier, Amsterdam, 1999.

[94] C. Jordan – « Sur la déformation des surfaces », *J. Math. Pures Appl. (2)* **11** (1866), p. 105–109, Repris dans *Œuvres de Camille Jordan.* Tome IV, Gauthier-Villars, Paris, 1964, 85-89.

[95] E. Kähler – « Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1933), no. 1, p. 173–186.

[96] V. J. Katz – « The history of differential forms from Clairaut to Poincaré », *Historia Math.* **8** (1981), no. 2, p. 161–188.

[97] ———, « Change of variables in multiple integrals : Euler to Cartan », *Math. Mag.* **55** (1982), no. 1, p. 3–11.

[98] ———, « Differential forms—Cartan to de Rham », *Arch. Hist. Exact Sci.* **33** (1985), no. 4, p. 321–336.

[99] S. L. Kleiman – « What is Abel's theorem anyway ? », in *The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, Berlin, 2004, p. 395–440.

[100] F. Klein – *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, 1963, Traduction de la première édition en Allemand parue chez Teubner, Leipzig, 1882.

[101] ———, *Development of mathematics in the 19th century*, Lie groups : history, frontiers and applications, vol. IX, Math. Sci. Press, 1979, Traduction du tome I de la première édition en Allemand de 1928.

[102] H. Kneser – « Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten », *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **38** (1929), p. 248–259.

[103] K. Kodaira – « Arithmetic genera of algebraic varieties », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **38** (1952), p. 527–533.

[104] ———, « On the theorem of Riemann-Roch for adjoint systems on Kählerian varieties », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **38** (1952), p. 522–527.

[105] ———, « On the structure of compact complex analytic surfaces. I, II, III & IV », *Amer. J. Math.* **86** (1964), p. 751–798, II : *Ibid.* **88** (1966), p. 682-721, III : *Ibid.* **90** (1969), p. 682-721, IV : *Ibid.* **90** (1969), p. 1048-1066.

[106] K. Kodaira & D. C. Spencer – « On arithmetic genera of algebraic varieties », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), p. 641–649.

[107] P. B. Kronheimer & T. S. Mrowka – « The genus of embedded surfaces in the projective plane », *Math. Res. Lett.* **1** (1994), no. 6, p. 797–808.

[108] O. Labs – « Hypersurfaces with many singularities », Thèse, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2005.

[109] I. Lakatos – *Preuves et réfutations*, Hermann, Paris, 1984, Traduction de *Proofs and refutations.* Cambridge Univ. Press, 1976.

[110] O. A. Laudal & R. Piene (éds.) – *The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[111] A.-M. Legendre – *Traité des fonctions elliptiques. Tome premier*, Huzard-Courcier, Paris, 1825.

[112] S. Mac Lane – « Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether », *J. Pure Appl. Algebra* **39** (1986), no. 3, p. 305–307.

[113] M. Merle & B. Teissier – « Conditions d'adjonction. (D'apres Du Val) », in *Sémin. sur les singularites des surfaces (Palaiseau 1976-77)*, Lect. Notes in Math., Springer, 1980, p. 229–245.

[114] J. Milnor – « On manifolds homeomorphic to the 7-sphere », *Ann. of Math. (2)* **64** (1956), p. 399–405.

[115] ———, « A unique decomposition theorem for 3-manifolds », *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 1–7.

[116] ———, « Vers la conjecture de Poincaré et la classification des variétés de dimension 3 », *Gaz. Math.* **99** (2004), p. 13–25, Version originale en anglais : *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), no. 10, 1226–1233.

[117] E. E. Moise – « Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung », *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), p. 96–114.

[118] D. Mumford – *Curves and their Jacobians*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975, Repris comme Appendice à *The red book of varieties and schemes*, Lect. Notes in Math. **1358**, Springer, 1999.

[119] C. G. Neumann – *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abelschen Integralen*, Teubner, Leipzig, 1865.

[120] I. Newton – *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias ; cum enumeratione linearum tertii ordinis*, William Jones, London, 1711, Traduction espagnole : *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias, con una enumeración de las líneas de tercer orden*, Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2003.

[121] E. Noether – « Idealtheorie in Ringbereichen », *Math. Ann.* **83** (1921), no. 1-2, p. 24–66.

[122] M. Noether – « Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. I », *Math. Ann.* **2** (1870), p. 293–316.

[123] ———, « Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. II », *Math. Ann.* **8** (1875), p. 495–533.

[124] ———, « Rationale Ausführungen der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen », *Math. Ann.* **23** (1883), p. 311–358.

[125] ———, « Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **103** (1887), p. 734–737.

[126] G. Perelman – « The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications », 2002, `arXiv:math.DG/0211159`.

[127] É. Picard & G. Simart – *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Tome I & II*, Gauthier-Villars, Paris, 1897 & 1906, Réédité par Chelsea Publishing Company, 1971.

[128] H. Poincaré – « Analysis situs », *J. Éc. Politech (2)* **1** (1895), p. 1–123.

[129] ———, « Complément à l'Analysis situs », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **13** (1899), p. 285–343, Republié dans *Œuvres de Henri Poincaré.* Tome VI, Gauthier-Villars, 1953, 290-337.

[130] ———, « Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques. », *J. Math. Pures Appl. (Journ. de Liouville) (5)* **7** (1901), p. 161–233, Republié dans *Œuvres de Henri Poincaré.* Tome V, Gauthier-Villars, 1950, 483-550.

[131] ———, « Cinquième complément à l'analysis situs », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), p. 45–110, Republié dans *Œuvres de Henri Poincaré.* Tome VI, Gauthier-Villars, 1953, 435-498.

[132] J.-C. Pont – *La topologie algébrique des origines à poincaré*, Presses Univ. de France, Paris, 1974.

[133] P. Popescu-Pampu – « La bande que "tout le monde connaît" », *Images des Maths., CNRS* (2010), `http://images.math.cnrs.fr/La-bande-que-tout-le-monde-connait.html`.

[134] ———, « Idéalisme radical », *Images des Maths., CNRS* (2011), `http://images.math.cnrs.fr/Idealisme-radical.html`.

[135] V. Puiseux – « Recherches sur les fonctions algébriques », *J. Math. Pures et Appl. (Journ. de Liouville)* **XV** (1850), p. 365–480.

[136] T. Radó – « Über den Begriffe der Riemannsche Fläche », *Acta Litt. Sci. Szeged* **2** (1925), p. 101–121.

[137] M. Reid – « Chapters on algebraic surfaces », in *Complex algebraic geometry (Park City, UT, 1993)*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, p. 3–159.

[138] G. de Rham – « L'œuvre d'Élie Cartan et la topologie », in *Hommage à Élie Cartan 1869-1951*, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucarest, 1975, Repris dans *Œuvres Mathématiques de Georges de Rham*, L'Ens. Math., Univ. De Genève, 1981, 641-650, p. 11–20.

[139] ———, « Quelques souvenirs des années 1925–1950 », *Cahiers du sém. d'histoire des math.* **1** (1980), p. 19–36, Repris dans *Œuvres Mathématiques de Georges de Rham*, L'Ens. Math., Univ. de Genève, 1981, 651-668.

[140] B. Riemann – « Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlicher komplexer Grösse », Inauguraldissertation, Göttingen, 1851, Traduction en Français : *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe.* Dans *Œuvres mathématiques de Riemann.*, trad. L. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1898, 2-60. Réédition J. Gabay, Sceaux, 1990.

[141] ———, « Theorie der Abel'schen Functionen », *J. reine angew. Math.* **54** (1857), p. 115–155.

[142] G. Roch – « Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen. », *J. reine angew. Math.* **64** (1865), p. 372–376.

[143] M. Rosenlicht – « Equivalence relations on algebraic curves », *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), p. 169–191.

[144] H. P. de Saint-Gervais – *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*, ENS Éditions, Lyon, 2010, (pseudonyme du collectif : Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévennec, and Jean-Claude Sikorav).

[145] N. Schappacher – « Some milestones of lemniscatomy », in *Algebraic geometry (Ankara, 1995)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 193, Dekker, New York, 1997, p. 257–290.

[146] J.-P. Serre – « Faisceaux algébriques cohérents », *Ann. of Math. (2)* **61** (1955), p. 197–278, Repris dans *Œuvres.* Vol. I, Springer, 2003, 310-391.

[147] ———, « Cohomologie et géométrie algébrique », in *Proc. Internat. Congress Math. (Amsterdam, 1954), vol. III*, Erven P. Noordhoff N. V., Groningen, 1956, Repris dans *Œuvres.* Vol. I, Springer, 2003, 286-291, p. 515–520.

[148] ———, « Lettre à Armand Borel du 16 avril 1953 », in *Œuvres. Vol. I*, Springer, 2003, p. 243–250.

[149] F. Severi – « Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche. », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **28** (1909), p. 33–87.

[150] ———, « Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche. II », *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **32** (1951), p. 1–81.

[151] I. R. Shafarevich – *Basic algebraic geometry. 2. Schemes and complex manifolds*, 2e éd., Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[152] P. Slodowy – « Groups and special singularities », in *Singularity theory (Trieste, 1991)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, p. 731–799.

[153] A. I. Smadja – « La lemniscate de Fagnano et la multiplication complexe », `HAL-SHS:halshs-00456361`.

[154] J. Stillwell – *Mathematics and its history*, 2e éd., Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 2002.

[155] J. A. Todd – « The arithmetical invariants of algebraic loci », *Proc. London Math. Soc. (2)* **43** (1937), no. 3, p. 190–225.

[156] R. Vanden Eynde – « Historical evolution of the concept of homotopic paths », *Arch. Hist. Exact Sci.* **45** (1992), no. 2, p. 127–188.

[157] C. Voisin – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[158] R. J. Walker – « Reduction of the singularities of an algebraic surface », *Ann. of Math. (2)* **36** (1935), no. 2, p. 336–365.

[159] C. T. C. Wall – *Singular points of plane curves*, London Math. Soc. Student Texts, vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[160] A. Weil – « L'arithmétique sur les courbes algébriques », *Acta Math.* **52** (1929), no. 1, p. 281–315, Repris dans *Œuvres scientifiques. I.* Springer, 1979, 11-45.

[161] ———, « Numbers of solutions of equations in finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), p. 497–508.

[162] ———, « Number-theory and algebraic geometry », in *Proc. Internat. Congress Math. (Cambridge, Mass., 1950), vol. 2*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1952, Repris dans *Œuvres scientifiques. I.* Springer, 1979, 442-452, p. 90–100.

[163] ______, « Commentaire sur *On the moduli of Riemann surfaces ; Final report on contract AF18(603)-57* », in *Œuvres scientifiques. II*, Springer, 1979, p. 545–547.

[164] ______, « Commentaire sur l'article *Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe* », in *Œuvres scientifiques. I*, Springer, 1979, p. 562–564.

[165] ______, « Lettre à Henri Cartan du 18 janvier 1947 », in *Œuvres scientifiques. II*, Springer, 1979, p. 45–47.

[166] ______, « Riemann, Betti and the birth of topology », *Arch. Hist. Exact Sci.* **20** (1979), no. 2, p. 91–96.

[167] ______, « Sur les origines de la géométrie algébrique », *Compositio Math.* **44** (1981), no. 1-3, p. 395–406.

[168] H. Weyl – *The concept of a Riemann surface*, ADIWES Intern. Ser. in Math., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964, Traduction de la première édition en Allemand de 1913.

[169] A. Wiles – « Modular elliptic curves and Fermat's last theorem », *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), no. 3, p. 443–551.

[170] O. Zariski – *Algebraic surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 3, Julius Springer, 1935, Réédité en 1971 avec des appendices de S. S. Abhyankar, J. Lipman & D. Mumford.

[171] ______, « Polynomial ideals defined by infinitely near base points », *Amer. J. Math.* **60** (1938), no. 1, p. 151–204, Repris dans *Collected papers. I.* H. Hironaka & D. Mumford éds., The M.I.T. Press, 1971.

[172] ______, « Normal varieties and birational correspondences », *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), p. 402–413, Repris dans *Collected papers. I.* H. Hironaka & D. Mumford éds., The M.I.T. Press, 1971.

[173] ______, « Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties », *Ann. of Math. (2)* **45** (1944), p. 472–542.

[174] ______, « Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi », *Ann. of Math. (2)* **55** (1952), p. 552–592.

[175] H. G. Zeuthen – « Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un. », *Math. Ann.* **4** (1871), p. 21–49.

Index

Patrick Popescu-Pampu, Université Lille 1, UFR de Mathématiques, Bâtiment M2, Cité Scientifique, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex
E-mail : `patrick.popescu@math.univ-lille1.fr`