Journées mathématiques X-UPS

Année 2010

Facettes mathématiques de la mécanique des fluides

Jean-Yves Chemin

Équations d'Euler d'un fluide incompressible

Journées mathématiques X-UPS (2010), p. 1-23.
https://doi.org/10.5802/xups.2010-01

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2010, p. 1–23 doi: 10.5802/xups.2010-01

ÉQUATIONS D'EULER D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

par

Jean-Yves Chemin

Résumé. Dans ce texte nous présentons la dérivation des équations d'Euler par le principe de moindre action (ce n'est pas la démarche historique d'Euler, mais cela permet de voir le caractère *géométrique*, en plus du caractère physique, de ces équations). Nous présentons divers résultats sur le *problème de Cauchy* lié à ces équations. Puis nous expliquons le paradoxe de d'Alembert et en déduisons l'heuristique des équations de Navier-Stokes.

Table des matières

1.1. Introduction

Dans ce tout texte, nous allons étudier l'existence de solutions assez régulières pour les équations d'Euler d'un fluide incompressible dans le cadre des conditions aux limites périodiques. Ce choix est motivé par un souci de simplicité. En effet, tous les résultats que nous allons

Publication originelle dans Journées X-UPS 2010. Facettes mathématiques de la mécanique des fluides. Éditions de l'École polytechnique, 2010.

démontrer dans ce texte sont transposables dans le cadre de l'espace entier, au prix de quelques précautions à l'infini ou bien aux domaines à bord suffisamment réguliers avec condition de non porosité (c'est-à-dire que la vitesse du fluide au bord est supposée tangente au bord) au prix là de complications techniques parfois importantes. Lorsque $d \geqslant 2$, on définit le tore d dimensionnel $\mathbb{T}^d \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$.

Le texte est organisé comme suit. Dans la section 1.2, nous établirons le système d'Euler d'un fluide incompressible à partir du principe de moindre action. Dans la section 1.3, nous montrerons pourquoi le problème (E) de l'introduction est un problème « bien posé » lorsque la donnée initiale v_0 est suffisamment régulière. Dans la section 1.4, nous établirons une condition nécessaire pour que le temps maximal d'existence soit fini et nous observerons que cette condition n'est jamais vérifiée en dimension 2 d'espace. Puis dans la section 1.5, nous étudierons le cas de la dimension 2 d'espace où nous établirons que le système d'Euler des fluides incompressibles bidimensionnel est globalement bien posé sous la seule hypothèse que le rotationnel du champ de vecteurs initial est borné. Enfin, dans la section 1.6, nous exhiberons un exemple d'un fluide parfait incompressible dont le flot est à régularité höldérienne strictement décroissante.

1.2. Qu'est-ce-qu'un fluide parfait ?

On cherche à décrire l'évolution d'un fluide parfait incompressible entre deux temps t_0 et t_1. Une particule de fluide située au point x à l'instant t_0 sera située, à l'instant t_1, au point $\psi_1(x)$. L'incompressibilité du fluide se traduit par le fait que l'application ψ_1, supposée être un difféomorphisme, conserve la mesure, c'est-à-dire que son jacobien est de déterminant 1.

Nous allons maintenant préciser les espaces fonctionnels avec lesquels nous allons modéliser un fluide parfait incompressible. Dans toute cette section, on se donne un difféomorphisme ψ_1 du tore $\mathbb{T}^d$ tel que l'ensemble $\mathcal{L}_0$ défini ci-dessous soit non vide.

Définition 1.2.1. Nous désignerons par $\mathcal{L}$ l'espace des fonctions continûment différentiables de $[t_0, t_1] \times \mathbb{T}^d$ dans $\mathbb{T}^d$ telles que $\psi(t_0) = \mathrm{Id}$ et

$\psi(t_1) = \psi_1$, telles qu'à chaque instant t, la fonction $\psi(t)$ soit un difféomorphisme de $\mathbb{T}^d$. Nous désignerons par $\mathcal{L}_0$ l'espace des fonctions de $\mathcal{L}$ telles qu'à tout instant t, le difféomorphisme $\psi(t)$ préserve la mesure.

Une évolution, a priori possible, d'un fluide incompressible entre l'état à l'instant t_0 et l'état décrit à l'instant t_1 par le difféomorphisme ψ_1, est modélisée par une fonction ψ de l'espace $\mathcal{L}_0$.

Pour introduire un problème variationnel, il convient de définir une fonctionnelle dont les extrémales seront la clef du problème. Nous allons ici introduire l'action.

Définition 1.2.2. On appellera action l'application $\mathcal{A}$ définie de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$\mathcal{A}(\psi) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t\psi(t,x)|^2 dx dt.$$

L'action est une forme quadratique. L'espace $\mathcal{L}$ est inclus dans un espace affine. Le calcul de la différentielle de l'action $\mathcal{A}$ est des plus élémentaires. On a

$$D\mathcal{A}_\psi h = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t\psi(t,x)\,\partial_t h(t,x)\,dt\,dx. \tag{1.2.3}$$

L'idée est de définir un fluide parfait incompressible comme un fluide incompressible évoluant suivant des extrémales de la fonctionnelle action $\mathcal{A}$ restreinte à l'espace $\mathcal{L}_0$. Il s'agit de l'analogue, en dimension infinie, du problème des points extrémaux d'une fonction restreinte à une hypersurface.

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et S une sous-variété de Ω. Une condition nécessaire pour qu'un point x_0 de S soit un point extrémal de f restreinte à S est que, pour toute courbe γ dérivable tracée sur S telle que $\gamma(0) = x_0$, on ait

$$\frac{d}{ds} f(\gamma(s))_{|s=0} = 0.$$

Cela conduit à la définition suivante, basée sur le principe de moindre action.

Définition 1.2.4. On dit qu'un fluide incompressible est *parfait* s'il évolue entre le temps t_0 et l'état ψ_1 au temps t_1 suivant un élément ψ de $\mathcal{L}_0$ tel que, pour toute fonction Θ continûment différentiable de $[-a,a]$ dans $\mathcal{L}_0$ telle que $\Theta(0)=\psi$, on ait

$$\frac{d}{ds}\mathcal{A}(\Theta(s))_{|s=0}=0.$$

Cette définition dit qu'un fluide parfait incompressible évolue le long de point extrémaux de la fonctionnelle action, c'est-à-dire le long de « géodésiques » du groupe des difféomorphismes qui préservent le volume. Elle est basée sur une description lagrangienne d'un fluide, c'est-à-dire sur la connaissance de l'évolution de la position de chaque particule de fluide. Le théorème qui suit décrit un fluide parfait incompressible en termes eulériens, c'est-à-dire en termes de vitesse d'une particule située au point x à l'instant t.

Théorème 1.2.5. *Soient ψ un élément de $\mathcal{L}_0$ et v le champ de vecteurs associé à ψ par*

$$v(t,x)=\partial_t\psi(t,\psi^{-1}(t,x)). \tag{1.2.6}$$

Le champ de vecteurs v est de divergence nulle, c'est-à-dire que

$$\operatorname{div} v \stackrel{\textit{déf.}}{=} \sum_{j=1}^{d}\partial_j v^j=0.$$

Le flot ψ sera le flot d'un fluide parfait incompressible si et seulement si il existe une fonction p telle que, si l'on note $v\cdot\nabla$ l'opérateur $\sum_{j=1}^{d} v^j\partial_j$, on ait

$$\partial_t v+v\cdot\nabla v=-\nabla p.$$

Notons que ∇v représente la matrice $(\partial_i v^j)_{i,j}$. Pour démontrer ce théorème, il suffit d'observer que, si Θ est une fonction de $[-a,a]$ dans $\mathcal{L}$, telle que $\Theta(0,\cdot)=\psi$, alors

$$\Theta([-a,a])\subset\mathcal{L}_0 \iff$$
$$\Big(\operatorname{div}(\partial_s\Theta)(s,t,\Theta^{-1}(s,t,x))=0 \quad\text{et}\quad \partial_s\Theta(s,t_0,\cdot)=\partial_s\Theta(s,t_1,\cdot)=0\Big)$$

En effet, posons

$$\phi(s,t,x)\stackrel{\text{déf.}}{=}(\partial_s\Theta)(s,t,\Theta^{-1}(s,t,x)).$$

Comme, pour tout s de $[-a, a]$, $\Theta(s, t_0, x) = x$ et $\Theta(s, t_1, \psi_1(x)) = \psi_1(x)$, on a

$$\Theta(s, t_0, \cdot) = \partial_s \Theta(s, t_1, \cdot) = 0.$$

Enfin, pour la condition de divergence, il suffit d'observer que

$$\partial_s \det D_x \Theta(s, t, x) = (\operatorname{div} \phi)(s, t, \Theta(s, t, x)) \det D_x \Theta(s, t, x).$$

De plus, d'après (1.2.3), on a

$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}(\Theta(s))_{|s=0} = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{T}^d} \partial_t \psi(t, x)\, \partial_t \tau(0, t, \psi(t, x)))\, dt\, dx.$$

Comme $\phi(0, t_0, \cdot) = \phi(t_1, \cdot) = 0$, on a par intégration par parties et par application du théorème de dérivation composée,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}(\Theta(s))_{|s=0} = -\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t, \psi(t, x)) \cdot \phi(t, \psi(t, x))\, dt\, dx.$$

Comme pour tout t, $\psi(t, \cdot)$ est un difféomorphisme qui préserve la mesure, on a

$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}(\Theta(s))_{|s=0} = -\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t, y) \cdot \phi(t, y)\, dt\, dy.$$

Considérons maintenant un champ de vecteurs ϕ de divergence nulle, dépendant du temps et tel que $\phi(t_0, \cdot) = \phi(t_1, \cdot) = 0$, et considérons Θ défini par

$$\begin{cases} \partial_s \Theta(s, x) = \phi(t, \Theta(s, t, x)) \\ \Theta(0, t, x) = \psi(t, x). \end{cases}$$

On a bien que Θ est une courbe tracée sur $\mathcal{L}_0$. Ainsi donc, ψ sera le flot d'un fluide parfait incompressible si et seulement si, pour tout champ de vecteurs ϕ de divergence nulle, dépendant du temps, on a

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t, y) \cdot \phi(t, y)\, dt\, dy = 0.$$

En prenant $\phi(t, y)$ du type $\alpha(t)\phi(y)$, on trouve que ceci est équivalent à

$$\forall t \in [t_0, t_1], \quad \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t, y) \cdot \phi(y)\, dy = 0. \tag{1.2.7}$$

Introduisons maintenant le rotationnel ou tourbillon (vorticity en anglais) qui est une quantité clef de la mécanique des fluides. Rappelons sa définition.

Définition 1.2.8. Si v est un champ de vecteurs, le rotationnel de v, noté Ω_v ou simplement Ω en l'absence d'ambiguïté, est la partie antisymétrique de la matrice Dv, c'est-à-dire que

$$\Omega_j^k \stackrel{\text{déf.}}{=} \partial_j v^k - \partial_k v^j$$

Remarquons qu'en dimension 2 d'espace, il peut être représenté par le scalaire noté ω qui vaut $\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$ et qu'en dimension 3 il peut être représenté par le vecteur

$$\Omega = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

Nous avons la formule très simple suivante

$$\Delta u^j = \sum_k \partial_k \Omega_{u_j^k} + \partial_j \operatorname{div} u, \tag{1.2.9}$$

où l'opérateur laplacien Δ est défini par

$$\Delta u^j = \sum_i \partial_i^2 u^j.$$

Le laplacien étant injectif sur les fonctions de moyenne nulle, on a, pour un champ de vecteurs de divergence nulle v quelconque,

$$v^j = \sum_k \partial_k \Delta^{-1} \Omega_k^j. \tag{1.2.10}$$

On a noté Δ^{-1} l'opérateur inverse du laplacien. On peut par exemple le définir en utilisant la transformée de Fourier : à toute fonction f définie sur $\mathbb{T}^d$ on associe sa transformé de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,$$

où ξ est un vecteur de $\mathbf{Z}^d$; si f est de moyenne nulle alors $\mathcal{F}(f)(0) = 0$ et

$$\mathcal{F}(\Delta^{-1} f)(\xi) = |\xi|^{-2} \mathcal{F}(f)(\xi). \tag{1.2.11}$$

Il est maintenant facile de voir que, si u est un champ de vecteurs tel que, pour tout champ de vecteurs de divergence nulle ϕ, on a

$$\int_{\mathbb{T}^d} u(x) \cdot \phi(x)dx = 0,$$

alors, en prenant pour ϕ des champ de vecteurs dont la j-ième composante est $-\partial_k f$, la k-ième $\partial_j f$, on trouve que $\Omega_u = 0$. Le laplacien étant inversible sur les fonctions de moyenne nulle, la formule (1.2.9) assure que u est un gradient.

Dans toute la suite de ce texte, nous allons donc considérer le problème suivant, où les inconnues sont le champ de vecteurs v et le champ scalaire p définis sur $[0,T] \times \mathbb{T}^d$ et vérifiant

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

Remarquons tout de suite que si (v,p) est une solution de classe C^1 de (E) et $\overline{v}$ est un vecteur constant de $\mathbb{R}^3$, alors le couple défini par

$$\big(v(t, x - \overline{v}t)\,,\ p(t, x - \overline{v}t)\big)$$

est aussi solution du système[(1)]. Dans toute la suite, nous supposerons donc toujours (sans le rappeler) que v et p sont de moyenne nulle.

Nous allons conclure cette section par une formulation, dite faible, de (E), qui sera utile lorsque nous quitterons le cadre des solutions classiques, c'est-à-dire C^1 (voir les sections 1.5 et 1.6). Ce type de formulation sera aussi utilisée dans le texte suivant pour l'équation de Navier-Stokes.

Définition 1.2.12. Soit v un champ de vecteurs de divergence nulle dont les composantes appartiennent à $L^2_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbb{T}^d)$. On dit que v est une *solution faible* de (E) associée à la donnée initiale v_0 si, pour tout champ de vecteurs ϕ dans $\mathcal{C}^\infty([0,T] \times \mathbb{T}^d)$ à support compact, de divergence nulle, on a

$$(1.2.13) \qquad \int_{\mathbb{T}^d} v \cdot \phi(t,x)\,dx \\ = \int_{\mathbb{T}^d} v_0(x) \cdot \phi(0,x)\,dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^d} (v \otimes v : \nabla\phi + v \cdot \partial_t \phi)\,dx\,dt'.$$

Pour deux vecteurs a et b, on a noté $a \otimes b$ la matrice

$$(1.2.14) \qquad (a \otimes b)_{ij} \stackrel{\text{déf.}}{=} a^i b^j$$

(1) C'est l'invariance galiléenne de la mécanique classique.

et si A et B sont deux matrices alors

$$A : B \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}. \tag{1.2.15}$$

Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle de classe C^1 vérifiant (1.2.7), en appliquant cette formulation à un champ de vecteurs de divergence nulle quelconque de classe C^1 et dépendant du temps, on trouve, par une intégration en temps puis des intégrations par parties et grâce au fait que v est de divergence nulle, que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t,y) \cdot \phi(t,y)\, dy\, dt \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} v(t,y) \cdot \phi(t,y)\, dy - \int_{\mathbb{T}^d} v(0,y) \cdot \phi(0,y)\, dy \\
&\qquad\qquad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^d} (v \otimes v : \nabla\phi + v \cdot \partial_t \phi)\, dy\, dt'.
\end{aligned}$$

1.3. Résolution locale en temps pour des données suffisamment régulières

Nous allons tout d'abord définir les espaces fonctionnels avec lesquels nous allons travailler.

Définition 1.3.1. Soit r un élément de $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. L'espace C^r des fonctions höldériennes d'indice r est l'ensemble des fonction a de $\mathbb{T}^3$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\|a\|_{C^r} \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{|\alpha| \leqslant [r]} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{|\alpha|=[r] \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha a(x) - \partial^\alpha a(y)|}{|x-y|^{r-[r]}} < \infty.$$

On notera C^r_{div} l'ensemble des champ de vecteurs de divergence nulle de $\mathbb{T}^3$ dont les composantes appartiennent à C^r.

Remarquons que la famille C^r est une famille décroissante d'espace et que, grâce au théorème d'Ascoli, les inclusions sont compactes.

Le résultat fondamental de cette section est le suivant.

Théorème 1.3.2. *Soient r un réel strictement supérieur à 1 et v_0 un champ de vecteurs appartenant à C^r_{div}. Il existe alors un unique $T^\star$ maximal, et un unique couple (v,p) appartenant à l'espace*

$L^\infty_{\rm loc}([0,T^\star[;C^r_{\rm div}\times C^{r+1}))$ *solution de* (E)*. En d'autres termes, pour tout* $T<T^*$ *il existe une constante* C_T *telle que pour tout* $t\in[0,T]$

$$\|v(t,\cdot)\|_{C^r}+\|p(t,\cdot)\|_{C^{r+1}}\leqslant C_T$$

D'autre part il existe une constante C *ne dépendant que de* r *telle que*

$$T^\star\geqslant\frac{C}{\|v_0\|_{C^r}}\cdot\tag{1.3.2(*)}$$

Enfin, si le temps maximal d'existence $T^\star$ *est fini, alors*

$$\int_0^{T^\star}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt=\infty.$$

La première étape consiste à calculer la pression. En effet, considérons une solution (v,p) de classe $C^1\times C^2$ de (E). En appliquant l'opérateur de divergence à (E), on trouve que la pression satisfait

$$-\Delta p=\sum_{j,k}\partial_jv^k\,\partial_kv^j.\tag{1.3.3}$$

Remarquons que le fait que le champ de vecteurs v soit de divergence nulle assure que

$$-\Delta p=\sum_{j,k}\partial_j(v^k\partial_kv^j)=\sum_{j,k}\partial_j\partial_k(v^kv^j).\tag{1.3.4}$$

Comme nous sommes dans le cadre périodique et que p est de moyenne nulle, la pression p est déterminée de manière unique par (1.3.3). La démonstration du théorème repose essentiellement sur le résultat suivant que nous admettrons, et dont la démonstration n'est pas tout à fait immédiate. Notons simplement que le fait que les champs de vecteurs v et w soient de divergence nulle est crucial dans la preuve.

Proposition 1.3.5. *Soient* v *et* w *deux champs de vecteurs. On définit* $\pi(v,w)$

$$\pi(v,w)\stackrel{déf.}{=}-\sum_{j,k}\Delta^{-1}\partial_j\partial_k(v^kw^j).$$

Pour tout $r>1$, l'opérateur bilinéaire $\nabla\pi$ envoie $C^r_{\mathrm{div}}\times C^r_{\mathrm{div}}$ dans C^r et il existe une constante c_r telle que, pour tout couple (v,w) de $C^r_{\mathrm{div}}\times C^r_{\mathrm{div}}$, on ait

$$\|\nabla\pi(v,w)\|_{C^r}\leqslant c_r(\|v\|_{C^r}\|\nabla w\|_{L^\infty}+\|\nabla v\|_{L^\infty}\|w\|_{C^r}).$$

Enfin, pour $0<\rho<1$, il existe une constant c_ρ telle que, pour tous champs de vecteurs v et w de divergence nulle lipschitziens, on ait

$$\|\nabla\pi(v,w)\|_{C^\rho}\leqslant c_\rho(\|v\|_{C^\rho}\|\nabla w\|_{L^\infty}+\|\nabla v\|_{L^\infty}\|w\|_{C^\rho}).$$

Une fois cette proposition établie, on introduit un schéma itératif en définissant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0(t,x)=v_0(x)$ et

$$\begin{cases}\partial_t v_{n+1}+v_n\cdot\nabla v_{n+1}=\nabla\pi(v_n,v_n)\\ \qquad\qquad v_{n+1|t=0}=v_0.\end{cases}$$

La construction de la solution se fait en deux étapes qui sont générales dans la construction de solutions de systèmes de type hyperbolique :

(1) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée « en grandes normes » c'est-à-dire ici dans $L^\infty([0,T];C^r)$ pour T assez petit ;

(2) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy « en petites normes » c'est-à-dire ici dans $L^\infty([0,T];C^{r-1}$ pour T assez petit.

Pour ce faire, observons que si $\partial_t f+v\cdot\nabla f=g$, alors, en intégrant le long des lignes de flots de v, on peut démontrer que, pour $\rho\in\,]0,1[$, et pour $\lambda\geqslant 1$,

(1.3.6)
$$\|f(t)\|_{C^\rho}\leqslant\Big(\|f(0)\|_{C^\rho}+\int_0^t\|g(t')\|_{C^\rho}\exp\Big(-\lambda\int_0^{t'}\|\nabla v(t'')\|_{L^\infty}dt''\Big)\Big)\\ \times\exp\Big(\lambda\int_0^t\|\nabla v(t')\|_{L^\infty}dt'\Big).$$

En dérivant l'équation et en observant que, pour tout couple de fonctions (a,b) de $(C^\rho)^2$, on a

$$\|ab\|_{C^\rho}\leqslant\|a\|_{L^\infty}\|b\|_{C^\rho}+\|a\|_{C^\rho}\|b\|_{L^\infty}\leqslant\|a\|_{C^\rho}\|b\|_{C^\rho}, \tag{1.3.7}$$

on démontre que, pour $1<r<2$, et pour tout $\lambda\geqslant C$ (constante dépendant de r),

$$\|f(t)\|_{C^r} \leqslant \left(\|f(0)\|_{C^r} + \int_0^t \|g(t')\|_{C^r} \exp\Big(-\lambda \int_0^{t'} \|v(t'')\|_{C^r} dt''\Big)\right) \\ \times \exp\Big(\lambda \int_0^t \|v(t')\|_{C^r} dt'\Big).$$

En appliquant cette inégalité à $v = v_n$, $f = v_{n+1}$ et $g = \nabla\pi(v, v)$, on démontre aisément par récurrence que, si $T\|v_0\|_{C^r}$ est assez petit, alors, pour tout n, on a $\|v_{n+1}\|_{L^\infty_T(C^r)} \leqslant 2\|v_0\|_{C^r}$.

Pour démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $L^\infty([0, T); C^{r-1})$, écrivons que pour $w_{n+1} \stackrel{\text{déf.}}{=} v_{n+1} - v_n$, et $w_0 = 0$, on a

$$\partial_t w_{n+1} + v_n \cdot \nabla w_{n+1} = -w_n \cdot \nabla v_n + \nabla\pi(w_n, v_n + v_{n-1}).$$

La seconde inégalité de la proposition 1.3.5 ainsi que les inégalités (1.3.6) et (1.3.7) assurent que, pour $T\|v_0\|_{C^r}$ assez petit, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty([0, T); C^{r-1})$ et donc converge vers v dans $L^\infty([0, T]; C^{r-1})$. En utilisant la compacité de l'inclusion de de C^{r_1} dans C^{r_2} lorsque $r_1 < r_2$ (c'est le théorème d'Ascoli), on en déduit que v appartient à $L^\infty[0, T]; C^r)$ et est solution de (E). Enfin, en dérivant l'équation et en appliquant (1.3.6) avec $f = \partial_j v$ et $g = \partial_j v \cdot \nabla v + \partial_j \nabla\pi$ puis en appliquant l'inégalité (1.3.7), on trouve que

$$\|v(t)\|_{C^r} \leqslant \|v_0\|_r \exp\Big(C_r \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^\infty} dt'\Big) \tag{1.3.8}$$

ce qui permet de démontrer l'ensemble du théorème.

1.4. Une condition nécessaire d'explosion portant sur le tourbillon

Le résultat principal de cette section est une amélioration de la condition d'explosion (1.3.2)(∗).

Théorème 1.4.1. *Soient r un réel strictement supérieur à* 1 *et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à C^r_{div}. Soit $T^\star$ le temps maximal d'existence de la solution de* (E) *donnée par le* *théorème* 1.3.2. *Si* $T^\star$ *est fini, alors*

$$\int_0^{T^\star} \|\Omega(t)\|_{L^\infty} dt = +\infty.$$

Ce résultat a un corollaire très important en dimension 2 d'espace. Un calcul très simple montre que, si (v, p) est solution de (E) alors (cf. définition 1.2.8)

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0. \tag{1.4.2}$$

Donc la norme L^∞ du tourbillon est conservée et donc la condition d'explosion du théorème 1.4.1 ci-dessus n'est jamais vérifiée ! On en déduit alors le théorème suivant.

Théorème 1.4.3. *Supposons* $d = 2$. *Soit* v_0 *une donnée initiale dans* C^r_{div} *avec* $r > 1$. *Il existe alors une unique solution globale* (v, p) *dans* $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; C^r_{\mathrm{div}} \times C^{r+1})$.

La démonstration du théorème 1.4.1 repose sur la loi de Biot et Savard (1.2.10). Il s'agit maintenant de traduire cette formule en terme d'estimations. Ceci se fait au travers du théorème suivant que nous admettrons et qui contient des inégalités difficiles d'analyse harmonique.

Théorème 1.4.4. *Pour tout* $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, *il existe une constante* C *telle que, pour tout* v *dans* C^r_{div}, *on ait*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leqslant C \|\Omega\|_{L^\infty} \log(e + \|v\|_{C^r}). \tag{1.4.5}$$

De plus, il existe une constante C *telle que, pour tout* $p \in]1, \infty[$,

$$\|\nabla v\|_{L^p} \leqslant Cp \|\Omega\|_{L^p}. \tag{1.4.6}$$

Enfin, il existe une constante C *telle que, pour tous* x *et* y *dans* $\mathbb{T}^d$,

$$|v(x) - v(y)| \leqslant C \|\Omega\|_{L^\infty} |x - y| (1 - \log(|x - y|)). \tag{1.4.7}$$

Comme nous le verrons dans la section 1.6, il existe des exemples explicites de tourbillon borné pour lequel le champ de vecteurs de divergence nulle associé n'est pas lipschiztien.

Pour démontrer le théorème 1.4.1, on procède par contraposition. Soit T un temps strictement positif et v une solution sur $[0, T[$, localement bornée à valeurs $C^r_{\rm div}$; on suppose que

$$\int_0^T \|\Omega(t)\|_{L^\infty} dt < \infty. \tag{1.4.8}$$

Appliquons l'inégalité (1.4.5) à chaque instant $t < T$. Il vient

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leqslant C\|\Omega(t)\|_{L^\infty} \log(e + \log \|v(t)\|_{C^r}).$$

L'inégalité (1.3.8) implique alors que

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} &\leqslant C\|\Omega(t)\|_{L^\infty} \log\Big[e + \|v_0\|_{C^r} \exp\Big(C\int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^\infty} dt'\Big)\Big]\\ &\leqslant C\log(e + \|v_0\|_{C^r})\|\Omega(t)\|_{L^\infty} + C\|\Omega(t)\|_{L^\infty}\int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^\infty} dt'.\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet d'affirmer que la fonction

$$\int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^\infty} dt'$$

reste bornée et donc que T n'est pas le temps maximal d'existence.

1.5. Les solutions à tourbillon borné en dimension deux

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux solutions de l'équation d'Euler en dimension 2 d'espace associées à des données initiales dont le tourbillon est seulement borné. Énonçons le théorème principal de cette section, dû à Yudovich [2].

Théorème 1.5.1. *Soit v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle tel que son tourbillon ω_0 soit borné. Il existe alors une unique solution faible v de* (E) *telle que, pour tout temps t, et pour tout p de $[1, \infty]$, on ait*

$$\|\omega(t, \cdot)\|_{L^p} \leqslant \|\omega_0\|_{L^p}.$$

De plus, ce champ de vecteurs v possède un flot. Plus précisément, il existe une unique application ψ continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{T}^2$ telle que

$$\psi(t, x) = x + \int_0^t v(t', \psi(t', x))dt'.$$

En outre, il existe une constante C telle que

$$\psi(t) \in C^{\exp(-Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^p})}.$$

La démonstration de la première partie du théorème repose essentiellement sur le lemme suivant.

Lemme 1.5.2. *Soient* (v_1, p_1) *et* (v_2, p_2) *deux solutions faibles à tourbillon borné du système d'Euler incompressible* (E) *en dimension* 2 *d'espace. Il existe alors une constante* C_0 *(ne dépendant que de* $\|\omega_1(0)\|_{L^2}$ *et de* $\|\omega_2(0)\|_{L^2}$*) telle qu'on ait l'inégalité suivante :*

$$\|v_1(0)-v_2(0)\|_{L^2}^2 \leqslant e^{-\exp(2C_0\|\omega_0\|_{L^\infty}t)-1}$$
$$\Longrightarrow \|v_1(t)-v_2(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|v_1(0)-v_2(0)\|_{L^2}^{-2\exp(C_0 t)} e^{(1-2\exp(-C_0 t))}.$$

Remarquons tout d'abord que ce lemme implique immédiatement l'unicité de la solution lorsque le tourbillon est borné.

Nous n'allons donner quelques éléments de la démonstration que nous présentons que dans le cas où v_1 et v_2 sont régulières. En formant l'équation sur la différence $w \stackrel{\text{déf.}}{=} u_1 - u_2$ et en faisant une estimation d'énergie, on trouve que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \Big|(w\cdot\nabla v_2|w(t))_{L^2}\Big|.$$

Soit $p>1$. On a, d'après l'inégalité de Hölder et les inégalité (1.4.6) et (1.4.7),

$$\begin{aligned}\Big|(w\cdot\nabla v_2|w(t))_{L^2}\Big| &\leqslant Cp\|\omega_2(0)\|_{L^\infty}\|w(t)\|_{L^{2p/(p-1)}}^2\\ &\leqslant Cp\|\omega_2(0)\|_{L^\infty}\|w(t)\|_{L^\infty}^{2/(p-1)}\|w(t)\|_{L^2}^{2(1-1/(p-1))}\\ &\leqslant Cp(\|\omega_1\|_{L^\infty}+\|\omega_2(0)\|_{L^\infty})^{2/(p-1)}\|\omega_2(0)\|_{L^\infty}\|w(t)\|_{L^2}^{2(1-1/(p-1))}.\end{aligned}$$

Supposons que $\|w(0)\|_{L^2}^2<1$ et considérons un réel η tel que $0<\eta<1-\|w(0)\|_{L^2}^2$. On pose alors $J_\eta(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \eta+\|w(t)\|_{L^2}^2$.

$$J_\eta'(t) \leqslant Cp(\|\omega_1\|_{L^\infty}+\|\omega_2(0)\|_{L^\infty})^{2/(p-1)}\|\omega_2(0)\|_{L^\infty}\|w(t)\|_{L^2}^{2(1-1/(p-1))}.$$

Si $p\geqslant 2$, on a

$$J_\eta'(t) \leqslant C_0 p J_\eta(t)^{1-1/(p-1)}.$$

Tant que $J_\eta'(t)\leqslant e^{-2}$ on peut prendre $p=1-\log J_\eta(t)$. D'où il vient

$$J_\eta(t) \leqslant C_0(1-\log J_\eta(t))J_\eta(t).$$

D'où le résultat par intégration et en faisant ensuite tendre η vers 0.

Démontrons l'existence de solutions. Pour ce faire, considérons la suite de données initiales définies par

$$v_{0,n}(x) = \int \chi((n+1)y) v_0(x-y)dy$$

où χ est une fonction indéfiniment différentiable à support dans $[-1/2, 1/2]^2$ d'intégrale 1. On a bien évidemment

$$\|\omega_{0,n}\|_{L^\infty} \leqslant \|\omega_0\|_{L^\infty} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|v_{0,n} - v_0\|_{L^2} = 0.$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de solutions globales régulières données par le théorème 1.4.3. Le lemme 1.5.2 permet d'affirmer que pour tout T, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty([0,T]; L^2)$. On peut donc passer à la limite dans la formulation faible (1.2.13) et la première partie du théorème est ainsi démontrée.

La seconde partie du théorème est la conséquence, via l'inégalité (1.4.7) du théorème 1.4.4, d'un théorème général sur les équations différentielles ordinaires. Dans toute la suite, μ désignera une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même, nulle en 0, strictement positive ailleurs, croissante et continue.

Définition 1.5.3. Considérons deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ). Nous désignerons par $\mathcal{C}_\mu(X, Y)$ l'ensemble des fonctions u bornées de X dans Y pour lesquelles il existe C telle que, pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$, on ait

$$\delta(u(x), u(y)) \leqslant C\mu(d(x,y)).$$

Remarque. Si (Y, δ) est un espace de Banach (que l'on notera $(E, \|\cdot\|)$), l'espace $\mathcal{C}_\mu(X, E)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_\mu = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{(x,y)\in X\times X,\, x\neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\mu(d(x,y))}.$$

Le théorème ci-dessous décrit sous quelles hypothèses simples nous avons existence et unicité des courbes intégrales pour une équation différentielle ordinaire.

Théorème 1.5.4. *Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et (t_0, x_0) un élément de $I \times \Omega$. On considère alors une fonction F appartenant à l'espace $L^1_{\mathrm{loc}}(I; \mathcal{C}_\mu(\Omega; E))$.*

On suppose de plus que μ satisfait la condition dite d'Osgood, à savoir que

$$\int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty. \tag{1.5.4(*)}$$

Alors, il existe un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et tel que l'équation

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))ds \tag{EDO}$$

admette une et une seule solution continue définie sur l'intervalle J.

Pour démontrer ce théorème, commençons donc par établir l'unicité des trajectoires. Considérons $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de (EDO) définies sur un voisinage $\widetilde{J}$ de t_0 avec la même donnée initiale x_0. On pose

$$\rho(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|.$$

On déduit immédiatement de l'appartenance de F à $L^1_{\rm loc}(I; \mathcal{C}_\mu(\Omega, E))$ que

$$0 \leqslant \rho(t) \leqslant \int_{t_0}^t \gamma(s)\mu(\rho(s))ds \quad \text{avec } \gamma \in L^1_{\rm loc}(I) \text{ et } \gamma \geqslant 0. \tag{1.5.5}$$

Le lemme clef est le suivant.

Lemme 1.5.6. *Soient ρ une fonction mesurable et positive, γ une fonction positive localement intégrable et μ une fonction continue ainsi que croissante. On suppose que, pour un réel positif a, la fonction ρ vérifie*

$$\rho(t) \leqslant a + \int_{t_0}^t \gamma(s)\mu(\rho(s))ds. \tag{1.5.6(a)}$$

Si a est non nul, alors on a

$$-\mathcal{M}(\rho(t)) + \mathcal{M}(a) \leqslant \int_{t_0}^t \gamma(s)ds \quad \textit{avec } \mathcal{M}(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\mu(r)} \cdot \tag{1.5.6(b)}$$

Si a est nul et si μ vérifie (1.5.4)(*), alors la fonction ρ est identiquement nulle.

Pour démontrer ce lemme, posons tout d'abord

$$R_a(t) = a + \int_{t_0}^{t} \gamma(s)\mu(\rho(s))ds.$$

La fonction R_a est une fonction continue et croissante. On a donc, au sens des distributions,

$$\dot{R}_a(t) = \gamma(t)\mu(\rho(t)).$$

Il résulte alors de la croissance de μ que

$$\dot{R}_a(t) \leqslant \gamma(t)\mu(R_a(t)). \tag{1.5.7}$$

Supposons que a soit strictement positif. La fonction R_a est alors strictement positive. Comme la fonction $\mathcal{M}$ est continûment différentiable sur l'ensemble des réels strictement positifs, il résulte de (1.5.7) que

$$-\frac{d}{dt}\mathcal{M}(R_a(t)) = \frac{\dot{R}_a(t)}{\mu(R_a(t))} \leqslant \gamma(t).$$

En intégrant cette inégalité, on obtient l'inégalité (1.5.6)(b) en se souvenant que la fonction $-\mathcal{M}$ est croissante et que $\rho \leqslant R_a$.

Supposons maintenant a nul et ρ non identiquement nulle près de t_0. La croissance de μ autorise à remplacer ρ par la fonction (que l'on persistera à noter ρ) $\sup_{s\in[t_0,t]} \rho(s)$. Il existe alors un réel t_1, strictement supérieur à t_0, tel que l'on ait $\rho(t_1) > 0$. Vu que la fonction ρ satisfait (1.5.6)(a) pour $a = 0$, elle satisfait également cette inégalité pour tout a' strictement positif. Il vient alors de l'inégalité (1.5.6)(b) que

$$\mathcal{M}(a') \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\tau)d\tau + \mathcal{M}(\rho(t_1)),$$

et ce, pour tout a' strictement positif. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse faite sur la divergence en 0 de l'intégrale de l'inverse de μ ; la démonstration du lemme alors achevée.

Grâce à l'inégalité (1.5.5), l'unicité des courbes intégrales passant par un point donné est une conséquence immédiate du lemme 1.5.6. Démontrons l'existence. On considère le classique schéma de Picard

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x_k(\tau))d\tau.$$

Nous omettons la vérification du fait que, pour J assez petit, on reste dans le domaine de définition de la fonction F et que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty(J)$. Nous allons démontrer que la suite ainsi définie est une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions continues de l'intervalle J (choisi suffisamment petit) dans E. Pour cela, posons

$$\rho_{k+1,n}(t) = \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|.$$

Il vient

$$0 \leqslant \rho_{k+1,n}(t) \leqslant \int_{t_0}^t \gamma(\tau)\mu(\rho_{k,n}(\tau))d\tau$$

En posant $\rho_k(t) = \sup_n \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|$, on déduit de la croissance de μ que

$$0 \leqslant \rho_{k+1}(t) \leqslant \int_{t_0}^t \gamma(\tau)\mu(\rho_k(\tau))d\tau.$$

Grâce au lemme de Fatou et à la croissance de μ, on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$\widetilde{\rho}(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \limsup_{k\to+\infty} \rho_k(t) \leqslant \int_{t_0}^t \gamma(\tau)\mu(\widetilde{\rho}(\tau))d\tau.$$

En appliquant à nouveau le lemme 1.5.6, on trouve que $\widetilde{\rho}(t)$ est identiquement nulle au voisinage de t_0, ce qui conclut la démonstration du théorème 1.5.4.

Pour démontrer l'intégralité du théorème de Yudovich, il suffit maintenant d'étudier la régularité en la variable x du flot ψ. Pour ce faire, considérons deux courbes intégrales de v, notées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, issues respectivement de deux points distincts x_1 et x_2 tels que

$$\|x_1 - x_2\| < 1.$$

Les inégalités écrites ci-après sont valables seulement si

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| < 1.$$

Par définition de l'espace C_μ, il vient

$$\begin{aligned}\|x_1(t) - x_2(t)\| &\leqslant \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|v(\tau, x_1(\tau)) - v(\tau, x_2(\tau))\|d\tau \\ &\leqslant \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|v(\tau)\|_\mu \times \mu(\|x_1(\tau) - x_2(\tau)\|)d\tau\end{aligned}$$

Appliquons alors le lemme 1.5.6 avec $\rho(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|$, $a = \|x_1 - x_2\|$ et $\gamma(t) = \|v(t)\|_\mu$. Comme dans ce cas $\mu(r) = r(1 - \log r)$, il vient

$$-\log(1-\log\|x_1(t)-x_2(t)\|)+\log(1-\log\|x_1-x_2\|) \leqslant \int_0^t \|v(\tau)\|_\mu d\tau.$$

En passant deux fois à l'exponentielle comme dans la précédente section, il vient

$$\|x_1(t)-x_2(t)\| \leqslant \|x_1-x_2\|^{\exp - \int_0^t \|v(s)\|_\mu ds} e^{1-\exp - \int_0^t \|v(s)\|_\mu ds}, \tag{1.5.8}$$

ceci ayant lieu tant que $\|x_1(t) - x_2(t)\| < 1$. La preuve du théorème 1.5.4 (et donc celle du théorème 1.5.1) est ainsi achevée.

1.6. Un exemple

Le but de cette section est d'exhiber une solution du système d'Euler incompressible montrant le caractère optimal du théorème de Yudovich. Pour des raisons de techniques de calcul, nous présentons cet exemple dans $\mathbb{R}^2$ et non dans $\mathbb{T}^2$. Nous allons construire une solution vérifiant les propriétés suivantes :

- le tourbillon ω du champ de vecteurs v solution est, à chaque instant t, borné et nul en dehors d'un ensemble compact,
- à chaque instant t, le flot $\psi(t)$ de v n'appartient pas à la classe de Hölder $C^{\exp -t}$.

Construisons tout d'abord la donnée initiale. Soit ω_0 la fonction sur le plan $\mathbb{R}^2$ nulle en dehors de $[-1, 1] \times [-1, 1]$, impaire en les deux variables x_1 et x_2 et valant 2π sur $[0, 1] \times [0, 1]$. On considère le champ de vecteurs v_0 défini par

$$v_0(x_1, x_2) = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_2 - y_2}{|x - y|^2} \omega_0(y) dy \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_1 - y_1}{|x - y|^2} \omega_0(y) dy. \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer le théorème ci-dessous.

Théorème 1.6.1. *Soit v la solution de l'équation d'Euler associée à la donnée initiale v_0 définie ci-dessus. À l'instant t, le flot $\psi(t)$ du champ de vecteurs v n'appartient à C^α pour aucun $\alpha > \exp -t$.*

Pour démontrer ce théorème, le fait que le champ de vecteurs v_0 présente des symétries va nous permettre de le décrire plus explicitement. En effet, le champ de vecteurs v_0 est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Il en résulte que ce champ de vecteurs est tangent à ces deux axes et donc nul à l'origine. Nous allons démontrer la proposition suivante qui implique en particulier que le champ de vecteurs v_0 n'est pas lipschitzien.

Proposition 1.6.2. *Il existe une constante C telle que, pour tout x_1 tel que $0 \leqslant x_1 \leqslant C$, on ait*

$$v_0^1(x_1, 0) \geqslant -2x_1 \log x_1.$$

En effet, en posant $\widetilde{\omega}_0(x_1) = 2H(x_1) - 1$ (H désignant la fonction de Heaviside), il vient

$$\begin{aligned} v_0^1(x_1, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{y_2}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy \\ &= \int_{-1}^{1} dy_1 \widetilde{\omega}_0(y_1) \int_0^1 \frac{2y_2}{(x_1 - y_1)^2 + y_2^2} dy_2. \end{aligned}$$

Par un calcul immédiat, on en déduit que

$$\begin{aligned} &v_0^1(x_1, 0) = \widetilde{v}_0^1(x_1, 0) + \overline{v}_0^1(x_1, 0) \quad \text{avec} \\ &\widetilde{v}_0^1(x_1, 0) = -\int_0^1 \log(x_1 - y_1)^2 dy_1 + \int_0^1 \log(x_1 + y_1)^2 dy_1 \quad \text{et} \\ &\overline{v}_0^1(x_1, 0) = \int_0^1 \log \frac{1 + (x_1 - y_1)^2}{1 + (x_1 + y_1)^2} dy_1. \end{aligned}$$

Il est évident que la fonction $x_1 \mapsto \overline{v}_0^1(x_1, 0)$ est une fonction impaire indéfiniment différentiable. De plus, un calcul d'intégrale des plus élémentaires assure que, pour $0 \leqslant x_1 < 1$, on a

$$\widetilde{v}_0^1(x_1, 0) = -4x_1 \log x_1 + 2(1 + x_1) \log(1 + x_1) - 2(1 - x_1) \log(1 - x_1).$$

Donc, lorsque $0 \leqslant x_1 < 1$, on a

$$v_0^1(x_1, 0) = -4x_1 \log x_1 + f(x_1),$$

où f désigne une fonction impaire indéfiniment différentiable sur $]-1, 1[$. Ceci assure la conclusion de la proposition.

Revenons maintenant à l'équation d'Euler et à sa solution v correspondant à la donnée initiale v_0. D'après le théorème de Yudovitch (le théorème 1.5.1), le flot du champ de vecteurs v est une fonction continue de la variable (t, x). De plus, on sait qu'à chaque instant, le champ de vecteurs v est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Donc ces deux axes sont globalement invariants par le flot. L'origine, qui est leur point d'intersection, est donc stable par le flot ψ du champ de vecteurs v. On a ainsi, pour tout t,

$$\psi(t,0) = 0, \quad \psi^1(t,0,x_2) = 0 \quad \text{et} \quad \psi^2(t,x_1,0) = 0. \tag{1.6.3}$$

Soit T un réel strictement positif arbitraire. Le tourbillon est conservé le long des lignes de champ (voir l'égalité (1.4.2)). La relation (1.6.3) ci-dessus assure donc l'existence d'un voisinage W de l'origine tel que l'on ait, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\omega(t)_{|W} = \omega_{0|W}.$$

Le champ de vecteurs de divergence nulle $\widetilde{v}(t) = v(t) - v_0$ est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Son tourbillon est identiquement nul sur W. Donc, il existe une constante A telle que l'on ait, pour tout $t \in [0, T]$,

$$|v(t,x) - v_0(x)| \leqslant A|x|.$$

De la proposition 1.6.2, il résulte l'existence d'une constante C' telle que, pour tout couple (t, x_1) de $[0, T] \times [0, C']$, on ait

$$v(t, x_1, 0) \geqslant -x_1 \log x_1.$$

Soit maintenant $x_1 \in [0, 1[$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$, on ait

$$\psi^1(t, x_1, 0) \in [0, C'].$$

Il résulte de l'inégalité ci-dessus que l'on a

$$\psi^1(t, x_1, 0) \geqslant x_1(t) \quad \text{avec} \quad \dot{x}_1(t) = -x_1(t) \log x_1(t).$$

Il en résulte alors que

$$\psi^1(t, x_1, 0) \geqslant x_1^{\exp -t}.$$

Vu que $\psi(t, 0) = 0$, le théorème 1.6.1 est démontré.

1.7. Le paradoxe de d'Alembert

L'équation d'Euler reste aujourd'hui encore un modèle central en dynamique des fluides. Néanmoins, sa validité cesse dès que le frottement visqueux devient important. Une illustration frappante de cette limite de validité est le fameux paradoxe de d'Alembert, décrit de manière heuristique dans l'introduction. Plus rigoureusement, ce paradoxe peut s'énoncer comme suit :

Théorème 1.7.1 **(Paradoxe de d'Alembert).** *Soit Λ un « obstacle », c'est-à-dire un domaine régulier et borné de $\mathbb{R}^3$, homéomorphe à une sphère. Soit $u = u(x)$ un champ régulier sur $\overline{\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda}$ (à l'extérieur de l'obstacle) tangent au bord et uniforme à l'infini.*

Si u est de divergence nulle et irrotationnel, alors c'est une solution stationnaire de l'équation d'Euler, et la force exercée sur l'obstacle par l'écoulement associé est nulle :

$$F \stackrel{\text{déf.}}{=} -\int_{\partial\Lambda} pn d\sigma = 0.$$

L'absence de force prédite par ce théorème est bien sûr irréaliste. En particulier, elle interdit aux oiseaux de voler ! En effet, l'air initialement au repos est irrotationnel et cette irrotationnalité est préservée par l'équation d'Euler. En régime permanent, c'est-à-dire pour un oiseau volant à vitesse constante, on est donc dans le cadre du théorème, ce qui prescrit toute portance.

La résolution du paradoxe réside bien sûr dans l'incorporation au modèle d'Euler des mécanismes de frottement visqueux. Ces mécanismes, en générant un tourbillon, permettent de sortir du cadre du théorème. Cela nous amènera à discuter dans les textes suivants des équations de Navier-Stokes.

Nous concluons ce paragraphe par une esquisse de la preuve du théorème 1.7.1. Pour plus de détails, nous renvoyons à [1]. En premier lieu, le fait qu'un champ u irrotationnel et à divergence nulle soit solution de l'équation d'Euler découle de l'identité algébrique :

$$u \cdot \nabla u = -u \times \operatorname{rot} u + \frac{1}{2}\nabla|u|^2,$$

où r*ot* désigne le rotationnel (voir la définition 1.2.8). En particulier, la pression associée est $p(x) = -\frac{1}{2}|u|^2$. De plus, comme $D \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{R}^3 \smallsetminus \Lambda$ est simplement connexe, le champ u est potentiel : $u = \nabla\phi$ avec

$$\Delta\phi = 0 \text{ dans } D, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla\phi \longrightarrow u_\infty \text{ pour } x \longrightarrow +\infty.$$

On écrit alors ϕ sous la forme

$$\phi \stackrel{\text{déf.}}{=} u_\infty \cdot x + \eta(x)$$

pour une fonction harmonique η qui tend vers 0 à l'infini.

Par des arguments classiques sur les fonctions harmoniques, cf. [1], on montre que $\eta(x) = O(|x|^{-2})$ à l'infini, puis que

$$u = u_\infty + O(|x|^{-3}), \quad p = p_\infty + O(|x|^{-3}).$$

Ces propriétés de décroissance permettent d'appliquer la formule de Stokes dans le domaine non borné D, et d'obtenir

$$0 = \int_D (u \cdot \nabla u + \nabla p) = \int_{\partial D} (u \cdot n)u + \int_{\partial D} p\, n,$$

où n désigne la normale sortante à D. Par la condition d'imperméabilité $u \cdot n|_{\partial D} = 0$, on en déduit le résultat.

Références

[1] C. Marchioro & M. Pulvirenti – *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Applied Mathematical Sciences, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] V. Yudovich – « Non stationary flows of an ideal, incompressible fluid », *Zh. Vych. Mat.* **3** (1963), p. 1032–1066.

Jean-Yves Chemin, Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598, Université Pierre et Marie Curie, 75230 Paris Cedex 05, France
E-mail : `chemin@math.univ-lyon1.fr`