Journées mathématiques X-UPS

Année 2010

Facettes mathématiques de la mécanique des fluides

Isabelle Gallagher

Le problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes

Journées mathématiques X-UPS (2010), p. 25-59.
https://doi.org/10.5802/xups.2010-02

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2010, p. 25–59 doi: 10.5802/xups.2010-02

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

par

Isabelle Gallagher

Résumé. Ce texte est dévolu à l'exposition de plusieurs résultats liés à la résolution des équations de Navier-Stokes : nous présentons différentes notions de solutions et montrons quel type de théorème d'existence et d'unicité peut être obtenu dans ces différents cadres. Nous mettons en évidence en particulier la différence entre la dimension 2 d'espace (ou l'équation est *critique*) et la dimension 3 (l'équation est *surcritique*). Nous faisons un lien entre les différents types de solution, et enfin quelques résultats qualitatifs sur le comportement des solutions (en grand temps ou au voisinage de l'explosion éventuelle) sont présentés.

Table des matières

Dans ce texte nous nous intéressons à la résolution du problème de Cauchy pour les équations de Navier-Stokes. Plus précisément nous

Publication originelle dans Journées X-UPS 2010. Facettes mathématiques de la mécanique des fluides. Éditions de l'École polytechnique, 2010.

considérons le système suivant (la viscosité ν de l'exposé précédent a été fixée égale à 1 pour alléger les notations) :

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

et nous cherchons à déterminer sous quelles hypothèses sur le champ de vitesses initial u_0 l'on peut construire une solution (u, p) – rappelons que $u = u(t, x)$ est un vecteur à d composantes représentant la vitesse et $p = p(t, x)$ est une fonction représentant la pression du fluide. Ces deux inconnues dépendent du temps $t \geqslant 0$ et de la variable d'espace x que nous choisirons dans l'espace entier $\mathbb{R}^d$. Dans la section 2.1 suivante nous effectuons quelques calculs formels préliminaires, qui nous permettront de mieux cerner le rôle de chacun des termes de ce système, et nous donneront une intuition sur les diverses notions naturelles de solutions associées à ce système. Ces définitions sont données dans la section 2.2. Les sections 2.3 et 2.4 sont consacrées à la construction de deux types de solutions, que nous nommerons respectivement « solutions turbulentes » et « solutions d'échelle ». La section 2.5 s'attache à faire le lien entre ces deux notions de solutions. Dans la section 2.6 nous montrons par quelques exemples que l'on peut aller au-delà des techniques classiques présentées auparavant afin de produire des solutions globales dans des cas où les théorèmes généraux ne donnent que des solutions locales. Enfin les sections 2.7 et 2.8 sont consacrées à l'étude qualitative des solutions en très grand temps, ou au contraire au voisinage du temps éventuel d'explosion.

2.1. Quelques remarques préliminaires

Dans ce paragraphe nous allons développer quelques calculs formels portant sur les solutions de (NS). Ces calculs seront rendus rigoureux au paragraphe 2.3.

La première partie consiste à remarquer que la pression peut se recalculer à partir du champ de vitesses ; à partir de là, seule la vitesse sera réellement considérée comme une inconnue.

Dans la seconde partie nous montrons la conservation formelle de l'énergie pour (NS), alors que la troisième est dévolue à des considérations d'échelle des solutions.

Enfin la dernière partie de ce paragraphe fait le lien entre ces deux aspects, ce qui permet de dégager les notions de « criticalité » d'une équation aux dérivées partielles d'évolution.

2.1.a. Calcul de la pression. Appliquons (formellement) l'opérateur divergence à (NS). En utilisant le fait que u est de divergence nulle, il apparaît que

$$\operatorname{div}(u \cdot \nabla u) = -\Delta p,$$

ce qui, en appliquant la formule de Leibniz, conduit à

$$p = (-\Delta)^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (u^i u^j). \tag{2.1.1}$$

On rappelle que l'opérateur inverse du laplacien a été introduit en (1.2.11). Dès lors, la pression peut être considérée comme une fonction de la vitesse, et la résolution du problème de Cauchy va consister à déduire u de la connaissance de u_0.

2.1.b. Égalité d'énergie. Supposons que u est une fonction régulière (de t et de x) solution de (NS). Nous pouvons effectuer le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de u avec les deux membres de la première équation intervenant dans (NS) (celle correspondant à la conservation de la quantité de mouvement), ce qui donne

$$(\partial_t u \mid u)_{L^2} + (u \cdot \nabla u \mid u)_{L^2} - (\Delta u \mid u)_{L^2} = -(\nabla p \mid u)_{L^2}\,. \tag{2.1.2}$$

Le premier terme se ré-écrit naturellement

$$(\partial_t u \mid u)_{L^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2.$$

Le troisième, après une intégration par parties et en supposant que u décroît vers zéro à l'infini, devient

$$-(\Delta u \mid u)_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Une intégration par parties permet également d'écrire que

$$-(\nabla p \mid u)_{L^2} = (p \mid \operatorname{div} u)_{L^2} = 0.$$

Reste donc à calculer le terme $(u \cdot \nabla u \mid u)_{L^2}$. On a

$$\begin{aligned}(u \cdot \nabla u \mid u)_{L^2} &= \sum_{j,k} \int u^j (\partial_j u^k) u^k dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \int u^j \partial_j |u|^2 dx,\end{aligned}$$

ce qui, après une intégration par parties, fournit

$$(u \cdot \nabla u \mid u)_{L^2} = -\frac{1}{2} \int \operatorname{div} u \, |u|^2 dx = 0.$$

Finalement en revenant à (2.1.2) on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = 0,$$

ce qui, après intégration en temps, implique que pour tout $t \geqslant 0$, la solution $u(t)$ produite par une donnée u_0 vérifie (formellement)

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Nous en déduisons que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}$ est décroissante. La norme $\|u(t)\|_{L^2}$ représente l'énergie de notre système, qui est donc contrôlée au cours de l'évolution, par l'énergie initiale. En outre cette égalité permet d'anticiper l'« effet régularisant » suivant : dès que la donnée initiale est choisie dans l'espace d'énergie L^2, alors la solution est instantanément régularisée au sens où ∇u appartient à $L^2(\mathbb{R}^+; L^2)$. De manière générale nous utiliserons la notation $L^p([0,T]; X)$, où X est un espace de Banach, pour désigner l'espace défini par la norme

$$\|f\|_{L^p([0,T];X)} \stackrel{\text{déf.}}{=} \left(\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}.$$

2.1.c. Invariance d'échelle. Une équation aux dérivées partielles d'évolution est dite invariante d'échelle s'il existe deux paramètres α et β tels que pour tout $\lambda > 0$, on ait le résultat suivant : si le champ de vecteurs initial $u_0(x)$ génère une solution $u(t,x)$, alors la solution associée à la donnée remise à l'échelle $\lambda^\alpha u_0(\lambda x)$ est $\lambda^\alpha u(\lambda^\beta t, \lambda x)$. Dans le cas de (NS), un calcul immédiat fournit que $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

sont les seules possibilités. On retiendra donc que si u est une solution de (NS) sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, alors

$$u_\lambda(t,x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

est une solution de (NS) sur $[0,\lambda^{-2}T]\times\mathbb{R}^d$ (pour la donnée remise à l'échelle).

2.1.d. Caractère critique d'une équation aux dérivées partielles d'évolution

Donnons quelques exemples d'espaces fonctionnels invariants d'échelle pour (NS), c'est-à-dire d'espaces dont la norme est invariante par la transformation $u\mapsto u_\lambda$. L'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+;L^d(\mathbb{R}^d))$ en est un, ainsi plus généralement que l'espace $L^q(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^d))$ avec $2/q+d/r=1$. On remarque aussi que l'espace $L^q(\mathbb{R}^+;\dot H^s(\mathbb{R}^d))$ est invariant d'échelle si $(2/q)-s=1-d/2$, où l'espace de Sobolev $\dot H^s$ est défini par

$$\dot H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_{\dot H^s}<\infty \right\}, \tag{2.1.3}$$

avec
$$\|f\|_{\dot H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat f(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

et la transformée de Fourier est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \widehat f(\xi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Par contre si l'on résout (NS) dans l'espace d'énergie L^2, la quantité contrôlée a priori est

$$L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^2(\mathbb{R}^+;\dot H^1(\mathbb{R}^d)). \tag{2.1.4}$$

En deux dimensions d'espace on remarque que l'espace

$$L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^2))\cap L^2(\mathbb{R}^+;\dot H^1(\mathbb{R}^2))$$

est précisément un espace invariant par changement d'échelle. Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles font ainsi partie de la catégorie des « équations critiques » dans le sens où les normes conservées sont invariantes d'échelle. Une « équation sous-critique » en revanche correspond au cas où la quantité conservée est « plus régulière » que la régularité donnée par l'invariance d'échelle ; c'est en général le cas le plus favorable pour résoudre une équation. Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles (et plus généralement

d-dimensionnelles avec $d \geqslant 3$) sont donc dans la famille des « équations sur-critiques », puisque l'on ne contrôle a priori que la norme donnée par l'espace (2.1.4), alors qu'un espace invariant d'échelle est par exemple

$$L^\infty(\mathbb{R}^+; L^d(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)).$$

C'est d'ailleurs la raison essentielle pour laquelle on a tant de mal à les résoudre, comme ce sera apparent dans la suite.

2.2. Différentes notions de solutions

Au vu des remarques formulées dans les paragraphes 2.1.b et 2.1.c ci-dessus, plusieurs cadres fonctionnels dans lesquels choisir la donnée initiale semblent naturels : d'une part on peut chercher à tirer parti de la conservation de l'énergie en choisissant la donnée initiale (et la solution) dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et d'autre part l'on peut chercher à utiliser l'invariance d'échelle et choisir la donnée et la solution dans un espace fonctionnel invariant par la transformation $u \mapsto u_\lambda$. Rappelons qu'en deux dimensions d'espace, ces deux notions se rejoignent puisque $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$ est invariant par cette transformation (voir le paragraphe 2.1.d ci-dessus).

La première étape de l'étude du problème de Cauchy consiste à donner un sens, le moins contraignant possible, à la notion de solution à (NS). Les définitions suivantes sont inspirées de [5]. La première fournit une notion de solution faible. On renvoie à la définition 1.2.12 du chapitre précédent [4] pour une définition analogue dans le cadre des équations d'Euler.

***Définition 2.2.1* (Solution faible).** On dit qu'un champ de vecteurs u dans $L^2_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ est une *solution faible* de (NS) associée à la distribution donnée initiale u_0 si pour tout champ de vecteurs ϕ dans $\mathcal{C}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ à support compact en espace, de divergence nulle, on a pour tout $t \leqslant T$

$$(2.2.1)(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi(t,x)dx = \int u_0(x) \cdot \phi(0,x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \Delta\phi + u \otimes u : \nabla\phi + u \cdot \partial_t \phi)dxdt'.$$

L'écriture (2.2.1)($*$) se nomme parfois *formulation variationnelle* de l'équation de Navier-Stokes (voir (1.2.14) et (1.2.15) pour la notation). On reviendra sur cette terminologie dans l'exposé « Interaction fluide-solide ».

Cette définition ne prend en compte ni la conservation de l'énergie, ni l'invariance d'échelle de l'équation, et ne semble pas suffisante pour une construire une solution. Nous introduisons alors, en suivant la terminologie de J. Leray [17], la définition ci-dessous qui utilise la conservation de l'énergie (en fait seulement une inégalité). La terminologie est due à J. Leray : le terme «turbulent» traduit la très faible régularité a priori de la solution.

Définition 2.2.2 **(Solution turbulente).** On dit qu'un champ de vecteurs u appartenant à l'espace $L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^d))$ est une *solution turbulente* de (NS) associée à la donnée initiale u_0 dans L^2 si u est une solution faible telle que pour tout $t\in[0,T]$,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u(t')\|_{L^2}^2dt'\leqslant\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

Nous verrons dans le paragraphe 2.3 suivant qu'il est possible de construire des solutions turbulentes associées à toute donnée initiale $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$, pour tout temps $T\geqslant 0$. Ce résultat remonte aux travaux de J. Leray [17]. Malheureusement l'unicité de telles solutions demeure aujourd'hui un problème ouvert en général (dès que $d\geqslant 3$ et sans hypothèse de régularité supplémentaire sur la donnée initiale, ou de régularité a priori de la solution). L'obtention d'une solution unique se fait par une approche différente, qui repose justement sur le principe d'invariance d'échelle remarqué au-dessus (cette approche est décrite au paragraphe 2.4). Introduisons donc une dernière notion de solution. Celle-ci repose sur la définition d'un espace invariant d'échelle.

Définition 2.2.3 **(Espaces invariants d'échelle).** Soit $(X_T)_{T>0}$ une famille d'espaces de Banach de distributions définies sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$. On dit que cette famille est invariante d'échelle si pour tout temps $T>0$ on a

$$\forall\lambda>0,\quad\begin{cases}u\in X_T\Leftrightarrow u_\lambda\in X_{\lambda^{-2}T},\\ \|u\|_{X_T}=\|u_\lambda\|_{X_{\lambda^{-2}T}}\end{cases}$$

La notion de solution d'échelle s'écrit alors en termes des « hautes fréquences » (spatiales) de u, puisqu'on ne considère que le support de la transformée de Fourier de u suffisamment loin de zéro – le fait de tronquer ainsi la transformée de Fourier permet de ne pas considérer la partie la plus régulière (les « basses fréquences » de la solution, qui sont infiniment régulières, comme indiqué par exemple dans (2.3.2) ci-dessous).

Définition 2.2.4 **(Solution d'échelle).** On dit qu'un champ de vecteurs u est une *solution d'échelle* de (NS) associée à la donnée initiale u_0 si c'est une solution faible telle qu'il existe une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact, égale à 1 près de 0, telle que

$$\mathcal{F}^{-1}\left((1-\chi)\widehat{u}\right) \in X_T$$

où X_T appartient à une famille d'espaces invariants d'échelle.

Nous verrons au paragraphe 2.4 différents modes de construction de telles solutions.

2.3. Existence globale de solutions turbulentes

Ce paragraphe est dévolu à une esquisse de démonstration de l'existence de solutions turbulentes (au sens de la définition 2.2.2). Le théorème suivant est dû à J. Leray [17]. Il est fondamental à plusieurs titres : d'une part sa démonstration est typique de ce genre de résultat et peut être adapté à un grand nombre de situations ; d'autre part c'est l'un des seuls théorèmes d'existence globale sans condition pour les équations de Navier-Stokes, et ce résultat est resté essentiellement le seul théorème d'existence pour les équations de Navier-Stokes pendant soixante ans après sa démonstration (le suivant étant le théorème de Fujita-Kato présenté dans la section suivante).

Théorème 2.3.1 **(Existence globale de solutions turbulentes)**

Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il existe une solution turbulente u, au sens de la définition 2.2.2*, pour tout temps $T \geqslant 0$.*

Donnons des éléments de démonstration de ce théorème, qui se fait en cinq étapes :

(1) résolution globale d'un système approché ;
(2) obtention d'estimations a priori sur la suite de solutions approchées, et de résultats de compacité ;
(3) passage à la limite ;
(4) vérification de l'équation au sens faible ;
(5) vérification de l'inégalité d'énergie.

2.3.a. Résolution globale d'un système approché. La première étape de la démonstration consiste à définir un système approché à (NS) pour lequel un argument d'équations différentielles ordinaires permettra de conclure à l'existence de solutions. Pour cela on définit un opérateur de régularisation par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n u \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{|\cdot| \leqslant n} \widehat{u}).$$

Cet opérateur est en effet régularisant puisque l'égalité de Plancherel permet d'écrire facilement, pour tout $s \geqslant 0$:

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|J_n u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+n)^s \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.3.2}$$

D'autre part on a par le théorème de Lebesgue, pour tout $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n\to\infty} \|J_n u - u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

On peut ainsi définir le système approché suivant (où l'on a utilisé la formulation (2.1.1) pour la pression) :

$$(\mathrm{NS}_n) \qquad \begin{cases} \partial_t u_n + J_n \operatorname{div}(J_n u_n \otimes J_n u_n) - J_n \Delta J_n u_n \\ \qquad = -J_n \nabla(-\Delta)^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (J_n u_n^i J_n u_n^j) \\ \operatorname{div} u_n = 0 \\ u_{n|t=0} = J_n u_0 \end{cases}$$

qui est en fait une équation différentielle ordinaire dans l'espace

$$L^2_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid J_n u = u\}.$$

En effet, par (2.3.2) on peut transformer (NS_n) en l'EDO

$$\partial_t u_n = F(u_n).$$

On remarque alors que

$$\|J_n \Delta J_n u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+n)^2 \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

et que

$$
\begin{aligned}
\|J_n \operatorname{div}(J_n u_n \otimes J_n u_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} & \\
+ \|J_n \nabla(-\Delta)^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (J_n u_n^i J_n u_n^j)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} & \\
\leqslant C(1+n) \sum_{i,j} \|J_n u_n^i J_n u_n^j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} & \\
\leqslant C(1+n) \|J_n u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|J_n u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} & \\
\leqslant C_n \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &
\end{aligned}
$$

car $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > d/2$ (cela s'obtient simplement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > d/2$, alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$). Donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution u_n à (NS_n), par exemple dans $C^1([0, T_n^*[; L^2_n)$, et le temps maximal T_n^* vérifie

$$
T_n^* < \infty \Longrightarrow \|u_n(T_n^*)\|_{L^2_n} = \infty. \tag{2.3.3}
$$

On a donc en particulier $J_n u_n = u_n$.

2.3.b. Estimations a priori et compacité de la suite de solutions approchées. Le champ de vecteurs u_n construit ci-dessus est régulier et décroît à l'infini en espace (puisqu'il est à support compact en fréquences), donc on peut justifier tous les calculs du paragraphe 2.1.b, qui fournissent directement l'estimation

$$
\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\nabla u_n(t')\|^2_{L^2} dt' = \frac{1}{2}\|J_n u_0\|^2_{L^2} \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}.
$$

On en conclut par (2.3.3) que $T_n^* = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $u_n \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2)$ vérifie la borne a priori

$$
\frac{1}{2}\|u_n(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\nabla u_n(t')\|^2_{L^2} dt' \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}.
$$

La famille (u_n) est donc bornée dans l'espace d'énergie

$$
L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1).
$$

Soient $T > 0$ un nombre réel et K un compact de $\mathbb{R}^d$. Nous allons montrer que la suite (u_n) est relativement compacte dans $L^2([0,T] \times K)$.

Soit donc $\varepsilon > 0$. Le théorème de Lebesgue permet d'affirmer qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\|u_n - J_{N_0} u_n\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{2.3.4}$$

En outre on rappelle que la famille (u_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+; \dot H^1)$, donc (Δu_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+; \dot H^{-1})$ (ce résultat s'obtient simplement en écrivant que $\mathcal{F}(\Delta u_n)(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{u}_n(\xi)$). D'autre part on a

$$\begin{aligned}\|J_n \operatorname{div}(J_n u_n \otimes J_n u_n)\|_{\dot H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\\ + \|J_n \nabla (-\Delta)^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (J_n u_n^i J_n u_n^j)\|_{\dot H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\\ \leqslant C \sum_{i,j} \|J_n u_n^i J_n u_n^j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C \|u_n\|^2_{L^4(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^r}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\cdot$$

L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u_n\|^2_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{2.3.5}$$

permet d'en déduire que

$$\begin{aligned}\|J_n \operatorname{div}(J_n u_n \otimes J_n u_n)\|_{\dot H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\\ + \|J_n \nabla (-\Delta)^{-1} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j (J_n u_n^i J_n u_n^j)\|_{\dot H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\\ \leqslant C \|u_n\|^{1-d/4}_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u_n\|^{d/4}_{L^2(\mathbb{R}^d)}&\cdot\end{aligned}$$

Cela implique en particulier, en appliquant l'inégalité de Hölder en temps, que

(2.3.6) $\partial_t u_n$ est bornée, uniformément en n, dans $L^{4/d}([0,T]; \dot H^{-1})$.

Mais pour tout $t \in [0,T]$ la famille $(J_{N_0} u_n(t))$ est bornée dans H^1 uniformément en n. Par la compacité de l'injection de $H^1(K)$ dans $L^2(K)$, le théorème d'Ascoli permet de déduire que $(J_{N_0} u_n)$ est relativement compacte dans $L^\infty([0,T]; L^2(K))$, qui s'injecte continûment dans l'espace $L^2([0,T] \times K)$. La suite (u_n) est donc, grâce à (2.3.4), relativement compacte dans $L^2([0,T] \times K)$.

2.3.c. Passage à la limite. L'étude du paragraphe précédent permet d'exhiber une sous-suite de (u_n), que nous appellerons toujours (u_n), et un champ de vecteurs u tels que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,T]\times K}|u_n(t,x)-u(t,x)|^2dtdx=0.$$

La suite (u_n) converge également vers u faiblement dans $L^2([0,T];\dot H^1)$, au sens où pour tout champ de vecteurs $\psi\in L^2([0,T];\dot H^1)$ on a

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d}(u_n-u)\cdot\psi(t,x)\,dxdt=0.$$

Enfin on a $\operatorname{div} u=0$. Montrons enfin que pour tout champ de vecteurs de divergence nulle φ dans $C^1(\mathbb{R}^+;\dot H^1)$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}|\langle u_n(t),\varphi(t)\rangle-\langle u(t),\varphi(t)\rangle|=0. \tag{2.3.7}$$

On remarque que $(\langle u_n(t),\varphi(t)\rangle)$ est une suite de fonctions bornée dans $L^\infty([0,T])$, et que

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{d}{dt}\langle u_n(t),\varphi(t)\rangle\Big|\\&\qquad\leqslant\|\partial_t u_n(t)\|_{\dot H^{-1}}\sup_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|_{\dot H^1}+\|u_n(t)\|_{L^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\partial_t\varphi(t)\|_{L^2},\end{aligned}$$

donc par (2.3.6) on trouve que $\frac{d}{dt}\langle u_n(t),\varphi(t)\rangle$ est bornée dans $L^{4/d}([0,T])$. Par le théorème d'Ascoli appliqué à la suite de fonctions $(\langle u_n(\cdot),\varphi(\cdot)\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ on en déduit que $(\langle u_n(t),\varphi(t)\rangle)$ a une limite pour tout $t\in[0,T]$, qui ne peut être que $\langle u(t),\varphi(t)\rangle$ d'après le résultat de convergence dans $L^2([0,T];L^2)$.

2.3.d. Équation limite. Il s'agit à présent de vérifier que u est bien une solution faible de (NS). Soit donc $\Phi\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs de divergence nulle. On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u_n(t),\Phi(t)\rangle&=\langle\partial_t u_n(t),\Phi(t)\rangle+\langle u_n(t),\partial_t\Phi(t)\rangle\\&=\langle J_n\Delta u_n(t),\Phi(t)\rangle+\langle J_nQ(u_n(t),u_n(t)),\Phi(t)\rangle\\&\qquad+\langle u_n(t),\partial_t\Phi(t)\rangle,\end{aligned}$$

en notant

$$Q(a,a) = -\operatorname{div}(a\otimes a) + \nabla(-\Delta)^{-1}\sum_{i,j}\partial_i\partial_j(a^i a^j)$$

Après intégration par parties et une intégration en temps pour $t' \in [0,t]$ il vient

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_n(t,x)\cdot\Phi(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_n(0,x)\cdot\Phi(0,x)dx \\ - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}(-u_n\cdot\Delta J_n\Phi + u_n\otimes u_n : \nabla J_n\Phi - u_n\cdot\partial_t\Phi)dxdt'.$$

Il reste donc à passer à la limite $n\to\infty$. On commence par remarquer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} u_n\cdot\Delta J_n\Phi dxdt' = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} u\cdot\Delta\Phi dxdt',$$

ainsi que pour tout $t\geqslant 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} u_n(t,x)\cdot\Phi(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\cdot\Phi(t,x)dx$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t'\in[0,t]}\left|\int_{\mathbb{R}^d} u_n(t',x)\partial_t\Phi(t',x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} u(t',x)\partial_t\Phi(t',x)dx\right| = 0.$$

La convergence de la donnée initiale étant évidente, il nous reste donc à considérer le terme non linéaire. On a tout d'abord

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} u_n\otimes u_n : \nabla J_n\Phi(t',x)dxdt' \\ = \lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} u_n\otimes u_n : \nabla\Phi(t',x)dxdt'.$$

Comme Φ est à support compact, il suffit de démontrer que pour tout compact K on a

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\otimes u_n - u\otimes u\|_{L^1([0,T];L^2(K))} = 0.$$

Mais on a

$$\|u_n - u\|_{L^2([0,T];L^4(K))} \leqslant C\|u_n-u\|_{L^2([0,T]\times K)}^{1-d/4}\|\nabla(u_n-u)\|_{L^2([0,T]\times K)}^{d/4}$$

et le résultat suit des résultats de convergence précédents, ainsi que de l'inégalité de Hölder.

2.3.e. L'inégalité d'énergie. Pour montrer que u est une solution turbulente, il suffit à présent de vérifier que u vérifie l'inégalité d'énergie. On sait que pour tout temps $t \geqslant 0$ on a

$$\|u(t)\|_{L^2} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n(t)\|_{L^2}$$

et de même

$$\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_0^t \|\nabla u_n(t')\|_{L^2}^2 dt'.$$

Ainsi u vérifie l'inégalité d'énergie, et est donc une solution turbulente au sens de la définition 2.2.2. Le théorème 2.3.1 est démontré.

2.3.f. Cas d'unicité. Une fois montrée l'existence de solutions turbulentes, il est naturel de s'interroger sur leur unicité. Nous verrons au paragraphe 2.4 des méthodes générales de construction de solutions uniques, mais commençons la discussion par un calcul formel : supposons que u et v sont deux solutions turbulentes associées à la même donnée initiale $u_0 \in L^2$. Pour montrer que $u = v$, on peut former l'équation vérifiée par $w \stackrel{\text{déf.}}{=} u - v$ et écrire une estimation d'énergie. Comme dans la section 2.1.b, nous n'écrirons ici que des calculs formels. On montre facilement que w vérifie l'équation suivante :

$$\partial_t w + w \cdot \nabla w + u \cdot \nabla w + w \cdot \nabla u - \Delta w = -\nabla q$$

où q est la différence des pressions associées à u et à v, et ainsi formellement

$$\begin{aligned}(2.3.8)\quad \frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ = \frac{1}{2}\|w_0\|_{L^2}^2 + \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (w \cdot \nabla u \mid w)_{L^2}(t')dt'\right|.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (w\cdot\nabla u \mid w)_{L^2}(t')dt'\right| &= \sum_{i,j}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(w^i\partial_i w^j u^j\right)_{L^2}(t')dt'\right| \\ (2.3.9)\qquad &\leqslant \int_0^t \|w(t')\|_{L^2}\|\nabla w(t')\|_{L^2}\|u(t')\|_{L^\infty}dt' \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' + C\int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2\|u(t')\|_{L^\infty}^2 dt'.\end{aligned}$$

On déduit de ce calcul que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \leqslant \|w_0\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2 \|u(t')\|_{L^\infty}^2 dt'$$

et donc par l'inégalité de Gronwall,

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|w_0\|_{L^2}^2 \exp\left(C \int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2 \|u(t')\|_{L^\infty}^2 dt' \right). \tag{2.3.10}$$

Comme $w_0 = 0$, cela fournit bien que $w(t) = 0$, à condition que $u \in L^2(\mathbb{R}^+; L^\infty)$. Or le théorème de Leray ne fournit comme borne que le fait que $u \in L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1)$. On vient donc de démontrer que si une solution de Leray est dans $L^2(\mathbb{R}^+; L^\infty)$, alors toutes les solutions turbulentes associées à la même donnée initiale coïncident. C'est ce que l'on appelle de l'unicité fort-faible : sous une hypothèse supplémentaire « forte » sur une solution faible, toutes les solutions faibles coïncident avec celle-là (nous reviendrons sur cette notion au paragraphe 2.5). En revanche sans cette hypothèse supplémentaire, on ne sait pas conclure à l'unicité par ce calcul.

On remarque que l'espace $L^2(\mathbb{R}^+; L^\infty)$ est invariant par le changement d'échelle de l'équation de Navier-Stokes. On est ainsi naturellement amené à s'intéresser à la résolution de (NS) dans des espaces d'échelle, au sens de la définition 2.2.3.

2.4. Solutions d'échelle

Dans ce paragraphe nous allons construire des solutions (uniques) dans des espaces invariants d'échelle. En dimension 2 d'espace ces solutions seront globales (cela est lié au caractère critique de l'équation, comme exposé au paragraphe 2.1.d) ; cette construction est l'objet de la section 2.4.a. En dimension supérieure en revanche, on n'a pas de contrôle a priori qui permette de rendre globales des solutions construites localement en temps a priori. Ce phénomène est expliqué au paragraphe 2.4.b (dans le cas tridimensionnel pour simplifier), et est lié au caractère sur-critique de l'équation.

2.4.a. Le cas de la dimension 2. Nous allons brièvement reprendre les calculs formels de la section 2.3.f dans le cas de la dimension 2 pour vérifier que dans ce cas il y a unicité de la solution de Leray.

Nous reprenons donc l'estimation (2.3.9), qui devient par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i,j}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left(w^i\partial_j w^j u^j\right)_{L^2}(t')dt'\right| \\ \leqslant \int_0^t \|w(t')\|_{L^4}\|u(t')\|_{L^4}\|\nabla w(t')\|_{L^2}dt'.$$

L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (2.3.5) permet de transformer cette estimation en

$$\sum_{i,j}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left(w^i\partial_j w^j u^j\right)_{L^2}(t')dt'\right| \\ \leqslant \int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^{1/2}\|u(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla w(t')\|_{L^2}^{3/2}dt'.$$

Une inégalité de convexité donne alors

$$\sum_{i,j}\left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \left(w^i\partial_j w^j u^j\right)_{L^2}(t')dt'\right| \\ \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2dt' + C\int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2\|u(t')\|_{L^2}^2\|\nabla u(t')\|_{L^2}^2dt',$$

ce qui en revenant à (2.3.8) fournit

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2dt' \\ = \frac{1}{2}\|w_0\|_{L^2}^2 \exp\left(C\int_0^t \|u(t')\|_{L^2}^2\|\nabla u(t')\|_{L^2}^2dt'\right).$$

Cette estimation est très proche de (2.3.10) mais, contrairement à cette dernière, donne le résultat attendu puisque la solution de Leray u est précisément dans $L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2)\cap L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1)$. L'endroit où la dimension 2 a été utilisé est l'inégalité (2.3.5), qui en dimension 3 devient

$$\|w\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}^2 \leqslant \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}\|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/2},$$

ce qui ne permet pas de conclure. Ces calculs permettent de démontrer le théorème suivant, dû lui aussi à J. Leray [18].

Théorème 2.4.1 **(Unicité des solutions turbulentes en deux dimensions d'espace)**

Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Il existe une unique solution turbulente u, au sens de la définition 2.2.2*, pour tout temps $T \geqslant 0$.*

On peut montrer que cette solution est en fait dans $C([0,T];L^2)$, et qu'elle vérifie l'égalité d'énergie (et non pas seulement une inégalité).

2.4.b. Le cas de la dimension 3. En dimension 3 les solutions de Leray ne sont a priori pas uniques. Afin d'obtenir des solutions uniques, on se place dans le contexte des solutions d'échelle. De nombreux théorèmes existent dans la littérature, avec des familles différentes (de plus en plus grandes) d'espaces d'échelle. Ici nous choisissons de présenter deux de ces résultats, dus respectivement à H. Fujita et T. Kato dans [9] et à T. Kato [14]. Ce choix est dicté par le fait que les démonstrations que nous présentons de ces deux théorèmes sont de natures très différentes.

Le théorème de H. Fujita et T. Kato [9]

Théorème 2.4.2 **(Existence et unicité de solutions d'échelle dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$)**

Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$. Il existe un unique temps maximal T^* et, pour tout $T<T^*$, une unique solution d'échelle u, au sens de la définition 2.2.2*, dans*

$$L^\infty([0,T];\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T];\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)).$$

En outre il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour toute donnée initiale u_0 dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ de norme inférieure à c_0, on a $T^* = \infty$.

On peut montrer que la solution est aussi dans $C([0,T];\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$. Nous allons présenter un schéma de démonstration de ce théorème, par une méthode d'énergie (ce n'est pas la démonstration d'origine de [9], qui utilise une méthode de point fixe comme dans le paragraphe suivant). Nous écrivons des calculs formels et omettons les arguments de régularisation-passage à la limite permettant de les justifier.

Effectuons donc une estimation d'énergie dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, ce qui signifie de prendre le produit scalaire dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ des deux membres de l'équation (NS) (au lieu de $L^2(\mathbb{R}^3)$ comme pour la méthode de Leray). il vient

$$(\partial_t u \mid u)_{\dot H^{1/2}} + (u\cdot\nabla u \mid u)_{\dot H^{1/2}} - (\Delta u \mid u)_{\dot H^{1/2}} = -\,(\nabla p \mid u)_{\dot H^{1/2}}\,.$$

Comme au paragraphe 2.1.b certains termes peuvent être simplifiés, et l'égalité ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + \|\nabla u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} = -\,(u(t)\cdot\nabla u(t) \mid u(t))_{\dot H^{1/2}}\,. \tag{2.4.3}$$

Malheureusement contrairement au cas de l'estimation dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il n'y a aucune raison pour que le membre de droite soit nul en général. Il s'agit donc de l'estimer, en fonction des quantités présentes dans le membre de gauche. Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}(u\cdot\nabla u \mid u)_{\dot H^{1/2}} &= \int |\xi|^{1/2}\mathcal{F}(u\cdot\nabla u)(\xi)\cdot|\xi|^{1/2}\mathcal{F}(u)(\xi)d\xi\\ &= \int \mathcal{F}(u\cdot\nabla u)(\xi)\cdot|\xi|\mathcal{F}(u)(\xi)d\xi\\ &= (u\cdot\nabla u \mid |D|u)_{L^2}\end{aligned}$$

où $|D|u \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{F}^{-1}|\xi|\widehat{u}(\xi)$. L'inégalité de Hölder permet d'écrire

$$|(u\cdot\nabla u \mid |D|u)_{L^2}| \leqslant \|u\|_{L^3}\|\nabla u\|^2_{L^3}$$

donc en utilisant le fait que l'injection de $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ est continue, il vient

$$|(u\cdot\nabla u \mid |D|u)_{L^2}| \leqslant C\|u\|_{\dot H^{1/2}}\|\nabla u\|^2_{\dot H^{1/2}}.$$

Supposons maintenant que $\|u_0\|_{\dot H^{1/2}} \leqslant 1/(4C)$, où C est la constante apparaissant dans l'inégalité ci-dessus, et soit T le temps maximal sur lequel on ait $\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{\dot H^{1/2}} \leqslant 1/(2C)$. On admet ici que $T>0$, ce qui n'est pas difficile à démontrer, et il s'agit de montrer que $T=\infty$.

Pour tout $t\leqslant T$, l'inégalité (2.4.3) devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + \|\nabla u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} &\leqslant C\|u(t)\|_{\dot H^{1/2}}\|\nabla u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}}\end{aligned}$$

et donc pour tout $t \leqslant T$ on a

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + \|\nabla u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} \leqslant 0,$$

ce qui signifie en particulier que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_{\dot H^{1/2}}$ est décroissante. Comme on a supposé que $\|u_0\|_{\dot H^{1/2}} \leqslant 1/(4C)$, on en conclut que $T = \infty$ et que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\|u(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{1/2}} dt' \leqslant \|u_0\|^2_{\dot H^{1/2}}.$$

Ceci démontre le résultat d'existence globale à donnée petite. Si la donnée ne vérifie pas cette condition de petitesse, on peut procéder comme suit : on cherche la solution u sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + R(t),$$

et l'on constate que R vérifie le système suivant, en notant $u_L(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^{t\Delta}u_0$ la « solution libre » :

$$\begin{cases} \partial_t R + R\cdot\nabla R + u_L\cdot\nabla R + R\cdot\nabla u_L - \Delta R = -\nabla p - u_L\cdot\nabla u_L \\ \operatorname{div} R = 0 \\ R_{|t=0} = 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une équation du même type que l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle, avec deux termes linéaires supplémentaires, et un terme source $-u_L\cdot\nabla u_L$. La donnée initiale est nulle (donc en particulier petite !) donc on peut espérer faire fonctionner les estimations précédentes, à condition que le terme source lui-même soit suffisamment petit. C'est là que la restriction sur l'intervalle de temps d'existence va apparaître. La démarche ci-dessus permet en effet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac12\frac{d}{dt}\|R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} &+ \|\nabla R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} \\ &\leqslant C\|R(t)\|_{\dot H^{1/2}}\|\nabla R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + \left|(u_L\cdot\nabla R \mid R)_{\dot H^{1/2}}(t)\right| \\ &\qquad + \left|(R\cdot\nabla u_L \mid R)_{\dot H^{1/2}}(t)\right| + \left|(u_L\cdot\nabla u_L \mid R)_{\dot H^{1/2}}(t)\right|. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite s'estime de la manière suivante, en utilisant toujours l'inégalité de Hölder et les injections de

Sobolev :

$$\begin{aligned}\left|(u_L \cdot \nabla R \mid R)_{\dot H^{1/2}}(t)\right| &= |(u_L \cdot \nabla R \mid |D|R)_{L^2}| \\ &\leqslant \|u_L\|_{L^6}\|\nabla R\|_{L^3}\|\nabla R\|_{L^2} \\ &\leqslant C\|u_L\|_{\dot H^1}\|R\|^{1/2}_{\dot H^{1/2}}\|\nabla R\|^{3/2}_{\dot H^{1/2}}.\end{aligned}$$

De même on peut montrer que

$$\left|(R \cdot \nabla u_L \mid R)_{\dot H^{1/2}}(t)\right| \leqslant C\|u_L\|_{\dot H^1}\|R\|^{1/2}_{\dot H^{1/2}}\|\nabla R\|^{3/2}_{\dot H^{1/2}}$$

et enfin

$$\left|(u_L \cdot \nabla u_L \mid R)_{\dot H^{1/2}}(t)\right| \leqslant C\|u_L\|^2_{\dot H^1}\|\nabla R\|_{\dot H^{1/2}}.$$

Finalement l'inégalité de Young permet de conclure que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + \|\nabla R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} &\leqslant C\|R(t)\|_{\dot H^{1/2}}\|\nabla R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} \\ &\quad + \frac{1}{4}\|\nabla R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + C\|u_L(t)\|^4_{\dot H^1}(1 + \|R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}}).\end{aligned}$$

Soit alors $T > 0$ le temps maximal tel que $\sup_{t\in[0,T]}\|R(t)\| \leqslant 1/(4C)$. Sur cet intervalle de temps on a

$$\frac{d}{dt}\|R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + \|\nabla R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} \leqslant C\|u_L(t)\|^4_{\dot H^1}(1 + \|R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}}).$$

Il suffit donc d'appliquer l'inégalité de Gronwall pour obtenir que sur $[0,T]$,

$$\|R(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} \leqslant C\int_0^t \|u_L(t')\|^4_{\dot H^1}dt' \exp\left(C\int_0^t \|u_L(t'')\|^4_{\dot H^1}dt''\right).$$

On remarque alors que

$$\int_0^t \|u_L(t'')\|^4_{\dot H^1}dt'' \leqslant \|u_0\|^4_{\dot H^{1/2}}$$

et que

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t \|u_L(t')\|^4_{\dot H^1}dt' = 0.$$

Il existe donc un temps T_0 tel que pour tout $t \leqslant T_0$

$$C\int_0^t \|u_L(t')\|^4_{\dot H^1}dt' \leqslant \frac{1}{8C}\exp\left(-C\|u_0\|^4_{\dot H^{1/2}}\right).$$

et on obtient alors que pour tout $t \leqslant T_0$,

$$\|R(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant \frac{1}{8C}\cdot$$

Cela permet de conclure à l'existence de R sur $[0, T_0]$, ce qui termine la démonstration de la partie « existence » du théorème.

La partie « unicité » repose sur les mêmes estimations puisque la différence entre deux solutions u et v vérifie une équation similaire à celle écrite pour R (sans le terme de force), donc une estimation d'énergie dans $\dot{H}^{1/2}$ permet facilement de conclure au fait que deux solutions associées à la même donnée initiale dans $\dot{H}^{1/2}$ sont forcément égales. Nous n'écrivons pas les détails ici.

Le théorème de T. Kato [14]

Théorème 2.4.4 **(Existence et unicité de solutions d'échelle dans $L^3(\mathbb{R}^3)$)** *Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $L^3(\mathbb{R}^3)$, et soit $p \in]3, \infty[$. Il existe un unique temps maximal T^* et une unique solution d'échelle u, au sens de la définition 2.2.2, dans X_T pour tout $T < T^*$, où*

$$X_T = \left\{u \in C(]0, T[; L^p) \mid \|u\|_{X_T} = \sup_{t \in]0,T[} t^{\frac{1}{2}(1-3/p)} \|u(t)\|_{L^p} < \infty\right\}.$$

En outre il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour toute donnée initiale u_0 dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ de norme inférieure à c_0, on a $T^* = \infty$.

La démonstration de ce théorème repose sur le résultat de point fixe dans les Banach suivant.

Lemme 2.4.5 **(Point fixe).** *Soit E un espace de Banach, soit $\mathcal{L}$ une application linéaire continue sur E, de norme L et soit $\mathcal{B}$ une application bilinéaire continue de $E \times E$ dans E et de norme B. On suppose que $L < 1$. Alors pour tout $x_0 \in E$ tel que*

$$\|x_0\|_E < \frac{(1-L)^2}{4B}$$

il existe une unique solution de l'équation

$$x = x_0 + \mathcal{L}x + \mathcal{B}(x, x).$$

dans la boule de E centrée en 0, de rayon $(1-L)/2B\cdot$

Afin d'appliquer ce résultat il s'agit d'écrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme intégrale

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbb{P}\operatorname{div}(u\otimes u)(t')dt' = e^{t\Delta}u_0 + \mathcal{B}(u,u)(t),$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle, défini par

$$\mathbb{P} = \mathrm{Id} - \nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}.$$

La démonstration du théorème 2.4.4 est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants (et du lemme 2.4.5 avec $\mathcal{L} = 0$).

Lemme 2.4.6. *Il existe une constante C telle que si u_0 appartient à $L^3(\mathbb{R}^3)$ alors, avec les notations du théorème* 2.4.4, *on a*

$$\forall T > 0, \quad \|e^{t\Delta}u_0\|_{X_T} \leqslant C\|u_0\|_{L^3}, \quad \textit{et} \tag{2.4.7}$$

$$\lim_{T\to 0}\|e^{t\Delta}u_0\|_{X_T} = 0. \tag{2.4.8}$$

Lemme 2.4.9. *Il existe une constante C telle que*

$$\forall T > 0, \quad \|\mathcal{B}(u,v)\|_{X_T} \leqslant C\|u\|_{X_T}\,\|v\|_{X_T}.$$

Commençons par la démonstration du lemme 2.4.6. On rappelle que

$$e^{t\Delta}u_0 = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}e^{-|\cdot|^2/4t}\star u_0,$$

donc l'inégalité de Young implique que si $1/r = 2/3 + 1/p$ alors

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\|e^{-|\cdot|^2/4t}\|_{L^r}\,\|u_0\|_{L^3},$$

ce qui donne directement l'inégalité (2.4.7) annoncée. Pour montrer le résultat de convergence quand T tend vers zéro donné dans (2.4.8), on utilise un argument d'approximation. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Phi \in \mathcal{S}$ telle que $\|u_0 - \Phi\|_{L^3} \leqslant \varepsilon$. Alors, par l'inégalité précédente, on sait que, pour tout temps $T > 0$,

$$\|e^{t\Delta}(u_0 - \Phi)\|_{X_T} \leqslant C\varepsilon.$$

D'autre part l'inégalité de Young permet de montrer, de manière analogue à ci-dessus, que

$$\|e^{t\Delta}\Phi\|_{L^p} \leqslant \|\Phi\|_{L^p},$$

donc pour tout $p > 3$ il vient

$$\|e^{t\Delta}\Phi\|_{X_T} \leqslant C\varepsilon + T^{\frac{1}{2}(1-3/p)}\|\Phi\|_{L^p},$$

ce qui démontre le lemme 2.4.6.

Venons-en à présent au lemme 2.4.9. Nous admettrons le résultat suivant (qui s'obtient par une écriture explicite du noyau de la chaleur et du projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle) : on peut écrire la j-ème composante de $B(u,v)$ sous la forme

$$\mathcal{B}(u,v)^j(t,x) = \sum_{k,\ell=1}^{3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma^j_{k;\ell}(t-t',y) u^k(t',x-y) v^\ell(t',x-y) dt' dy,$$

avec $$\Gamma^j_{k;\ell}(s,y)| \leqslant \frac{C}{(\sqrt{s}+|y|)^4}\cdot$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Young en espace pour obtenir que

$$\|\mathcal{B}(u,v)(t)\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{X_T}\|v\|_{X_T} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{2-\frac{3}{2}(1-1/p)}} \frac{dt'}{t'^{1-3/p}}$$

et donc finalement

$$\|\mathcal{B}(u,v)(t)\|_{X_T} \leqslant C\|u\|_{X_T}\|v\|_{X_T}$$

Le lemme 2.4.9 est démontré, ainsi donc que le théorème 2.4.4 par application du lemme 2.4.5.

2.4.c. La notion d'espace limite. Il est naturel de chercher à démontrer l'analogue du théorème 2.4.4 dans l'espace fonctionnel le plus large possible. En effet une donnée initiale peut très bien ne pas être suffisamment petite dans L^3 pour que le théorème 2.4.4 fournisse une solution globale, mais elle pourrait devenir petite si mesurée dans une autre norme invariante d'échelle, ce qui pourrait permettre de lui associer une solution d'échelle globale.

On peut constater d'ailleurs que la véritable condition de petitesse qui est apparue dans la démonstration du théorème 2.4.4 n'est en fait pas la petitesse de u_0 dans L^3, mais plutôt, par (2.4.7), celle de $e^{t\Delta}u_0$ dans X_∞, ce qui n'est pas la même chose. En effet on peut démontrer par exemple que si u_0 est un champ de vecteurs régulier, décroissant à l'infini, alors il existe une constante C telle que pour tout entier N et pour tout $T > 0$, on ait

$$\|e^{t\Delta}(u_0 \cos Nx_3)\|_{X_T} \leqslant CN^{-1+3/p}.$$

Cette quantité est donc très petite si N est grand (et $p > 3$) alors que la taille de $\|u_0 \cos Nx_3\|_{L^3}$ est comparable à celle de u_0 dans L^3 (indépendamment de N).

De nombreux travaux ont été consacrés à l'amélioration du théorème 2.4.4 et nous n'allons pas énoncer ici tous les résultats existant dans la littérature. Nous renvoyons par exemple à [16] pour une bibliographie. Par contre, il est intéressant de noter que la méthode décrite ici ne peut pas être implémentée indéfiniment, puisqu'il existe un « espace limite » au-delà duquel cette méthode cesse de fonctionner. On peut attribuer le résultat suivant à Y. Meyer [19].

Proposition 2.4.10. *Soit X un espace de Banach, continûment inclus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et invariant par translation et par changement d'échelle, au sens où*

$$\forall f \in X,\ \forall \lambda > 0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad \|f\|_X = \lambda \|f(\lambda x - x_0)\|_X.$$

Alors X est continûment inclus dans $\dot{C}^{-1}$, où

$$\|f\|_{\dot{C}^{-1}} = \sup_{t \geqslant 0} t^{1/2} \|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty}.$$

Notons que l'espace $\dot{C}^{-1}$ correspond à l'espace X_∞ dans le cas limite $p = \infty$ (dans l'énoncé du théorème 2.4.4). La démonstration de cette proposition repose simplement sur l'observation que

$$|\langle f, e^{-|\cdot|^2} \rangle| \leqslant C \|f\|_X$$

et sur l'utilisation de l'invariance par translation et dilatation.

La méthode de point fixe permettant de démontrer le théorème 2.4.4 ne fonctionne en fait pas dans l'espace $\dot{C}^{-1}$ (voir [2], [13]). Le meilleur résultat connu dans ce sens est dû à H. Koch et D. Tataru [15] et s'énonce comme suit. Dans ce théorème l'espace BMO^{-1} est défini par

$$(2.4.11)\quad \|u_0\|^2_{\mathrm{BMO}^{-1}} = \sup_{t>0} t\|e^{t\Delta}u_0\|^2_{L^\infty} + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ R>0}} \frac{1}{R^d}\int_{P(x,R)} |(e^{t\Delta}u_0)(t,y)|^2 dydt$$

où $P(x,R)$ est l'ensemble $[0,R^2]\times B(x,R)$ avec $B(x,R)$ la boule de centre x, de rayon R. Notons que l'espace BMO^{-1} est un cadre très naturel pour résoudre (NS). Il prend en compte en effet l'espace critique $\dot{C}^{-1}$, par la première norme entrant dans sa définition, alors que la seconde quantité traduit simplement le fait que $e^{t\Delta}u_0$ appartient à $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ tout en tenant compte l'invariance d'échelle. Même si cela ne découle pas de manière visible de la norme définie ci-dessus, on peut démontrer que les composantes de tout champ de vecteurs dans BMO^{-1} sont des combinaisons linéaires de dérivées de fonctions de BMO, où

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-\overline{f}_B|dx, \quad \text{avec} \quad \overline{f}_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx,$$

et le supremum est pris sur toutes les boules ouvertes B de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 2.4.12 **(H. Koch et D. Tataru).** *Il existe une constante c_0 telle qu'on ait le résultat suivant. Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, tel que $\|u_0\|_{\mathrm{BMO}^{-1}} \leqslant c_0$. Il existe une unique solution d'échelle u dans X, au sens de la définition* 2.2.2*, où*

$$\|u\|_X = \sup_{t\geqslant 0} t^{1/2}\|u(t)\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ R>0}} \frac{1}{R^d}\int_{P(x,R)} |u(t,y)|^2 dydt.$$

La démonstration du théorème 2.4.12 repose sur la méthode de point fixe décrite ci-dessus, mais l'estimation du terme bilinéaire est beaucoup plus subtile et dépasse le cadre de ce texte.

Notons pour conclure ce paragraphe qu'aucun des résultats d'existence de solutions d'échelle du type des théorèmes 2.4.2 et 2.4.4 n'utilise véritablement la structure de l'équation (contrairement au théorème 2.3.1 d'existence de solutions turbulentes). Ce sont des théorèmes valables pour de larges classes d'équations, ayant la même invariance d'échelle et pour lesquels la non-linéarité vérifie des estimations similaires.

2.5. Unicité fort-faible

Dans les paragraphes précédents nous avons produit deux types de solutions des équations de Navier-Stokes, en trois dimensions d'espace (les solutions turbulentes et les solutions d'échelle). On peut se demander dans quels cas ces notions coïncident. Par exemple, si l'on s'intéresse à un champ de vecteurs initial dans $L^2 \cap L^3(\mathbb{R}^3)$ le théorème 2.3.1 fournit une solution turbulente globale en temps, alors que le théorème 2.4.4 fournit une unique solution d'échelle, locale en temps. Se pose alors la question de savoir si ces deux types de solutions coïncident, sur leur temps de vie commun. La question se pose bien sûr plus généralement dans le cadre des solutions de H. Koch et D. Tataru produites dans le théorème 2.4.12, ou pour tout espace intermédiaire dans lequel on saurait construire des solutions d'échelle. Ici encore nous n'allons pas décrire tous les résultats possibles (la réponse dans le cadre du théorème 2.4.12 n'est d'ailleurs pas connue à ce jour, on renvoie à [5] et à [12] pour des références) mais nous allons donner une idée de la stratégie permettant de répondre à cette question. La démarche décrite ci-dessous est celle habituellement utilisée pour démontrer ce type de résultat (nous renvoyons à [5] pour un développement récent).

Considérons donc deux solutions u et v, avec u solution d'échelle et v solution turbulente. On fait l'hypothèse ici que u est aussi solution turbulente (c'est le cas par exemple de la solution construite au théorème 2.4.4). On définit alors $w = u - v$ et comme au paragraphe 2.3.f on écrit une estimation d'énergie sur w. On procède de la manière suivante : on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \\ = \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' + \frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 \\ + \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt' - (u(t)|v(t))_{L^2} - 2\int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2} dt'\end{aligned}$$

donc comme u et v sont deux solutions turbulentes on obtient

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt'$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 - (u(t) \mid v(t))_{L^2} - 2\int_0^t (\nabla u(t') \mid \nabla v(t'))_{L^2} dt'.$$

Afin d'estimer les deux derniers termes de cette inégalité, on utilise une approximation de u comme fonction test dans la formulation faible pour v rappelée dans (2.2.1)($*$). Après passage à la limite dans cette approximation, il vient

$$(u(t) \mid v(t))_{L^2} + 2\int_0^t (\nabla u(t') \mid \nabla v(t'))_{L^2} dt'$$
$$= (u_0 \mid v_0)_{L^2} + \int_0^t (w(t') \cdot \nabla w(t') | u(t'))_{L^2} dt'$$

et l'on conclut la démonstration en montrant que la forme trilinéaire

$$(a,b,c) \longmapsto \int_0^t (a(t') \cdot \nabla b(t') | c(t'))_{L^2} dt'$$

est continue pour a et b solutions d'énergie et c solution d'échelle (ce qui permet de justifier le passage à la limite précédent). Cela permet de conclure à une estimation du type

$$E(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 dt' \leqslant \frac{1}{2}\|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + E(t)\|u\|_{X_T}$$

ce qui donne le résultat. Nous renvoyons à [12] pour une discussion autour des limitations de cette approche (montrant que son champ d'application est nécessairement assez réduit), et à [5] pour une amélioration de la méthode permettant d'obtenir un théorème d'unicité fort-faible essentiellement pour toute solution turbulente dans X_T.

2.6. Quelques exemples de grandes données générant une solution globale régulière

Au vu des résultats présentés au paragraphe 2.4, il semblerait que seules les données initiales suffisamment petites génèrent des solutions uniques globales en temps. Dans ce paragraphe on s'interroge sur la nécessité de la condition de petitesse de la donnée initiale pour espérer pouvoir résoudre globalement les équations de Navier-Stokes.

2.6.a. Amélioration de la technique de point fixe. L'implémentation de la technique de point fixe nécessite qu'une certaine quantité (ici $e^{t\Delta}u_0$) soit petite, et une façon d'essayer d'améliorer cette technique est de la pousser un ordre plus loin (ou plus), en écrivant $u = e^{t\Delta}u_0 + R$ et en écrivant le point fixe sur l'équation vérifiée par R. On a ainsi

$$R = \mathcal{B}(e^{t\Delta}u_0, e^{t\Delta}u_0) + 2\mathcal{B}(e^{t\Delta}u_0, R) + \mathcal{B}(R, R)$$

et l'on peut à nouveau appliquer le lemme 2.4.5, avec $\mathcal{L}R = 2\mathcal{B}(e^{t\Delta}u_0, R)$.

Afin de garantir que l'application linéaire $\mathcal{L}$ est de norme petite (sans que u_0 soit petit) il s'agit de choisir convenablement la norme : on choisit de changer d'inconnue en posant, pour une constante λ à choisir suffisamment grande,

$$R_\lambda(t,x) = R(t,x)\exp\Big(-\lambda\int_0^t U(t')dt'\Big),$$

avec
$$U(t) = \|e^{t\Delta}u_0\|_{L^\infty}^2 + t\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^\infty}^4$$

et on applique le lemme de point fixe à la norme $\|R_\lambda\|_{\mathrm{BMO}^{-1}}$. On peut alors montrer, en suivant la démarche de [15], qu'il existe une unique solution globale à (NS) sous l'hypothèse que $\mathcal{B}(e^{t\Delta}u_0, e^{t\Delta}u_0)_\lambda$ soit suffisamment petit. Il s'agit ensuite de vérifier que cette hypothèse peut être satisfaite sans que u_0 lui-même soit petit. Le théorème suivant, dont on peut trouver une démonstration dans [6], se démontre précisément en vérifiant que la donnée initiale proposée satisfait à cette hypothèse.

Théorème 2.6.1 **([6]).** *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ une fonction, et soient ε et α deux réels dans $]0,1[$. On définit*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{(-\log\varepsilon)^{1/5}}{\varepsilon^{1-\alpha}}\cos(x_3/\varepsilon)\,\phi(x_1, x_2/\varepsilon^\alpha, x_3).$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que si ε est assez petit, alors il existe une unique solution globale d'échelle associée à

$$u_{0,\varepsilon}(x) = (\partial_2\varphi_\varepsilon(x), -\partial_1\varphi_\varepsilon(x), 0).$$

Cette donnée vérifie

$$C^{-1}(-\log\varepsilon)^{1/5} \leqslant \|u_{0,\varepsilon}\|_{\dot{C}^{-1}} \leqslant C(-\log\varepsilon)^{1/5}. \tag{2.6.2}$$

Le résultat (2.6.2), joint à la proposition 2.4.10, montre que la donnée $u_{0,\varepsilon}$ est véritablement grande, au sens du point fixe.

Notons que la démonstration de ce théorème utilise la structure du terme non linéaire des équations de Navier-Stokes. On peut d'ailleurs montrer (voir [11]) que cette même donnée initiale produit une solution qui explose en temps fini pour un système proche de (NS), dans lequel la non-linéarité est $\mathbb{P}Q(u,u)$ avec Q une forme quadratique particulière (différente de $u\cdot\nabla u$ bien sûr).

2.6.b. Utilisation du caractère bien posé des équations bidimensionnelles. Une autre stratégie pour obtenir des solutions globales associées à une grande donnée initiale est d'utiliser le fait que les équations bidimensionnelles ont une solution globale d'échelle pour toute donnée initiale d'énergie finie (voir le théorème 2.4.1). Là encore on utilise donc la structure particulière de la non-linéarité. Le théorème suivant est démontré dans [7].

Théorème 2.6.3 **([7]).** *Soit $v_0^h=(v_0^1,v_0^2)$ un champ de vecteurs de divergence nulle, régulier sur $\mathbb{R}^3$: on suppose que v_0^h est dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ ainsi que toutes ses dérivées. On suppose en outre que v_0^h et toutes ses dérivées sont dans $L^2(\mathbb{R}_{x_3};\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))$. Soit w_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, régulier sur $\mathbb{R}^3$. Il existe $\varepsilon_0>0$ tel que si $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, alors il existe une unique solution d'échelle régulière, globale en temps, associée à*

$$u_{0,\varepsilon}(x)=(v_0^h+\varepsilon w_0^h, w_0^3)(x_1,x_2,\varepsilon x_3).$$

Avant d'expliquer comment démontrer ce théorème, on remarque que de telles données initiales $u_{0,\varepsilon}$ peuvent être choisies arbitrairement grandes. Cela est dû au résultat suivant, démontré également dans [7].

Proposition 2.6.4. *Soient (f,g) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)\times\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $h_\varepsilon(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2)g(\varepsilon x_3)$. Alors, si ε est suffisamment petit, on a*

$$\|h_\varepsilon\|_{\dot{C}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \geqslant \frac{1}{4}\|f\|_{\dot{C}^{-1}(\mathbb{R}^2)}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Cette proposition repose sur le calcul suivant : il s'agit de minorer $\|e^{t\Delta}h_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$. On écrit ainsi

$$(e^{t\Delta}h_\varepsilon)(t,x) = (e^{t\Delta_h}f)(t,x_h)(e^{t\partial_3^2}g)(\varepsilon^2 t, \varepsilon x_3).$$

Soit maintenant t_0 tel que

$$t_0^{1/2}\|e^{t_0\Delta_h}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_{\dot C^{-1}(\mathbb{R}^2)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} t_0^{1/2}\|e^{t_0\Delta}h_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &= t_0^{1/2}\|e^{t_0\Delta_h}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\|(e^{t_0\partial_3^2}g)(\varepsilon^2 t_0, \varepsilon\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|f\|_{\dot C^{-1}(\mathbb{R}^2)}\|e^{\varepsilon^2 t_0\partial_3^2}g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Le résultat suit du fait que $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon^2 t_0\partial_3^2}g = g$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Donnons maintenant une idée de la démonstration du théorème 2.6.3 : on commence par utiliser le caractère bien posé des équations bidimensionnelles en résolvant globalement et de manière unique, pour chaque $y_3 \in \mathbb{R}$, l'équation de Navier-Stokes sur $\mathbb{R}^2$ avec donnée $v_0^h(x_1,x_2,y_3)$. Cela fournit une solution $v = (v^h, 0)$, et l'on cherche alors la solution u_ε associée à $u_{0,\varepsilon}$ sous la forme

$$u_\varepsilon(t,x) = v(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3) + (\varepsilon w_\varepsilon^h, w_\varepsilon^3)(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3) + R_\varepsilon(t,x),$$

où w_ε est l'unique solution globale du système linéaire suivant :

$$\partial_t w_\varepsilon + v^h\cdot\nabla_h w_\varepsilon - \Delta_h w_\varepsilon - \varepsilon^2\partial_3^2 w_\varepsilon = -(\nabla^h p_1, \varepsilon^2\partial_3 p_1)$$

avec $\operatorname{div} w_\varepsilon = 0$ et donnée initiale w_0. Il s'agit finalement donc simplement de vérifier que le système perturbé suivant est globalement bien posé :

$$\partial_t R_\varepsilon + R_\varepsilon\cdot\nabla R_\varepsilon - \Delta R_\varepsilon + v_\varepsilon^{\mathrm{app}}\cdot\nabla R_\varepsilon + R_\varepsilon\cdot\nabla v_\varepsilon^{\mathrm{app}} = F_\varepsilon - \nabla q_\varepsilon,$$

où $\qquad v_\varepsilon^{\mathrm{app}}(t,x) = ((v^h,0) + \varepsilon(w_\varepsilon^h, \varepsilon^{-1}w_\varepsilon^3))(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3),$

et où F_ε prend en compte toutes les interactions omises dans le système vérifié par w_ε : par exemple le terme $\varepsilon w_\varepsilon\cdot\nabla v(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3)$ (nous ne les écrivons pas tous ici). En fait on peut montrer que ce terme de force est petit dans un espace invariant d'échelle pour une force extérieure à (NS) (typiquement $L^2(\mathbb{R}^+;\dot H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ convient) : ainsi par exemple on a, en utilisant l'injection continue de $L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ dans

$\dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}\varepsilon\|(w_\varepsilon^j\partial_j v)(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3)\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} &\leqslant C\varepsilon\|(w_\varepsilon^j\partial_j v)(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3)\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^{3/2}(\mathbb{R}^3))}\\ &\leqslant C\varepsilon\|w_\varepsilon(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^3(\mathbb{R}^3))}\\ &\qquad\cdot\|\partial_j v(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3)\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^3(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$

Donc après changement de variable puis en utilisant l'injection continue duale de la précédente, de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ dans $L^3(\mathbb{R}^3)$, il vient

$$\begin{aligned}\varepsilon\|(w_\varepsilon^j\partial_j v)(t,x_1,x_2,\varepsilon x_3)\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}&\\ \leqslant C\varepsilon^{1/3}\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))}&\|\partial_j v\|_{L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$

Comme la donnée initiale $R_{\varepsilon|t=0}$ de ce système est nulle, la théorie des données petites permet de montrer qu'il existe une solution unique globale à ce système. Cela permet de conclure la démonstration du théorème.

2.7. Comportement en grand temps

Dans ce paragraphe on étudie le comportement en grand temps d'une solution d'échelle globale quelconque, sans hypothèse de taille sur la donnée initiale : si la donnée est petite on peut montrer facilement que le comportement asymptotique de la solution d'échelle est gouverné par le flot linéaire de la chaleur, mais qu'en est-il si la donnée initiale n'est pas petite ? Le résultat général (voir [1],[10]) est que toute solution globale d'échelle tend vers zéro en grand temps, comme dans le cas d'une petite donnée initiale. Nous n'allons pas donner la démonstration du résultat général ici, mais seulement d'un résultat partiel, dans le cadre des données de H. Fujita et T. Kato (voir le théorème 2.4.2).

***Théorème 2.7.1* (Comportement en grand temps de solutions d'échelle)**
Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$. Supposons qu'il existe une unique solution u associée, appartenant à $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ pour tout temps. Alors

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}=0.$$

La démonstration de ce résultat repose sur les deux observations suivantes :

• Si la donnée initiale est suffisamment petite, alors on sait que la solution se comporte comme la solution de l'équation de la chaleur linéaire, et donc le résultat est assuré.

• Si la donnée initiale appartient aussi à $L^2(\mathbb{R}^3)$ alors la solution est aussi une solution turbulente, donc elle appartient à

$$L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)).$$

En particulier, par interpolation en x et par l'inégalité de Hölder en t, elle appartient à $L^4(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))$, donc il existe un temps T tel que $\|u(T)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant \varepsilon_0$. On est alors ramené à la théorie des solutions d'échelle petites.

Dans le cas général où la donnée initiale n'est ni petite, ni dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, on essaie de s'y ramener en écrivant, pour $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement petit,

$$u_0 = v_0 + w_0, \quad \text{avec} \quad v_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \|w_0\|_{\dot{H}^{1/2}} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est toujours possible par exemple par une troncature des basses fréquences de u_0 (dans ce cas w_0 est la partie tronquée, sur une petite boule en fréquences autour de zéro, et v_0 est le reste).

On commence alors par résoudre globalement (NS) dans $\dot{H}^{1/2}$ avec donnée w_0 (rappelons que w_0 a été choisie suffisamment petite). L'équation qu'il s'agit ensuite de résoudre est

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v - \Delta v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

Pour cette équation on n'a pas d'hypothèse de petitesse a priori. Par contre la donnée initiale est dans L^2, et on va montrer que la solution demeure dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1)$ comme dans l'exemple ci-dessus. Dans ce cas on conclura comme ci-dessus qu'au-delà d'un certain temps, v devient arbitrairement petite dans $\dot{H}^{1/2}$, et donc $u = v + w$ aussi. Écrivons donc une estimation d'énergie sur v (on se contente ici d'un argument formel). Il vient

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2 dt' \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla w) \cdot v(t') dx dt' \right|.$$

On estime maintenant par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(v\cdot\nabla w)\cdot v dx dt'\right| &= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(v\otimes w)\cdot\nabla v dx dt'\right| \\ &\leqslant \int_0^t \|w(t')\|_{L^3}\|v(t')\|_{L^6}\|\nabla v(t')\|_{L^2}dt'\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure par les injections de Sobolev que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla v(t')\|_{L^2}^2dt' \\ &\qquad\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2+C\int_0^t\|w(t')\|_{\dot H^{1/2}}\|v(t')\|_{\dot H^1}^2dt'.\end{aligned}$$

Par définition de w on conclut que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla v(t')\|_{L^2}^2dt' \\ &\qquad\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2+C\|w_0\|_{\dot H^{1/2}}\int_0^t\|v(t')\|_{\dot H^1}^2dt'.\end{aligned}\tag{2.7.2}$$

En supposant que $C\|w_0\|_{\dot H^{1/2}}\leqslant 1/2$ on peut simplifier le terme à droite ci-dessus dans la partie gauche de (2.7.2) ce qui permet de conclure que l'énergie de v reste bornée. On obtient alors par le raisonnement précédent qu'il existe T tel que $\|v(T)\|_{\dot H^{1/2}}\leqslant\|w_0\|_{\dot H^{1/2}}$. On en déduit que

$$\|u(T)\|_{\dot H^{1/2}}\leqslant 2\|w_0\|_{\dot H^{1/2}}$$

et par la théorie des solutions petites que $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)\|_{\dot H^{1/2}}=0$. Ceci conclut la démonstration du théorème 2.7.1.

2.8. Comportement au temps d'explosion

Dans ce paragraphe nous allons évoquer brièvement la question de l'explosion (éventuelle) pour (NS). En effet si l'on sait démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'échelle en temps fini (globalement pour une petite donnée), la méthode de point fixe décrite ci-dessus (ou la méthode d'énergie suivie pour démontrer le théorème 2.4.2) ne permet pas de décider si la solution explose véritablement en temps fini. Cette question est déjà présente dans les travaux de

J. Leray, qui remarque dans [17] qu'une possible solution « explosive » serait donnée par un champ de vecteurs du type

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\,U\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big)$$

appelé aujourd'hui « profil d'explosion auto-similaire ». Il a fallu attendre soixante ans pour que J. Neças, M. Ruzişka et V. Şverák démontrent dans [20] que la seule solution de Navier-Stokes de ce type, avec un profil dans $L^3(\mathbb{R}^3)$, est la solution nulle.

Plus récemment, L. Escauriaza, G. Seregin et V. Şverák ont montré (voir [8]) le théorème remarquable suivant, qui généralise le résultat de [20].

Théorème 2.8.1 **(L. Escauriaza, G. Seregin et V. Şverák)**
Soit u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle, dans $L^3(\mathbb{R}^3)$, et u la solution associée (au sens du théorème 2.4.4*). Si le temps maximal T^* d'existence de u est fini, alors*

$$\lim_{t\to T^*} \|u(t)\|_{L^3} = \infty.$$

Notons qu'il est facile de montrer que la norme X_T introduite au théorème 2.4.4 doit exploser quand le point fixe cesse de fonctionner, et de même pour les normes de type $L^p([0,T];L^q)$ avec $2/p+3/q=1$ et $p<\infty$, mais le cas étudié dans [8] échappe précisément à ces arguments élémentaires. La démonstration de ce théorème est très difficile, et repose sur des concepts que nous n'avons pas évoqués dans ce texte (solutions faibles à la Caffarelli-Kohn-Nirenberg [3], arguments de zoom autour de la singularité éventuelle, unicité rétrograde...). Nous ne donnerons donc pas plus de détails ici.

Références

[1] P. Auscher, S. Dubois & P. Tchamitchian – « On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space », *J. Math. Pures Appl. (9)* **83** (2004), no. 6, p. 673–697.

[2] J. Bourgain & N. Pavlović – « Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D », *J. Funct. Anal.* **255** (2008), no. 9, p. 2233–2247.

[3] L. Caffarelli, R. Kohn & L. Nirenberg – « Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), no. 6, p. 771–831.

[4] J.-Y. Chemin – « Équations d'Euler d'un fluide incompressible », in *Facettes mathématiques de la mécanique des fluides*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2010, ce volume.

[5] ———, « About weak-strong uniqueness for the 3D incompressible Navier-Stokes system », *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011), no. 12, p. 1587–1598.

[6] J.-Y. Chemin & I. Gallagher – « On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), no. 4, p. 679–698.

[7] ———, « Large, global solutions to the Navier-Stokes equations, slowly varying in one direction », *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), no. 6, p. 2859–2873.

[8] L. Escauriaza, G. A. Seregin & V. Şverák – « $L_{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness », *Russian Math. Surveys* **58** (2003), no. 2, p. 211–250.

[9] H. Fujita & T. Kato – « On the Navier-Stokes initial value problem. I », *Arch. Rational Mech. Anal.* **16** (1964), p. 269–315.

[10] I. Gallagher, D. Iftimie & F. Planchon – « Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), no. 5, p. 1387–1424.

[11] I. Gallagher & M. Paicu – « Remarks on the blow-up of solutions to a toy model for the Navier-Stokes equations », *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), no. 6, p. 2075–2083.

[12] P. Germain – « Multipliers, paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier-Stokes equations », *J. Differential Equations* **226** (2006), no. 2, p. 373–428.

[13] ———, « The second iterate for the Navier-Stokes equation », *J. Funct. Anal.* **255** (2008), no. 9, p. 2248–2264.

[14] T. Kato – « Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbf{R}^m$, with applications to weak solutions », *Math. Z.* **187** (1984), no. 4, p. 471–480.

[15] H. Koch & D. Tataru – « Well-posedness for the Navier-Stokes equations », *Adv. Math.* **157** (2001), no. 1, p. 22–35.

[16] P. G. Lemarié-Rieusset – *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 431, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[17] J. Leray – « Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace », *Acta Math.* **63** (1933), p. 193–248.

[18] ———, « Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique », *J. Math. Pures Appl.* **12** (1933), p. 1–82.

[19] Y. Meyer – « Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations », in *Current developments in mathematics, 1996 (Cambridge, MA)*, Int. Press, Boston, MA, 1997, p. 105–212.

[20] J. Nečas, M. Růžička & V. Šverák – « On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations », *Acta Math.* **176** (1996), no. 2, p. 283–294.

Isabelle Gallagher, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris Diderot, 75251 Paris Cedex 05, France
E-mail : Isabelle.Gallagher@ens.fr