Journées mathématiques X-UPS

Année 2010

Facettes mathématiques de la mécanique des fluides

Jean-Yves CHEMIN

Fluides géophysiques

Journées mathématiques X-UPS (2010), p. 93-108.
https://doi.org/10.5802/xups.2010-05

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2010, p. 93–108 doi: 10.5802/xups.2010-05

FLUIDES GÉOPHYSIQUES

par

Jean-Yves Chemin

Résumé. Dans ce dernier texte on s'intéresse à ces mêmes équations, soumises à l'influence de la force de Coriolis (due à la rotation de la Terre). Le petit paramètre est alors le rapport entre la vitesse caractéristique du fluide et la vitesse de rotation de la Terre. On montre que ce système est en quelque sorte *intermédiaire* entre les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles et tridimensionnelles, et en particulier que sous l'effet d'une forte rotation, la théorie de Cauchy est proche du cas bidimensionnel (même si le système par lui-même est tridimensionnel).

Table des matières

5.1. Introduction

La modélisation des fluides géophysiques est très complexe. Par exemple, un modèle de circulation océanique doit prendre en compte la rotation de la Terre, mais aussi la topographie du fond, le vent en surface, la salinité, la température... Nous considérerons ici un

Publication originelle dans Journées X-UPS 2010. Facettes mathématiques de la mécanique des fluides. Éditions de l'École polytechnique, 2010.

modèle très peu réaliste, mais qui met bien en évidence l'influence que peut avoir une rotation rapide sur un écoulement[(1)]. Nous renvoyons par exemple à [5] pour des modèles plus réalistes, et à [3] pur une discussion autour de ce modèle, ainsi que d'autres résultats mathématiques.

Nous nous placerons dans le tore ; soient a_1, a_2 et a_3 trois nombres réels strictement positifs, on définit le tore associé par

$$\mathbb{T}^3 \stackrel{\text{déf.}}{=} \prod_{j=1}^{3} (\mathbb{R}/a_j\mathbb{Z})$$

Dans toute la suite, nous supposerons par souci de simplicité que $a_j = 1$, mais les résultats de cet exposé sont valables pour un quelconque triplet (a_1, a_2, a_3). Considérons donc le système suivant :

$$(\mathrm{NSC}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon + \mathbb{P}(u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} L u^\varepsilon = 0 \\ \qquad\qquad \text{avec } Lw \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}(e^3 \wedge w), \\ u^\varepsilon{}_{|t=0} = u_0 \text{ avec } \operatorname{div} u_0 = 0, \end{cases}$$

où $\mathbb{P}$ est la projection orthogonale sur les champs de vecteurs de divergence nulle et L l'opérateur de Coriolis. Notons que l'opérateur L est antisymétrique, c'est-à-dire

$$\forall v,\ \operatorname{div} v = 0 \Longrightarrow (Lv|v)_{L^2} = 0.$$

Nous prendrons la définition suivante pour la transformée de Fourier :

$$(5.1.1) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^3, \quad \widehat{h}(n) = \mathcal{F}h(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{T}^3} e^{-2i\pi n\cdot x} h(x)dx,$$

et $n \cdot x$ est le produit scalaire de (n_1, n_2, n_3) par (x_1, x_2, x_3). Le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ s'écrit

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}v)(n) = \widehat{\mathbb{P}}(n)\widehat{v}(n) \quad \text{avec} \quad \widehat{\mathbb{P}}(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathrm{Id} - \frac{1}{|n|^2} \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

Donnons la définition des espaces de Sobolev dans ce contexte périodique.

---

(1) À l'échelle de temps de la circulation océanique, la Terre tourne vite.

Définition 5.1.2. Une fonction h (ou une distribution pour les indices négatifs) est dans l'espace de Sobolev H^s si et seulement si

$$\|h\|_{H^s}^2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} (1+|n|^2)^s |\widehat{h}(n)|^2 < +\infty.$$

Sans surprise aucune, les définitions 2.2.1 et 2.2.2 de [4] peuvent être reprises mot pour mot.

***Définition 5.1.3* (Solution faible).** On dit qu'un champ de vecteurs u^ε dans $L^2([0,T]\times\mathbb{T}^3)$ est une solution faible de $(\mathrm{NSC}_\varepsilon)$ associée à la donnée initiale u_0 si pour tout champ de vecteurs ϕ dans $\mathcal{C}^\infty([0,T]\times\mathbb{T}^3)$, de divergence nulle, on a

$$\int_{\mathbb{T}^3} u^\varepsilon\cdot\phi(t,x)dx = \int_{\mathbb{T}^3} u_0(x)\cdot\phi(0,x)dx$$
$$-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\Big(-u^\varepsilon\cdot\Delta\phi+\frac{1}{\varepsilon}Lu^\varepsilon\cdot\phi-u^\varepsilon\otimes u^\varepsilon:\nabla\phi-u^\varepsilon\cdot\partial_t\phi\Big)(t',x)dxdt'.$$

***Définition 5.1.4* (Solution turbulente).** On dit qu'un champ de vecteurs u^ε appartenant à l'espace $L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))\cap L^2([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$ est une solution turbulente de $(\mathrm{NSC}_\varepsilon)$ si, pour tout champ de vecteurs ϕ dans $\mathcal{C}^\infty([0,T]\times\mathbb{T}^3)$, de divergence nulle, on a

$$\int_{\mathbb{T}^3} u^\varepsilon\cdot\phi(t,x)dx = \int_{\mathbb{T}^3} u_0(x)\cdot\phi(0,x)dx$$
$$-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\Big(-u^\varepsilon\cdot\Delta\phi+\frac{1}{\varepsilon}Lu\cdot\phi-u^\varepsilon\otimes u^\varepsilon:\nabla\phi-u^\varepsilon\cdot\partial_t\phi\Big)dxdt'$$

et si, pour $t\in[0,T]$,

$$\frac{1}{2}\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u^\varepsilon(t')\|_{L^2}^2dt'\leqslant\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Le théorème 2.3.1 de [4] d'existence de solutions turbulentes pour le système (NS) se transpose sans aucune difficulté dans ce cadre grâce à l'antisymétrie dans L^2 de l'opérateur de Coriolis L. D'où le théorème suivant.

***Théorème 5.1.5* (Existence globale de solutions turbulentes)**
Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $L^2(\mathbb{T}^3)$. Pour tout ε positif, il existe une solution turbulente u^ε, au sens de la définition 5.1.4*, associée à u_0 pour tout temps $T\geqslant 0$.*

De même, le théorème de H. Fujita et T. Kato (théorème 2.4.2 de [4]) se généralise sans la moindre difficulté au système (NSC_ε).

Théorème 5.1.6 **(Existence et unicité de solutions dans $H^{1/2}(\mathbb{T}^3)$)**
Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $H^{1/2}(\mathbb{T}^3)$. Il existe un unique temps maximal T_ε^* et une unique solution u^ε dans $L^\infty([0,T];H^{1/2}(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0,T];H^{3/2}(\mathbb{T}^3))$ pour tout $T < T_\varepsilon^*$. De plus, il existe un T strictement positif tel que, pour tout ε strictement positif, on ait $T_\varepsilon^\star \leqslant T$. En outre il existe une constante $c_0 > 0$ (indépendante de ε) telle que pour toute donnée initiale u_0 dans $H^{1/2}(\mathbb{T}^3)$ de norme inférieure à c_0, on ait $T_\varepsilon^* = \infty$.

Il est à noter que la présence de l'opérateur de Coriolis perturbe très fortement les énoncés d'existence et d'unicité globale à données petites dans L^3 ou dans BMO^{-1} (voir (2.4.11) dans [4]). Les énoncés tels que le théorème 2.4.4 sont très probablement faux dans ce contexte.

Nous allons étudier dans cet exposé l'effet stabilisant de la rotation rapide. Le théorème est le suivant.

Théorème 5.1.7 **(Régularité globale pour le système (NSC_ε))**
Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à $H^{1/2}$. Il existe un nombre réel strictement positif ε_0 tel que, pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe une unique solution globale pour (NSC_ε) *dans l'espace*

$$C_b^0(\mathbb{R}^+;H^{1/2}(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+;H^{3/2}(\mathbb{T}^3)).$$

De plus, on a, pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$,

$$\|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^+;H^{1/2})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+;H^{3/2})} \leqslant \|u_0\|^2_{H^{1/2}} \exp(C\|u_0\|^4_{L^2}).$$

Avant d'entrer dans la structure de la démonstration d'un tel théorème, nous allons étudier un cas modèle dans le cadre des équations différentielles ordinaires.

5.2. Étude d'un cas modèle

Soient E un espace hermitien de dimension finie d, A une application linéaire anti-hermitienne de E dans E et B une application bilinéaire (que l'on supposera sans restriction de généralité symétrique) de $E \times E$ dans E. Nous allons étudier l'asymptotique, lorsque ε tend vers 0, de la famille suivante d'équations différentielles ordinaires :

$$(\mathrm{E}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \dot{x}_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} A x_\varepsilon + B(x_\varepsilon, x_\varepsilon) = 0 \\ x_\varepsilon(0) = x_0. \end{cases}$$

On désigne par $(i\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant d}$ les valeurs propres de A et par $(\overrightarrow{e_j})_{1 \leqslant j \leqslant d}$ les vecteurs propres de A. L'application B s'écrit alors

$$B(x, y) = \sum_{j,k,\ell} b^j_{k,\ell} x^k y^\ell \overrightarrow{e_j}. \tag{5.2.1}$$

Introduisons maintenant le concept d'ensemble résonnant.

Définition 5.2.2. L'ensemble résonnant $\mathcal{K}$ est l'ensemble de triplets (j, k, ℓ) de $\{1, \dots, d\}^3$ tels que $\lambda_j = \lambda_k + \lambda_\ell$.

Ceci signifie qu'un triplet (j, k, ℓ) est résonnant si le produit d'une oscillation de mode λ_k par une oscillation de mode λ_ℓ produit une oscillation de mode λ_j.

Nous allons maintenant définir l'application bilinéaire « limite » (nous verrons pourquoi ce terme dans un instant) $\mathcal{B}$.

Définition 5.2.3. L'application bilinéaire limite, notée $\mathcal{B}$ est l'application bilinéaire de $E \times E$ dans E définie par

$$\mathcal{B}(x, y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{(j,k,\ell) \in \mathcal{K}} b^j_{k,\ell} x^k y^\ell \overrightarrow{e_j}.$$

Le théorème décrivant l'asymptotique de la famille d'équations différentielles ordinaires est le suivant.

Théorème 5.2.4. *Soit x_0 un point de E et y la solution maximale du système*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad \begin{cases} \dot{y} + \mathcal{B}(y, y) = 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases} \qquad \textit{sur } [0, T^\star[.$$

Alors, pour tout $T < T^\star$, il existe un ε_0 strictement positif tel que pour tout $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0]$, la solution de (E_ε) est définie sur $[0, T]$ et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [0,T]} \left\| x_\varepsilon(t) - \mathcal{A}(t/\varepsilon) y \right\| = 0,$$

où $\mathcal{A}$ désigne la solution de $\dot{\mathcal{A}} = A\mathcal{A}$ avec $\mathcal{A}(0) = \mathrm{Id}$.

Remarquons que rien ne s'oppose à ce que l'ensemble résonnant soit vide. Par exemple, dans l'espace $\mathbb{R}^2$, prenons

$$A \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le théorème ci-dessus dit simplement que, pour tout x_0 de $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T^\star_\varepsilon(x_0) = \infty \quad \text{et} \quad \forall T,\ \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [0,T]} \big\| x_\varepsilon(t) - \mathcal{A}(t/\varepsilon) x_0 \big\| = 0.$$

On voit que l'on est très loin du temps de vie donné par une estimation de norme euclidienne qui ignorerait la rotation.

Pour démontrer le théorème 5.2.4 nous allons procéder à un « filtrage » des oscillations c'est-à-dire que l'on pose

$$y_\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{A}(-t/\varepsilon) x_\varepsilon(t).$$

Comme $\mathcal{A}$ est un groupe à un paramètre d'isométries, il suffit de démontrer que y_ε converge vers y. Un calcul très simple montre que y_ε est solution de

$$(\widetilde{\mathrm{E}}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \dot{y}_\varepsilon + B_\varepsilon(y_\varepsilon, y_\varepsilon) = 0 \\ y_\varepsilon(0) = x_0 \end{cases}$$

avec

$$B_\varepsilon(y,z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{A}(-t/\varepsilon) B\big(\mathcal{A}(t/\varepsilon)y, \mathcal{A}(t/\varepsilon)z\big).$$

Formons l'équation vérifiée par $\delta_\varepsilon \stackrel{\text{déf.}}{=} y_\varepsilon - y$. On trouve

$$\dot{\delta}_\varepsilon + 2B_\varepsilon(\delta_\varepsilon, y) + B_\varepsilon(\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) = f_\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad f_\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} B_\varepsilon(y,y) - \mathcal{B}(y,y)$$

avec une donnée initiale nulle. Par définition de l'ensemble résonnant, la différence $B_\varepsilon - \mathcal{B}$ est constituée de termes rapidement oscillants en temps ; plus précisément, on a

$$(5.2.5) \qquad f_\varepsilon(t) = \sum_{(j,k,\ell) \notin \mathcal{K}} e^{-i(\lambda_j - \lambda_k - \lambda_\ell)t/\varepsilon} b^j_{k,\ell} y^k y^\ell \overrightarrow{e_j}.$$

Introduisons la quantité

$$\underline{\delta}_\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \delta_\varepsilon + \mathcal{A}(t/\varepsilon) F_\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad F_\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^t f_\varepsilon(t')\,dt'.$$

Notons que bien sûr

$$F_\varepsilon(t) = i\varepsilon \sum_{(j,k,\ell)\notin\mathcal{K}} \frac{e^{-i(\lambda_j-\lambda_k-\lambda_\ell)t/\varepsilon}-1}{\lambda_j-\lambda_k-\lambda_\ell}\, b^j_{k,\ell} y^k y^\ell \overrightarrow{e_j}$$

et donc $\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{t\in[0,T]}\|F_\varepsilon(t)\| = 0$. Ainsi donc, on a

$$\dot{\underline{\delta}}_\varepsilon + 2B_\varepsilon(\underline{\delta}, y) + B_\varepsilon(\underline{\delta}_\varepsilon \underline{\delta}_\varepsilon) = \underline{f}_\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon\to0}\sup_{t\in[0,T]}\|\underline{f}_\varepsilon(t)\| = 0.$$

C'est une exercice laissé au lecteur que de démontrer que le temps de vie $\underline{T}_\varepsilon$ de $\underline{\delta}_\varepsilon$ tend vers $T^\star$ le temps maximal d'existence de y. La fin de la démonstration du théorème 5.2.4 est également laissée au lecteur.

Pour démontrer le théorème 5.1.7, nous allons suivre la même démarche que celle exposée dans le cas modèle ci-dessus. Les étapes seront les suivantes :

(1) définition et étude du système limite et notamment démonstration de l'existence globale de solution régulière pour ce système.

(2) Démonstration de la convergence.

5.3. définition et étude du système limite

5.3.a. définition de l'ensemble résonnant et du système limite

Commençons par étudier l'opérateur L. Sur chaque mode de Fourier, l'opérateur L est donné par la matrice

$$L_n = \frac{1}{|n|^2}\begin{pmatrix} n_1n_2 & n_2^2+n_3^2 & 0 \\ -n_1^2-n_3^2 & -n_1n_2 & 0 \\ n_2n_3 & -n_1n_3 & 0\end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont

$$0,\ in_3/|n| \quad \text{et} \quad -in_3/|n|\cdot$$

Si $n_h \overset{\text{déf.}}{=} (n_1,n_2) \neq 0$, les vecteurs propres correspondants $e_0(n)$, $e^+(n)$ and $e^-(n)$ sont donnés par

$$e_0(n) = {}^t(0,0,1)$$

et $$e^\pm(n) = \frac{1}{\sqrt{2}|n||n_h|}\ {}^t(n_1n_3 \mp in_2|n|, n_2n_3 \pm in_1|n|, -|n_h|^2)$$

et si $n_h = 0$ par

$$e^0(n) ={}^t(0,0,1) \quad \text{et} \quad e^\pm(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1,\pm i,0).$$

Nous travaillons sur des champs de vecteurs de divergence nulle, ce qui se traduit en Fourier par $n \cdot e^{\pm}(n) = 0$. Donc l'espace vectoriel de chaque mode de Fourier est de dimension 2. Les vecteurs $e^{\pm}(n)$ vérifient cette condition. Ainsi, c'est donc eux que nous utiliserons dans tout la suite.

Si a est un champ de vecteurs de divergence nulle, on désignera par $a_\sigma(n)$ la projection de $\widehat{a}(n)$ sur le vecteur $e^\sigma(n)$ parallèlement à $e^{-\sigma}(n)$.

Dans l'esprit des définitions 5.2.2 et 5.2.3, nous allons définir l'ensemble résonnant ainsi que l'application bilinéaire « limite ».

Définition 5.3.1. Pour chaque fréquence n, l'ensemble résonnant est l'ensemble $\mathcal{K}(n)$ des (k, σ) de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \times \{\pm\}^3$ tels que

$$\sigma_1 \frac{k_3}{|k|} + \sigma_2 \frac{n_3 - k_3}{|n-k|} - \sigma_3 \frac{n_3}{|n|} = 0. \tag{5.3.2}$$

L'application bilinéaire « limite » est définie par

$$\mathcal{Q}(a,b) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{F}^{-1} \sum_{(k,\sigma) \in \mathcal{K}_n} \big(a_{\sigma_1}(k) \cdot (n-k)\big)\big(b_{\sigma_2}(n-k) \cdot e^{\sigma_3}(n)\big) e^{\sigma_3}(n). \tag{5.3.3}$$

Comme nous allons le voir, la non-linéarité limite a des propriétés très particulières dues notamment au fait que l'ensemble résonnant est relativement petit. Cette idée prend son origine dans [1]. Cette non-linéarité limite, qui provient du terme $u \cdot \nabla u$ en dimension 3 d'espace possède des propriétés proches de l'opérateur $u \cdot \nabla u$ en dimension 2. Tout d'abord, montrons que cette non-linéarité vérifie l'égalité d'énergie

$$(\mathcal{Q}(u,v) \mid v)_{L^2} = 0. \tag{5.3.4}$$

En utilisant Fourier-Plancherel, le fait que les champs de vecteurs u et v sont réels et la définition de $\mathcal{Q}$, on trouve que

$$(\mathcal{Q}(u,v)|v)_{L^2} = \sum_{(k,n,\sigma) \in \mathcal{K}} u_{\sigma_1}(k) \cdot (n-k)\, v_{\sigma_2}(n-k) \cdot v_{\sigma_3}(-n)$$

avec $\mathcal{K} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(k,n,\sigma) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \times \{\pm\}^3 \mid (k,\sigma) \in \mathcal{K}(n)\}$. Le fait que u soit de divergence nulle implique que

$$(\mathcal{Q}(u,v)|v)_{L^2} = -\sum_{(k,n,\sigma)\in\mathcal{K}} u_{\sigma_1}(k)\cdot(-n)v_{\sigma_3}(-n)\cdot v_{\sigma_2}(n-k).$$

Soit θ définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \times \{\pm\}^3 &\longrightarrow \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \times \{\pm\}^3 \\ (k,n,\sigma) &\longmapsto (k,-n+k,\sigma_1,-\sigma_3,-\sigma_2). \end{aligned}$$

C'est une bijection de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \times \{\pm\}^3$ dans lui-même telle que $\theta(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Il apparaît alors que $(\mathcal{Q}(u,v) \mid v)_{L^2} = -(\mathcal{Q}(u,v) \mid v)_{L^2}$, ce qui démontre (5.3.4).

La petitesse de l'ensemble résonnant est décrite par la proposition suivante.

Proposition 5.3.5. *Soit $K(n)$ l'ensemble des k de $\mathbb{Z}^3$ tels qu'il existe $\sigma \in \{\pm\}^3$ tel que (k,σ) soit dans $\mathcal{K}(n)$. Il existe une constante C_0 telle que, pour tout entier positif j et tout n dans $\mathbb{Z}^3$,*

$$\operatorname{card} K_j(n) \leqslant C_0 2^{2j} \quad \textit{avec } K_j(n) \stackrel{\text{déf.}}{=} K(n) \cap \{k \in \mathbb{Z}^3 \mid 2^j \leqslant |k| \leqslant 2^{j+1}\}.$$

Pour démontrer cela, il suffit d'observer (par un calcul omis) que

$$\prod_{\sigma\in\{+,-\}^3} \left(\sigma_1 \frac{k_3}{|k|} + \sigma_2 \frac{\widetilde{n}_3 - k_3}{|n-k|} - \sigma_3 \frac{n_3}{|n|}\right) = 0$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \Big(k_3^2|k-n|^2|n|^2 + (n_3-k_3)^2|k|^2|n|^2 - n_3^2|k-n|^2|k|^2\Big)^2 \\ = 4k_3^2(n_3-k_3)^2|k|^2|n-k|^2|n|^4. \end{aligned}$$

Cette expression est un polynôme de degré 8 en k_3. Donc, l'ensemble $K_j(n)$ contient au plus $8 \times \operatorname{card}(B(0,2^j) \cap \mathbb{Z}^2)$ éléments. D'où la proposition.

5.3.b. Existence et stabilité globales pour le système limite

Cette relative petitesse de l'ensemble résonnant est la clef pour démontrer le théorème d'existence et unicité globale suivant.

Théorème 5.3.6. *Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle de $L^2(\mathbb{T}^3)$. Il existe une unique solution u de*

$$\text{(NSCL)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathcal{Q}(u,u) = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

dans l'espace $C_b(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1)$, où C_b désigne l'ensemble des fonctions continues, bornées. De plus, si u_0 appartient à $H^{1/2}(\mathbb{T}^3)$, alors u appartient à $C_b(\mathbb{R}^+; H^{1/2}) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^{3/2})$.

L'idée de la démonstration est la suivante. La petitesse relative de l'ensemble résonnant fait que la non-linéarité se comporte comme en dimension 2 d'espace. Plus précisément, on a la proposition suivante, que nous admettrons pour l'instant.

Proposition 5.3.7. *Soit (α, β) un couple de nombres réels tels que*

$$\alpha + \beta > 0 \quad \textit{et} \quad (\alpha, \beta) \in]-\infty, 1[.$$

Alors on a

$$\|\mathcal{Q}(a,b)\|_{H^{\alpha+\beta-2}} \leqslant \|a\|_{H^\alpha} \|b\|_{H^\beta}.$$

Grâce à l'estimation d'énergie (5.3.4), on peut démontrer par compacité l'existence globale de solutions dans l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1)$, comme expliqué au paragraphe 2.3 de [4]. Pour démontrer l'unicité, on écrit que, si u et v sont deux solutions de (NSCL), on a en posant $w = u - v$,

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + \mathcal{Q}(u,w) = \mathcal{Q}(w,v) \\ w_{|t=0} = u_0 - v_0. \end{cases}$$

Par estimation d'énergie, on a, d'après (5.3.4),

$$\text{(5.3.8)} \quad \frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2} dt' = \|w_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \big(\mathcal{Q}(w(t'), v(t')) \mid w(t')\big)_{L^2} dt'.$$

La proposition 5.3.7 appliquée avec $\alpha = \beta = 1/2$ assure que

$$\big(\mathcal{Q}(w(t'), v(t')) \mid w(t')\big)_{L^2} \leqslant C\|w(t')\|_{H^{1/2}}\|v(t')\|_{H^{1/2}}\|\nabla w(t')\|_{H^{1/2}}.$$

Par interpolation, on trouve que

$$\begin{aligned}&\big(\mathcal{Q}(w(t'), v(t')) \mid w(t')\big)_{L^2}\\ &\qquad\qquad \leqslant C\|\nabla w(t')\|_{L^2}^{3/2}\|v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|w(t')\|_{L^2}^{1/2}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de convexité

$$ab \leqslant \frac{3}{4}a^{4/3} + \frac{1}{4}b^4,$$

on trouve que

$$\begin{aligned}&\big(\mathcal{Q}(w(t'), v(t')) \mid w(t')\big)_{L^2}\\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 + C\|v(t')\|_{L^2}^2\|\nabla v(t')\|_{L^2}^2\|w(t')\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Appliqué à (5.3.8), ceci donne, grâce au fait que $\|v(t)\|_{L^2}$ est décroissante,

$$\begin{aligned}&\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt'\\ &\qquad\qquad \leqslant \|w_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2\|w(t')\|_{L^2} dt'.\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall joint à l'estimation d'énergie sur v assure que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \leqslant \|w_0\|_{L^2}^2 \exp\big(C\|v_0\|_{L^2}^4\big).$$

Remarquons que l'on a démontré mieux que de l'unicité, à savoir de la stabilité, c'est-à-dire que la solution était une fonction continue et même lipschitzienne de la donnée initiale.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, il suffit (à une régularisation omise près) de procéder à une estimation d'énergie dans $H^{1/2}$. Toujours en appliquant la proposition 5.3.7 avec $\alpha = \beta = 1/2$, on trouve que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{H^{1/2}} &+ \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{H^{1/2}} dt' \\
&\leqslant \|u_0\|^2_{H^{1/2}} + C\int_0^t \|u(t')\|_{H^{1/2}}\|\nabla u(t')\|_{H^{1/2}}\|\nabla u(t')\|^2_{L^2} dt' \\
&\leqslant \|u_0\|^2_{H^{1/2}} + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{H^{1/2}} dt' \\
&\qquad\qquad + C\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2}\|\nabla u(t')\|^2_{H^{1/2}} dt.
\end{aligned}
$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure que

$$\|w(t)\|^2_{H^{1/2}} + \int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{H^{1/2}} dt' \leqslant \|u_0\|^2_{H^{1/2}} \exp\big(C\|u_0\|^4_{L^2}\big).$$

Démonstration de la proposition 5.3.7. Elle repose essentiellement sur le lemme suivant, appliqué à $\gamma = 2$ par la proposition 5.3.5.

Lemme 5.3.9. *Considérons une suite $K(n)$ de parties de $\mathbb{Z}^3$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}^3 \smallsetminus \{0\}$, on ait*

$$k \in K(n) \Longrightarrow \Big(n-k \in K(n) \text{ et } n \in K(k)\Big).$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$K_j(n) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{k \in \mathbb{Z}^3 \smallsetminus \{0\} / 2^j \leqslant |k| < 2^{j+1} etk \in K(n)\right\}.$$

Supposons qu'il existe un nombre γ positif et une constante C_0 tels que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^3\smallsetminus\{0\}} \operatorname{card} \mathcal{K}_j(n) \leqslant C_0 2^{j\gamma}. \tag{5.3.10}$$

Alors, pour tout couple (α,β) de $]-\infty,\gamma/2[^2$ tel que $\alpha+\beta$ soit strictement positif, il existe une constante C telle que

$$\sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{Z}^6\\ k\in K(n)}} |\widehat{a}(k)||\widehat{b}(n-k)||\widehat{c}(n)| \leqslant C\|a\|_{H^\alpha(\mathbb{T}^3)}\|b\|_{H^\beta(\mathbb{T}^3)}\|c\|_{H^{\gamma/2-\alpha-\beta}(\mathbb{T}^3)}.$$

Remarque. L'hypothèse est toujours vérifiée avec $\gamma = 3$ (en fait la dimension d'espace) et dans ce cas, il s'agit des lois de produit entre espaces de Sobolev.

Pour démontrer le lemme, on s'inspire de la procédure de décomposition en paraproduit et reste de J.-M. Bony (voir [2]), c'est-à-dire que l'on compare la taille respective des fréquences k, $n-k$ et n. Plus précisément, on écrit, grâce aux propriétés de symétrie des ensembles $K(n)$,

$$\sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{Z}^6\\ k\in K(n)}} |\widehat{a}(k)||\widehat{b}(n-k)||\widehat{c}(n)| = \sum_{(j,\ell,q)\in\mathbb{N}^3} \sum_{\substack{n-k\in K_\ell(n)\\ k\in\mathcal{K}_j(n), n\in K_q(k)}} |\widehat{a}(k)||\widehat{b}(n-k)||\widehat{c}(n)|,$$

Considérons les trois cas suivants.

(1) $j\leqslant \ell-2$, ce qui implique que $\ell-1\leqslant q<\ell+2$

(2) $\ell\leqslant j-2$, ce qui implique que $j-1\leqslant q<j+2$

(3) $\ell-1\leqslant j\leqslant \ell+1$, ce qui implique que $q\leqslant j+2$.

Le cas (2) se ramène au cas (1) en échangeant les rôles de a et b et le cas (3) se ramène au cas (1) en échangeant les rôles de a et c. Pour traiter le cas (1), on utilise que $|n-k|\sim 2^\ell$ si $n-k$ est dans $\mathcal{K}_\ell(n)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j\leqslant \ell-2\\ \ell-1\leqslant q<\ell+2}} \sum_{\substack{k\in K_j(n), n\in K_q(k)\\ n-k\in K_\ell(n)}} |\widehat{a}(k)||\widehat{b}(n-k)||\widehat{c}(n)|\\
&\leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{\substack{j\leqslant \ell-2\\ \ell-1\leqslant q<\ell+2}} \Big(\sum_{2^{\ell-1}\leqslant|n|<2^{\ell+2}} |\widehat{c}(n)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sup_n \sum_{k\in K_j(n)} |k|^{-2\alpha}\Big)^{1/2}\\
&\qquad\times \Big(\sum_{\substack{2^{\ell-1}\leqslant|n|<2^{\ell+2}\\ k\in K_j(n)}} |k|^{2\alpha}|\widehat{a}(k)|^2|\widehat{b}(n-k)|^2|n-k|^{2\beta}\Big)^{1/2} 2^{-\ell\beta},
\end{aligned}$$

La définition de $K_j(n)$ et la majoration de son cardinal assurent que

$$\Big(\sum_{k\in K_j(n)} |k|^{-2\alpha}\Big)^{1/2} \leqslant C_{\alpha,\beta} 2^{j(\gamma/2-\alpha)}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&2^{-\ell\beta}\Big(\sum_{2^{\ell-1}\leqslant|n|<2^{\ell+2}} |\widehat{c}(n)|^2\Big)^{1/2}\\
&\qquad\leqslant C_{\alpha,\beta}\Big(\sum_{2^{\ell-1}\leqslant|n|<2^{\ell+2}} |n|^{\gamma-2\alpha-2\beta}|\widehat{c}(n)|^2\Big)^{1/2} 2^{-\ell(\gamma/2-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que

$$\sum_{\substack{j\leqslant \ell-2\\ \ell-1\leqslant q<\ell+2}} \sum_{\substack{k\in K_j(n), n\in\mathcal{K}_q(k)\\ n-k\in K_\ell(n)}} |\widehat{a}(k)||\widehat{b}(n-k)||\widehat{c}(n)|$$
$$\leqslant C_{\alpha,\beta} \sum_{j\leqslant \ell-2} \Big(\sum_{k\in K_j(n)} |\widehat{a}(k)|^2|k|^{2\alpha}\Big)^{1/2}$$
$$\times 2^{(j-\ell)(\gamma/2-\alpha)}\|b\|_{H^\beta(\mathbb{T}^3)}\|c\|_{H^{\gamma/2-\alpha-\beta}(\mathbb{T}^3)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'hypothèse que $\alpha < \gamma/2$, on conclut la démonstration de ce premier cas et ainsi le lemme.

Cela démontre le théorème 5.3.6.

5.4. Démonstration de la convergence vers la solution du système limite

On procède comme dans le cas modèle exposé au paragraphe 5.2, aux modifications près dues au fait que l'on travaille sur des équations aux dérivées partielles et non sur des équations différentielles ordinaires.

Soit v la solution globale de (NSCL) avec donné initiale u_0 donnée par le théorème 5.3.6. Pour une fonction (ou un champ de vecteurs) a et N un entier positif on pose

$$a_N \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{F}^{-1}\mathbf{1}_{|n|\leqslant N}\widehat{a}.$$

La proposition 5.3.7 implique que l'application bilinéaire $\mathcal{Q}$ est continue

$$L^4(\mathbb{R}^; H^1)\times L^4(\mathbb{R}^+;H^{1/2}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+;H^{1/2}),$$
$$L^4(\mathbb{R}^+;H^{1/2})\times L^4(\mathbb{R}^+;H^{1}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+;H^{1/2})$$
et
$$L^\infty(\mathbb{R}^+;H^{1/2})\times L^2(\mathbb{R}^+;H^{3/2}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^+;L^2).$$

Il en résulte que, si $R_N \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{Q}(v,v)_N - \mathcal{Q}(v,v)$, alors on a

$$\begin{cases} \partial_t v_N - \Delta v_N + \mathcal{Q}(v_N,v_N) = f_N \\ v_{N|t=0} = u_{0,N} \end{cases} \tag{5.4.1}$$

avec $\|f_N\|_{L^2(\mathbb{R}^+;H^{-1/2})} \leqslant C_v N^{-1/2}$. De manière analogue à la formule (5.2.5), on introduit

$$
\begin{aligned}
g^\varepsilon_{\mathrm{osc},N} &\stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(-t/\varepsilon)\,\mathbb{P}\Big(\mathcal{L}(t/\varepsilon)\,v_N\cdot\nabla\,\mathcal{L}(t/\varepsilon)\,v_N\Big) - \mathcal{Q}(v_N,v_N)\\
&= \mathcal{F}^{-1} \sum_{\substack{|k|,|n-k|\leqslant N\\ (k,\sigma)\notin\mathcal{K}_(n)}} e^{i\frac{t}{\varepsilon}\left(\frac{\sigma_1 k_3}{|k|}+\frac{\sigma_2(n_3-k_3)}{|n-k|}-\frac{\sigma_3 n_3}{|n|}\right)} \qquad (5.4.2)\\
&\qquad\times u_{N,\sigma_1}(k)\cdot(n-k)\,v_{N,\sigma_2}(n-k)\cdot v_{N,\sigma_3}(n)e^{\sigma_3}(n).
\end{aligned}
$$

Le terme $g^\varepsilon_{\mathrm{osc},N}$ est une somme *finie* de termes oscillants. Introduisons alors

$$
u^\varepsilon_{\mathrm{app},N} \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(t/\varepsilon)\,v_N + \widetilde{G}^\varepsilon_N
$$

avec

$$
\widetilde{G}^\varepsilon_N \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(t/\varepsilon)\,G_{\mathrm{osc},N}(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(t/\varepsilon)\int_0^t g^\varepsilon_{\mathrm{osc},N}(t')dt'.
$$

Comme la fonction $G_{\mathrm{osc},N}$ est à valeurs dans un espace de dimension finie (mais qui tend vers l'infini lorsque N tend vers l'infini), et que $G^\varepsilon_{\mathrm{osc},N}$ est une intégrale de fonctions très oscillantes, on a

$$
\forall\sigma\in\mathbb{R},\ \forall T\in\mathbb{R}^+,\ \forall N\in\mathbb{N},\ \lim_{\varepsilon\to 0}\|G_{\mathrm{osc},N}\|_{L^\infty([0,T];H^\sigma)} = 0. \qquad (5.4.3)
$$

La famille $(u^\varepsilon_{\mathrm{app},N})$ ainsi construite satisfait à

$$
\begin{cases}
\partial_t u^\varepsilon_{\mathrm{app},N} - \Delta u^\varepsilon_{\mathrm{app},N} + \mathbb{P}(u^\varepsilon_{\mathrm{app},N}\cdot\nabla u^\varepsilon_{\mathrm{app},N}) + \dfrac{1}{\varepsilon}Lu^\varepsilon_{\mathrm{app},N}\\
\qquad\qquad = \mathcal{L}(t/\varepsilon)\,f_N + E_{N,\varepsilon}\\
u^\varepsilon_{\mathrm{app},N|t=0} = (u_0)_N
\end{cases}
$$

avec

$$
E_{N,\varepsilon} \stackrel{\text{déf.}}{=} -\mathbb{P}\big(\widetilde{G}^\varepsilon_N.\nabla u^\varepsilon_{\mathrm{app},N} + u^\varepsilon_{\mathrm{app},N}\cdot\nabla\widetilde{G}^\varepsilon_N + \widetilde{G}^\varepsilon_N\cdot\nabla\widetilde{G}^\varepsilon_N\big) + \Delta\widetilde{G}^\varepsilon_N.
$$

Comme les approximations vivent dans des espaces vectoriels de dimension finie, on a, d'après (5.4.3),

$$
\forall T\in\mathbb{R}^+,\ \forall N\in\mathbb{N},\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|E_{N,\varepsilon}\|_{L^2([0,T];H^{-1/2})} = 0. \qquad (5.4.4)
$$

Formons la différence $\delta_{N,\varepsilon} \stackrel{\text{déf.}}{=} u_\varepsilon - u^\varepsilon_{\mathrm{app},N}$. Un calcul algébrique des plus simples donne

$$\partial_t \delta_{N,\varepsilon} - \Delta \delta_{N,\varepsilon} + \mathbb{P}(\delta_{N,\varepsilon} \cdot \nabla \delta_{N,\varepsilon}) \\ + \mathbb{P}(u^\varepsilon_{\text{app},N} \cdot \nabla \delta_{N,\varepsilon} + \delta_{N,\varepsilon} \cdot \nabla u^\varepsilon_{\text{app},N}) + \frac{1}{\varepsilon} L \delta_{N,\varepsilon} = \mathcal{L}(t/\varepsilon)\, f_N + E_{N,\varepsilon}$$

avec $\delta_{N,\varepsilon} \stackrel{\text{déf.}}{=} u_0 - u_{0,N}$. Des estimations analogues à celles de la démonstration du théorème 2.4.2 de [4] impliquent que pour tout $T < T^\star_\varepsilon$, on a

$$\|\delta_{N,\varepsilon}\|^2_{L^\infty_T(H^{1/2})} + \|\delta_{N,\varepsilon}\|^2_{L^2_T(H^{3/2})} \\ \leqslant \Big(\|u_0 - u_{0,N}\|^2_{H^{1/2})} + \|E_{N,\varepsilon}\|^2_{L^2(0,T];H^{-1/2})}\Big) \exp(\|v\|^4_{L4(\mathbb{R}^+;H^1)}) \\ \leqslant CN^{-1/2} + C\|E_{N,\varepsilon}\|_{L^2(0,T];H^{-1/2})} \exp C(\exp C\|u_0\|^4_{L^2}).$$

On en conclut que $T^\star_\varepsilon = \infty$, et la fin de la démonstration du théorème 5.1.7 suit facilement.

Références

[1] A. Babin, A. Mahalov & B. Nicolaenko – « Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains », *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999), no. 3, p. 1133–1176.

[2] J.-M. Bony – « Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (1981), no. 2, p. 209–246.

[3] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher & E. Grenier – *Mathematical geophysics. An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*, Oxford Lecture Series in Math. and its Applications, vol. 32, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.

[4] I. Gallagher – « Le problème de Cauchy pour les équations de navier-stokes », in *Facettes mathématiques de la mécanique des fluides*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2010, ce volume.

[5] J. Pedlosky – *Geophysical fluid dynamics*, 2e éd., Springer-Verlag, New York, 1987.

Jean-Yves Chemin, Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598, Université Pierre et Marie Curie, 75230 Paris Cedex 05, France
E-mail : chemin@math.univ-lyon1.fr