Journées mathématiques X-UPS

Année 2003

Dans le sillage de Laurent Schwartz

Jean-Michel Bony

Front d'onde et opérations sur les distributions

Journées mathématiques X-UPS (2003), p. 55-76.
https://doi.org/10.5802/xups.2003-02

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2003, p. 55–76 doi: 10.5802/xups.2003-02

FRONT D'ONDE ET OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

par

Jean-Michel Bony

Table des matières

C'est en 1945 que Laurent Schwartz introduit une extension de la notion de fonction d'une portée considérable. Dans l'espace des distributions, la dérivation est toujours possible et toujours continue. D'autre part, la transformation de Fourier est étendue à l'espace des distributions tempérées, considérablement plus grand que les espaces de fonctions sommables ou de carré sommable, elle est continue et la formule d'inversion est toujours valable. Les distributions constituent de nos jours un outil irremplaçable en analyse et notamment en théorie des équations aux dérivées partielles.

Le concept de *front d'onde* a été introduit en 1969-1970 par M. Sato pour le front d'onde analytique, et par L. Hörmander pour le front

Publication originelle dans Journées X-UPS 2003. Dans le sillage de Laurent Schwartz. Éditions de l'École polytechnique, 2003.

d'onde C^∞, celui dont nous allons parler. À toute distribution u dans $\mathbb{R}^n$ est associé un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ rendant compte du défaut de régularité de u. On donne plus généralement le nom d'*analyse microlocale* 'a une analyse des distributions qui est locale à la fois en la variable d'espace (le premier $\mathbb{R}^n$) et en la variable de fréquence (le second). L'introduction de ces concepts est principalement motivée par la théorie des équations aux dérivées partielles et est à la source de progrès considérable dans ce domaine. Il serait malheureusement déraisonnable de vouloir aborder sérieusement tous ces points dans le cadre limité de deux exposés.

Il se trouve que l'introduction du front d'onde a aussi permis de beaucoup mieux comprendre dans quels cas on peut définir des opérations qui ne sont pas toujours permises en théorie des distributions : la restriction à une hypersurface, ou tout simplement le produit. C'est cet aspect de la théorie que nous avons choisi de développer.

1. Les distributions

Étant donné un compact K de $\mathbb{R}^n$, nous noterons C_K^∞ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support dans K. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $C_0^\infty(\Omega)$ [la notation originale de Schwartz était $\mathcal{D}(\Omega)$] l'espace des fonctions C^∞ dont le support est un compact de Ω. C'est la réunion des C_K^∞ lorsque K parcourt l'ensemble des compacts inclus dans Ω.

Il est bien connu, mais pas totalement évident, que $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas réduit à 0. En fait, pour toute boule de $\mathbb{R}^n$, il existe une fonction C^∞ nulle hors de la boule fermée et strictement positive dans la boule ouverte.

Si f est une fonction localement sommable dans Ω (c'est-à-dire sommable sur tout compact de Ω), on peut lui faire correspondre la forme linéaire suivante sur $C_0^\infty(\Omega)$:

$$(1.1) \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx$$

et il est clair que l'on a la majoration

$$(1.2) \quad \forall K \Subset \Omega,\ \forall \varphi \in C_K^\infty, \quad |\langle f, \varphi\rangle| \leqslant \left(\int_K |f(x)|\, dx\right) \sup_{x\in K} |\varphi(x)|\,.$$

Proposition 1.1. *Deux fonctions localement sommables dans Ω définissent la même forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ si et seulement si elles sont égales presque partout.*

Tout revient à montrer que si f définit la forme linéaire nulle, alors $f = 0$ p.p., ce qui nécessite quelques connaissances sur la régularisation. On choisit une fonction $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule unité et d'intégrale 1 et on pose

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int h\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) f(y)\, dy,$$

fonction qui est bien définie au voisinage d'un compact $K \subset \Omega$ pour ε assez petit. Il faut savoir que f_ε converge vers f en norme L^1 sur K. Comme l'hypothèse implique que les f_ε sont identiquement nulles, cela entraîne le résultat.

On note $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions localement sommables pour la relation d'équivalence $f = g$ p.p.

Définition 1.2. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions dans Ω est constitué des forme linéaire u sur $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant la propriété de continuité suivante :
Quel que soit $K \Subset \Omega$, il existe un entier p et une constante C tels que

$$\forall \varphi \in C_K^\infty, \quad |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{x\in K\,;\,|\alpha|\leqslant p} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{1.3}$$

On a utilisé les notations

$$\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On note aussi x^α le monôme $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Si l'on peut choisir l'entier p ci-dessus indépendamment de K, on dit que la distribution est d'ordre $\leqslant p$ dans Ω.

L'espace $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$, ce que préfigurait la notation (1.1) mais qui n'est justifié que par la proposition 1.1. L'estimation (1.2) montre que ce sont des distributions d'ordre 0. Cela permet de considérer tous les espaces de fonctions qui sont munis d'une injection naturelle dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (espaces $L^p(\Omega)$,

$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $C^k(\Omega)$...) comme des sous-espaces de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ces identifications étant faites, dire qu'une distribution est ou n'est pas une fonction de classe C^k a un sens parfaitement clair.

***Définition 1.3* (convergence).** On dit qu'une suite u_j de distributions converge vers u si

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle u_j, \varphi\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, \varphi\rangle.$$

On démontre que toute distribution est limite d'une suite de fonctions, et même de fonctions C^∞. Vérifions-le sur l'exemple le plus simple de distribution qui ne soit pas une fonction : la masse de Dirac δ définie par $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$.

Proposition 1.4. *On se donne une suite de fonctions positives et sommables f_j, d'intégrale* 1*, nulles en dehors de boules de centre* 0 *dont le rayon r_j tend vers* 0*. Alors f_j tend vers δ au sens des distributions.*

Il suffit d'écrire

$$\langle f_j, \varphi\rangle = \varphi(0) + \int_{|x|\leqslant r_j} f_j(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx.$$

Le second terme du membre de droite tend vers 0 tandis que le premier vaut $\langle \delta, \varphi\rangle$.

On définie plus généralement δ_a, pour $a \in \mathbb{R}^n$ par $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$.

2. Dérivation

Lorsque f est de classe C^1 dans Ω, on a immédiatement, en intégrant par parties,

$$\Big\langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi\Big\rangle = \int \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int f(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\,dx = -\Big\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\Big\rangle.$$

La formule se généralise immédiatement aux distributions.

Définition 2.1. Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la distribution $\partial u/\partial x_k$ est définie par

$$\Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi\Big\rangle = -\Big\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\Big\rangle.$$

La dérivation est continue : si $u_j \to u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\partial u_j/\partial x_k \to \partial u/\partial x_k$.

Il faut juste vérifier que, la distribution u vérifiant la propriété de continuité (1.3), la forme linéaire $\partial u/\partial x_k$ vérifie une propriété du même type. On a en effet, pour $\varphi \in C_K^\infty$,

$$\left|\Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi\Big\rangle\right| = \left|\Big\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\Big\rangle\right| \leqslant C \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leqslant p}} \left|\partial^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\right| \leqslant C \sup_{\substack{x\in K\\ |\beta|\leqslant p+1}} \left|\partial^\beta \varphi(x)\right|.$$

Quant à la continuité, elle est évidente : on a

$$\Big\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \varphi\Big\rangle = -\Big\langle u_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\Big\rangle \longrightarrow -\Big\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \varphi\Big\rangle,$$

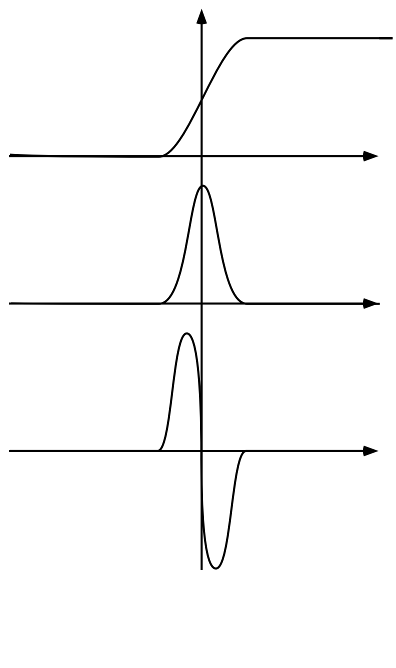
ce qui exprime exactement que $\partial u_j/\partial x_k \to \partial u/\partial x_k$.

Exemple 2.2. Soit Y la fonction de Heaviside, définie sur $\mathbb{R}$ par $Y(x)=1$ pour x positif et $Y(x) = 0$ sinon. Il résulte immédiatement de la définition que

$$\langle Y', \varphi\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0),$$

et donc que $Y' = \delta$.

Cela peut aussi se voir en approximant Y par des fonctions croissantes f_n de classe C^1, valant 0 pour $x < -1/n$ et 1 pour $x>1/n$. Il résulte facilement du théorème de Lebesgue que $f_n \to Y$ au sens des distributions, et on doit donc avoir $f_n' \to Y'$. Les fonctions f_n', positives, d'intégrale 1 et à support dans $[-1/n, 1/n]$ convergent aussi vers δ d'après la proposition 1.4 et on a ainsi $Y' = \delta$.



La distribution δ' est définie par l'égalité $\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0)$. C'est la limite des fonctions f_n'' et aussi celle des distributions $n^{-1}(\delta_{-1/2n} - \delta_{1/2n})$ qui toutes deux présentent une grande masse négative à droite d'une grande masse positive. La distribution limite δ' correspond à ce que la physique appelle un dipôle de moment -1 placé à l'origine.

3. Multiplication

Nous allons voir que l'on ne peut pas définir raisonnablement le produit de deux distributions quelconques mais, lorsque l'une des deux est une fonction $\Phi \in C^\infty(\Omega)$, la multiplication se définit sans difficulté et prolonge naturellement l'application $f \mapsto \Phi f$ définie pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Définition 3.1. Soient $\Phi \in C^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La distribution Φu est définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \langle \Phi u, \varphi\rangle = \langle u, \Phi\varphi\rangle$$

Il faut juste vérifier que la forme linéaire ainsi définie vérifie les estimations de continuité (1.3), ce qui n'est pas difficile en développant $\partial^\alpha(\Phi\varphi)$ par la formule de Leibniz. On vérifie aussi que ce produit est continu en u et en Φ en munissant $C^\infty(\Omega)$ de sa topologie naturelle.

On voit immédiatement, par exemple, que le produit $\Phi\delta_a$ est égal à $\Phi(a)\delta_a$.

Remarque 3.2. Montrons que, au contraire, il n'est pas possible de définir le produit de δ par la fonction de Heaviside Y si l'on veut que ce produit conserve un minimum de propriétés raisonnables.

Reprenons les fonctions f_n de l'exemple 2.2 qui convergent vers Y, en les supposant C^∞. Il serait raisonnable de vouloir définir $Y\delta$ comme la limite des produits $f_n\delta$ qui sont égaux à $f_n(0)\delta$. Malheureusement, il est parfaitement possible de choisir les f_n ayant toutes les propriétés requises, et telles que la suite $f_n(0)$ n'ait pas de limite, ou bien telle qu'elle converge vers n'importe quel élément de $[0, 1]$.

Si l'on renonce à avoir une extension qui soit continue, est-il possible de conserver au moins des propriétés plus algébriques, la formule de Leibniz par exemple ? La réponse est encore non. En remarquant que $Y(x)^n = Y(x)$ pour tout n, on devrait avoir

$$\text{(absurde)} \qquad \forall n, \quad \delta = Y' = \frac{d}{dx}Y^n = nY^{n-1}Y' = n(Y\delta)$$

ce qui attribuerait beaucoup de valeurs différentes au produit $Y\delta$.

***Remarque 3.3* (Compensation de régularité).** Il est possible de définir le produit dans bien d'autres situations, mais — c'est toujours le cas pour les applications bilinéaires — on ne peut pas espérer donner « la condition » pour que le produit soit défini. Si l'on recherche des couples $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de sous-espaces de $\mathcal{D}'$ tels que le produit uv soit bien défini pour $u \in \mathcal{A}$ et $v \in \mathcal{B}$, plus l'un des espaces sera petit, plus l'autre pourra être pris grand. Nous donnons ici quelques exemples où la singularité des éléments de l'un des espaces est compensée par la régularité des éléments de l'autre. Plus loin, nous trouverons d'autres conditions permettant de définir le produit lorsque les deux facteurs sont singuliers, pourvu que les singularités soient « convenablement localisées ».

On peut bien sûr définir le produit lorsque le résultat est un élément de L^1_{loc}. Par exemple, pour $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ et $v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$ (classes de fonctions localement bornées), ou bien pour u et v dans L^2_{loc}, ou encore plus généralement pour $u \in L^p_{\mathrm{loc}}$ et $u \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}$ avec $1/p + 1/p' = 1$.

On peut définir uv lorsque u est une distribution d'ordre $\leqslant p$ pourvu que l'on ait $v \in C^p(\Omega)$. On procède en deux temps.

- On prolonge par continuité l'application $\varphi \mapsto \langle u, \varphi\rangle$ aux fonctions $\varphi \in C^p_0(\Omega)$ (fonctions de classe C^p à support compact). Si φ est de classe C^p à support dans K, et si $K' \subset \Omega$ est un voisinage compact de K, on peut trouver une suite φ_j d'éléments de $C^\infty_{K'}$ telle que φ_j converge uniformément vers φ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p. L'estimation (1.3) permet de définir $\langle u, \varphi\rangle$ par $\lim_j \langle u, \varphi_j\rangle$.
- Pour $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$, la fonction $v\varphi$ est de classe C^p à support compact, et on pose $\langle uv, \varphi\rangle = \langle u, v\varphi\rangle$. Il faut bien sûr vérifier que l'estimation (1.3) est valable pour la forme linéaire ainsi définie, ce qui résulte encore de la formule de Leibniz.

4. Produit tensoriel

Si f et g sont des fonctions définies dans des ouverts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement, la fonction $f \otimes g$ est la fonction de $p+q$ variables définie dans l'ouvert produit par $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$. Ce produit tensoriel s'étend aux distributions sans aucune condition. Le mode de calcul évoque le théorème de Fubini et nous admettrons le résultat.

Si $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^p$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^q$ sont deux ouverts, et si $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$, j=1,2, le produit tensoriel $u_1 \otimes u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ est défini par

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega_1 \times \Omega_2), \quad \langle u_1 \otimes u_2, \varphi\rangle &= \big\langle u_1(x), \big\{\langle u_2(y), \varphi(x, y)\rangle\big\}\big\rangle \\ &= \big\langle u_2(y), \big\{\langle u_1(x), \varphi(x, y)\rangle\big\}\big\rangle\end{aligned}$$

L'utilisation des *lettres muettes* x et y dans les crochets ci-dessus ne signifie pas bien sûr que les distributions ont des valeurs ponctuelles. Elle sert à distinguer, dans chaque cas, variable et paramètre.

La dernière ligne (par exemple) a un sens grâce au résultat suivant : l'application $y \mapsto \langle u_1(x), \varphi(x,y)\rangle$ appartient à $C_0^\infty(\Omega_2)$ (théorème « de dérivation sous le crochet »).

Par exemple, pour $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, la distribution $\delta \otimes \delta$ est la distribution de Dirac δ de $\mathbb{R}^2$. Quant à $1 \otimes \delta$, c'est la mesure de densité linéique 1 portée par l'axe des x, c'est-à-dire la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \langle 1 \otimes \delta, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,0)\, dx \tag{4.1}$$

5. Support et support singulier

Il s'agit de points évoqués en partie par B. Malgrange, et je renverrai à son exposé pour les propriétés des partitions de l'unité différentiables.

Si $\omega \subset \Omega$ sont deux ouverts, une fonction C^∞ à support dans un compact de ω est *a fortiori* une fonction à support dans un compact de Ω. Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sa *restriction à* ω est la distribution $u|_\omega$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega), \quad \langle u|_\omega, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle.$$

Définition 5.1. Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, on dit que u est nulle au voisinage de x_0 s'il existe un ouvert ω avec $x_0 \in \omega \subset \Omega$ tel que $u|_\omega = 0$.

On appelle support de u l'ensemble fermé (relativement à Ω) noté $\mathrm{Supp}(u)$ constitué des points $x \in \Omega$ tels que u ne soit pas nulle au voisinage de x.

Théorème 5.2. *La restriction de u à $\Omega \setminus \mathrm{Supp}(u)$ est nulle.*

C'est le point établi au n° II-2 de l'exposé de Malgrange : si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ a son support disjoint de $\mathrm{Supp}(u)$, on peut écrire, grâce à une partition de l'unité, $\varphi = \sum \varphi_j$, où chaque φ_j a son support dans un ouvert ω_j tel que $u|_{\omega_j} = 0$, d'où le résultat.

Extension de la dualité. Lorsque $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact, on peut définir $\langle u, \varphi\rangle$ pour $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ de la façon suivante. On choisit $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de $\operatorname{Supp}(u)$ et on pose $\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \theta\varphi\rangle$, le membre de droite étant bien défini. Il faut bien sûr que le résultat ne change pas si l'on remplace θ par une fonction analogue θ_1. Cette vérification est évidente, puisque la fonction $(\theta-\theta_1)\varphi$ a son support inclus dans $\Omega \smallsetminus \operatorname{Supp}(u)$.

Proposition 5.3. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact, et soit $K \subset \Omega$ un voisinage compact de* $\operatorname{Supp}(u)$. *Il existe alors p et C tels que l'on ait, pour l'extension ci-dessus,*

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega), \quad |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{x\in K; |\alpha|\leqslant p} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,.$$

Il suffit de choisir θ comme ci-dessus et à support dans K, d'appliquer l'inégalité (1.3) à la fonction $\theta\varphi$ et de développer les $\partial^\alpha(\theta\varphi)$ à l'aide de la formule de Leibniz.

En particulier, toute distribution à support compact est d'ordre fini.

Définition 5.4. Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, on dit que u est C^∞ au voisinage de x_0 s'il existe un ouvert ω avec $x_0 \in \omega \subset \Omega$ tel que $u|_\omega \in C^\infty(\omega)$.

On appelle support singulier de u l'ensemble fermé (relativement à Ω) noté $\operatorname{Supp\,sing}(u)$ constitué des points $x \in \Omega$ tels que u ne soit pas C^∞ au voisinage de x.

Théorème 5.5. *En posant $V = \Omega \smallsetminus \operatorname{Supp\,sing}(u)$, on a $u|_V \in C^\infty(V)$.*

Par définition, il existe un recouvrement de V par des ouverts ω_j tels que la restriction de u à ω_j soit une fonction $f_j \in C^\infty(\omega_j)$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\omega_j \cap \omega_k)$ on a donc $\langle u, \varphi\rangle = \int f_j\varphi\,dx = \int f_k\varphi\,dx$ ce qui entraîne que f_j et f_k coïncident dans $\omega_j \cap \omega_k$. On peut donc recoller ces fonctions et définir $f \in C^\infty(V)$ en décidant que $f(x)$ est la valeur commune de tous les $f_j(x)$ pour $\omega_j \ni x$.

Il reste à montrer que f est la restriction de u à V. Toute $\varphi \in C_0^\infty(V)$ se découpe en une somme finie $\varphi = \sum \varphi_j$ de fonctions à support dans les ω_j. On a donc $\int f\varphi_j\,dx = \int f_j\varphi_j\,dx = \langle u, \varphi_j\rangle$, d'où le résultat.

Remarque 5.6. Ce concept permet déjà de définir le produit uv de deux distributions pour des raisons de nature très différentes de celles vues dans la remarque 3.3. C'est maintenant la localisation des singularités qui va intervenir.

Soient $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $\operatorname{Supp}\operatorname{sing}(u) \cap \operatorname{Supp}\operatorname{sing}(v) = \varnothing$. On considère le recouvrement de Ω par les ouverts

$$U_1 = \Omega \smallsetminus \operatorname{Supp}\operatorname{sing}(u) \quad \text{et} \quad U_2 = \Omega \smallsetminus \operatorname{Supp}\operatorname{sing}(v).$$

Toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ peut s'écrire, grâce à une partition de l'unité, sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$. On pose alors

$$\langle uv, \varphi \rangle = \langle v, \varphi_1 u \rangle + \langle u, \varphi_2 v \rangle,$$

les produits figurant à droite des crochets appartenant à $C_0^\infty(\Omega)$. Il est facile de voir que le résultat ne dépend pas de la partition de l'unité choisie.

6. Transformation de Fourier [résultats]

Il ne serait pas raisonnable d'inclure ici tout un exposé de la transformation de Fourier des distributions. Nous choisissons délibérément de mettre en avant, plutôt que les définitions, les propriétés les plus utiles.

Nous ne définirons donc pas l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$[(1)]. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ qui contient énormément de distributions :

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ contient toutes les distributions à support compact.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ contient tous les espaces L^p.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ contient toutes les (classes de) fonctions localement sommables qui sont majorées en module par un polynôme.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation : si u appartient à cet espace, il en est de même de $\partial^\alpha u$
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par les polynômes : si u appartient à cet espace, il en est de même de $x^\alpha u$.

---

(1) ou plutôt si, mais en bas de page. C'est l'espace des $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tels que, pour C et N convenables, on ait la majoration suivante :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{|\alpha|, |\beta| \leqslant N\,;\, x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right|.$$

On pourra vérifier que $x \mapsto e^x$ n'appartient pas à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Nous ne définirons pas non plus, au moins dans le cas général, la transformation de Fourier $u \mapsto \mathcal{F}u$ (notée souvent $\widehat{u}$), mais nous en énoncerons les principales propriétés :

• $\mathcal{F}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{S}'$ sur lui-même. L'isomorphisme inverse s'écrit $(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$, où $\overline{\mathcal{F}}$ est l'analogue de $\mathcal{F}$ obtenu en remplaçant i par $-i$ dans les formules explicites.

• Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est la fonction continue bornée et tendant vers 0 à l'infini définie par la formule classique

$$\widehat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx.$$

• Si u est une distribution à support compact, sa transformée de Fourier est la fonction définie pour chaque ξ par

$$\widehat{u}(\xi) = \big\langle u(x), e^{-ix\xi}\big\rangle, \tag{6.1}$$

formule où x est une lettre muette et où l'on utilise l'extension, vue dans la section précédente, de $\langle u, \cdot\rangle$ aux fonctions appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

• La formule $\mathcal{F}(\partial u/\partial x_j) = i\xi_j\widehat{u}(\xi)$, qui s'obtient habituellement en dérivant sous le signe somme, est valable en toute généralité.

• On a de même $\mathcal{F}(x_j u) = i\partial\widehat{u}/\partial\xi_j$ pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 6.1. *Soit u une distribution à support compact.*

(i) *La fonction $\widehat{u}$ est de classe C^∞ et à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées : il existe des constantes C_α et N_α telles que l'on ait*

$$\big|\partial_\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\big| \leqslant C_\alpha(1+|\xi|)^{N_\alpha}$$

(ii) *Pour que u soit de classe C^∞, il faut et il suffit que $\widehat{u}$ soit à décroissance rapide, c'est-à-dire :*

$$\forall N,\ \exists C,\ \forall\xi,\quad |\widehat{u}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-N}$$

Le premier point résulte de la proposition 5.3 : si la boule de rayon R est un voisinage de $\mathrm{Supp}(u)$, on a avec C et p fixés :

$$|\widehat{u}(\xi)| \leqslant C \sup_{|x\leqslant R|;|\alpha|\leqslant p} \big|\partial_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\big|.$$

On vérifie facilement que le membre de droite est à croissance polynomiale en ξ, et on applique ensuite le même résultat à la transformée de Fourier de $x^\alpha u$.

Il est bien connu que la transformée de Fourier d'une fonction $u \in C_0^\infty$ est à décroissance rapide ($(i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$ est bornée, comme transformée de la fonction sommable $\partial^\alpha u$). Pour montrer la réciproque, on utilise le fait que $\partial^\alpha u$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction sommable $(i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$ et est donc une fonction continue.

Corollaire 6.2. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $x_0 \notin \operatorname{Supp\,sing}(u)$ *(ou encore u est C^∞ au voisinage de x_0).*

(ii) *Il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi(x_0) \neq 0$ et que $\widehat{\varphi u}(\xi)$ soit à décroissance rapide.*

(iii) *Il existe un ouvert ω avec $x_0 \in \omega \subset \Omega$ tel que, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, la fonction $\widehat{\varphi u}(\xi)$ soit à décroissance rapide.*

7. Le front d'onde

Le front d'onde de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ va être un sous-ensemble conique de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\})$ qui va décrire non seulement les points où u est singulière, mais encore les (co-)directions dans lesquelles celle-ci est singulière.

Nous dirons qu'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\})$ est conique (on pourrait dire aussi positivement homogène en ξ) si, pour $t > 0$, on a

$$(x, \xi) \in A \iff (x, t\xi) \in A.$$

Définition 7.1. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que u est *microlocalement de classe* C^∞ en un point $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \smallsetminus 0)$ s'il existe un ouvert ω vérifiant $x_0 \in \omega \subset \Omega$ et un cône ouvert Γ de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ contenant ξ_0 tels que l'on ait

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega),\ \forall N,\ \exists C \quad |\widehat{\varphi u}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-N} \text{ pour } \xi \in \Gamma. \tag{7.1}$$

L'ensemble des (x_0, ξ_0) où u n'est pas microlocalement de classe C^∞ est un fermé conique de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \smallsetminus 0)$ appelé le *front d'onde de u* et noté $\mathrm{WF}(u)$.

Exemples 7.2. Dans $\mathbb{R}^n$, le front d'onde de δ est $0\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. En effet, pour $x_0 \neq 0$, il suffit de choisir ω ne contenant pas 0 et les produits $\varphi\delta$ seront nuls. En revanche, si $\varphi(0) \neq 0$, la transformée de Fourier de $\varphi\delta = \varphi(0)\delta$ est la constante $\varphi(0)$ qui ne décroît dans aucune direction.

Dans le plan, le front d'onde de $u = 1 \otimes \delta$ est formé des (x_1, x_2, ξ_1, ξ_2) vérifiant $x_2 = \xi_1 = 0$. On a en effet d'après (4.1) et (6.1)

$$\widehat{\varphi u}(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1}\varphi(x_1, 0)\, dx_1.$$

Au membre de droite figure une fonction ne dépendant que de ξ_1 et à décroissance rapide en cette variable. En tant que fonction de (ξ_1, ξ_2) elle n'est à décroissance rapide dans un cône Γ que si les points $(0, \pm 1)$ ne sont pas adhérents à ce cône.

La fonction valant 1 dans le demi-plan supérieur et 0 dans le demi-plan inférieur a le même front d'onde que la distribution précédente. Quant à la distribution $Y \otimes \delta$, définie par $\langle Y \otimes \delta, \varphi\rangle = \int_0^\infty \varphi(x, 0)\, dx$, son front d'onde est formé des points du type $(x_1, 0; 0, \xi_2)$ avec $x_1 > 0$ et des points $(0, 0; \xi_1, \xi_2)$. Les calculs sont analogues.

Donnons quelques situations géométriques généralisant ces exemples. Soit S une hypersurface de classe C^∞ de Ω, soient f_1 et f_2 dans $C^\infty(\Omega)$ et posons $u(x) = f_1(x)$ d'un côté de l'hypersurface et $u(x) = f_2(x)$ de l'autre. Alors $\mathrm{WF}(u)$ est contenu dans l'ensemble N^*S (le fibré conormal) constitué des (x, ξ) tel que x appartienne à S et que ξ soit normal à S en ce point. Il est même égal à N^*S, sauf si les développements de Taylor de f_1 et f_2 sont identiques sur un ouvert non vide de S.

Le front d'onde d'une « simple couche C^∞ » portée par S est aussi inclus dans N^*S. Il s'agit des distributions qui s'écrivent

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_S D(x)\varphi(x)\, d\sigma(x),$$

en notant $d\sigma$ la mesure de surface, la densité $D \neq 0$ étant une fonction C^∞ donnée sur S.

On peut remplacer S par une sous-variété V de dimension p, éventuellement munie d'un bord Γ. Le front d'onde d'une simple couche portée par V est contenu dans N^*V dans le cas sans bord et dans $N^*V \cup N^*\Gamma$ s'il y a un bord.

Remarque 7.3. Lorsque u et φ sont à valeurs réelles, on a $\widehat{\varphi u}(-\xi) = \overline{\widehat{\varphi u}(\xi)}$, et il en résulte que $\mathrm{WF}(u)$ est invariant par l'*antipodie* $(x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$.

Lorsque u est à valeurs complexes, le rôle des directions antipodales est bien illustrée par le résultat suivant (pour un intervalle I en dimension 1).

Si f est une fonction holomorphe dans l'intersection d'un voisinage complexe de I et du demi-plan supérieur [resp. inférieur], vérifiant une estimation $|f(x+iy)| \leqslant C\,|\mathrm{Im}\,y|^{-N}$, alors les fonctions $x \mapsto f(x \pm i\varepsilon)$ convergent dans $\mathcal{D}'$, pour $\varepsilon \to 0+$ vers une distribution notée $f(x \pm i0)$, et on a

$$\mathrm{WF}\bigl(f(x \pm i0)\bigr) \subset \{(x, \xi) \mid \pm\xi > 0\}.$$

On trouvera définies dans l'exposé de B. Malgrange les distributions

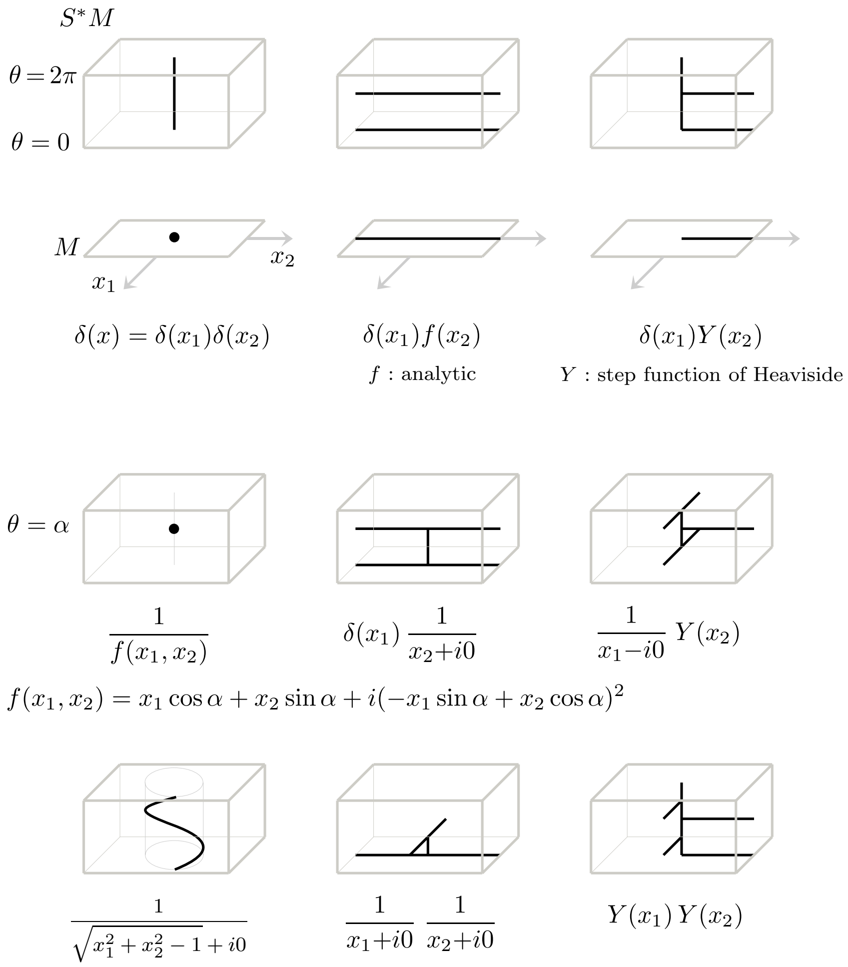
$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathrm{vp}\,\bigl(1/x\bigr) \mp i\pi\delta,$$

et on vérifiera que leurs transformées de Fourier, qui sont les fonctions $\mp 2i\pi Y(\pm\xi)$, sont bien à décroissance rapide (en fait identiquement nulles) dans les directions voulues.

Nous avons reproduit ci-dessous les premiers dessins de fronts d'onde qui aient jamais été publiés. Ils sont extraits de l'exposé de M. Sato dans les actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). L'auteur représente horizontalement les coordonnées (x_1, x_2) du plan, et repère par leur angle $\theta \in [0, 2\pi[$ les directions du plan des (ξ_1, ξ_2). Dans cette représentation, le fibré conormal du cercle unité devient une hélice.

Théorème 7.4. *La projection sur* $\mathbb{R}^n$ *de* $\mathrm{WF}(u)$ *est* $\mathrm{Supp\,sing}(u)$.

Si $x_0 \notin \mathrm{Supp\,sing}(u)$, la fonction $\widehat{\varphi u}$ est à décroissance rapide dans toutes les directions dès que le support de φ est assez proche de x_0, ce qui montre qu'aucun (x_0, ξ_0) n'appartient à $\mathrm{WF}(u)$. Réciproquement, si aucun (x_0, ξ_0) n'appartient à $\mathrm{WF}(u)$, on peut pour chaque ξ_0



trouver ω et $\Gamma \ni \xi_0$ tels que (7.1) soit valide. Le théorème de Borel-Lebesgue appliqué à la sphère de $\mathbb{R}^n$ permet de trouver un nombre fini de tels couples (ω_j, Γ_j) de manière que les Γ_j recouvrent $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\cap_j \omega_j)$ la fonction $\widehat{\varphi u}$ est à décroissance rapide, ce qui achève la démonstration.

Proposition 7.5. *On a* $\mathrm{WF}(\partial^\alpha u) \subset \mathrm{WF}(u)$ *et* $\mathrm{WF}(fu) \subset \mathrm{WF}(u)$*, pour* $f \in C_0^\infty(\Omega)$*.*

Le premier point n'est pas difficile et, la condition étant de caractère local, on peut supposer dans le second cas que $f \in C_0^\infty(\Omega)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi f u}(\xi) &= \langle [,2\rangle]\varphi u\,(x) e^{-ix\cdot\xi} f(x)\\
&= (2\pi)^{-n} \langle [,3\rangle]\varphi u\,(x) \int e^{-ix\cdot(\xi-\eta)} \widehat{f}(\eta)\,d\eta\\
&= (2\pi)^{-n} \int \langle [,2\rangle]\varphi u\,(x) e^{-ix\cdot(\xi-\eta)} \widehat{f}(\eta)\,d\eta\\
&= (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi u}(\xi-\eta)\widehat{f}(\eta)\,d\eta,
\end{aligned}$$

nous avons utilisé la formule d'inversion de Fourier puis une « interversion des signes somme et crochet » analogue au théorème de Fubini. Il reste à majorer l'intégrale (produit de convolution) figurant au dernier membre pour montrer que, si $\widehat{\varphi u}$ est à décroissance rapide dans Γ, alors $\widehat{\varphi f u}(\xi)$ est à décroissance rapide dans tout cône Γ' d'adhérence contenue dans Γ.

Remarque 7.6. Pour vérifier que $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(u)$, il suffit de vérifier que pour une seule fonction $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi(x_0) \neq 0$, la transformée de Fourier de ψu est à décroissance rapide dans un cône contenant ξ_0. En effet, si ω est un ouvert contenant x_0 dans lequel ψ ne s'annule pas, tout $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ pourra s'écrire $\theta\psi$ avec $\theta \in C_0^\infty(\omega)$. Nous venons de voir que la décroissance rapide de $\widehat{\psi u}$ dans un voisinage conique de ξ_0 implique celle de $\widehat{\theta\psi u}$.

Questions d'invariance. Bien que la théorie du front d'onde soir essentiellement locale, il aurait peut-être été plus éclairant de remplacer $\mathbb{R}^n$ par un espace vectoriel E de dimension n. La transformée de Fourier ne peut être définie alors que sur le dual E^*, en remplaçant $x \cdot \xi$ dans l'exponentielle par la relation de dualité entre $x \in E$ et $\xi \in E^*$. Le front d'onde d'une distribution devient alors un sous ensemble de $\Omega \times E^* \smallsetminus \{0\}$.

Lorsque nous avons étudié le front d'onde d'une fonction ayant une discontinuité de première espèce le long d'une hypersurface S, nous avons localisé son front d'onde dans le fibré conormal N^*S. C'est bien sûr cohérent avec la remarque ci-dessus. Ces vecteurs ξ normaux à S

en x sont en fait des vecteurs covariants (des éléments de E^*) : ce sont les différentielles $df(x)$ des fonctions s'annulant sur S.

Si l'on se donne un difféomorphisme F d'un ouvert $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ sur un autre Ω_2, il n'est pas difficile de définir l'image inverse $F^*u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Cette opération, qui doit généraliser l'application $u \mapsto u \circ F$ définie pour les fonction, est donnée par

$$\langle F^*u, \varphi\rangle = \Big\langle u(y), \varphi(F^{-1}(y)) \left|\det F'(y)\right| \Big\rangle. \tag{7.2}$$

On peut démontrer que l'on a

$$\mathrm{WF}(F^*u) = \big\{(x,\xi) \mid \big(F(x), ({}^tF'(x))^{-1}\xi\big) \in \mathrm{WF}(u)\big\},$$

c'est à dire que les vecteurs ξ se transforment comme des vecteurs cotangents à $\mathbb{R}^n$.

Ce qui précède permet de définir l'espace des distributions sur une variété différentielle, et d'associer à chacune de celles-ci son front d'onde, sous-ensemble conique du fibré cotangent.

8. Front d'onde et trace

Si nous avons défini sans difficulté la restriction d'une distribution à un ouvert, il est impossible de définir en général la restriction d'une distribution à une sous-variété. Les sous-variétés étant de mesure nulle, la difficulté existe d'ailleurs déjà avec les éléments de L^1_{loc} qui ne sont que des classes de fonction.

Toutefois, si l'on considère par exemple les (classes de) fonctions caractéristiques d'un demi-plan $(x,y) \mapsto Y(ax+by)$, on s'aperçoit que l'on peut très raisonnablement définir leur restriction sur la droite $x=0$ lorsque $b \neq 0$ (ce sera $y \mapsto Y(\mathrm{sgn}(b)y)$) et que l'obstacle n'existe que pour les fonctions $(x,y) \mapsto Y(\pm x)$. Grâce au front d'onde, cette remarque banale va devenir d'une portée très générale.

Nous allons écrire $n = p+q$ et noter $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ le point générique de $\mathbb{R}^n$. L'opération notée γ de trace sur $\mathbb{R}^p$ (identifié au sous-espace de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x''=0$) est définie pour les fonctions continues u dans (un ouvert de) $\mathbb{R}^n$ par $\gamma u(x') = u(x', 0)$.

Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, il est facile de décrire cet opérateur de trace à l'aide de la transformation de Fourier. On écrit la formule d'inversion de Fourier qui est valable ponctuellement

$$u(x', x'') = (2\pi)^{-p-q} \iint e^{-i(x'\cdot\xi' + x''\cdot\xi'')} \widehat{u(\xi', \xi'')}\, dx'\, dx'',$$

et on spécialise

$$\gamma u\,(x') = f(x', 0) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{R}^p} e^{-ix'\cdot\xi'} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{R}^q} \widehat{u}(\xi', \xi'')\, d\xi'' \right\} d\xi'.$$

Il en résulte que la transformée de Fourier (dans $\mathbb{R}^p$) de la fonction γu est donnée par

$$\widehat{\gamma u}(\xi') = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{R}^q} \widehat{u}(\xi', \xi'')\, d\xi''. \tag{8.1}$$

Lemme 8.1. *Soit u une distribution à support compact, dont la transformée de Fourier est à décroissance rapide dans le cône défini par $|\xi'| < \varepsilon\,|\xi''|$, avec $\varepsilon > 0$. Il existe alors un unique élément noté γu de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ dont la transformée de Fourier est donnée par* (8.1)*.*

Si de plus $\widehat{u}$ est à décroissance rapide dans un voisinage conique de $\{(\xi', \xi'') \mid \xi' = \xi'_0\}$, où $\xi'_0 \neq 0$, alors $\widehat{\gamma u}$ est à décroissance rapide dans un voisinage conique de ξ'_0.

Pour $\xi' \neq 0$, on découpe bien sûr le domaine d'intégration de (8.1) en deux parties. On doit d'une part intégrer pour $|\xi''| \geqslant \varepsilon^{-1}\,|\xi'|$ une fonction majorée par $C_N(1 + |\xi'| + |\xi''|)^{-N}$ pour tout N, ce qui donne une fonction à décroissance rapide en $|\xi'|$.

L'autre partie s'écrit

$$\mathrm{II}(\xi') = \int_{\xi'' \leqslant \varepsilon^{-1}|\xi'|} \widehat{u}(\xi', \xi'')\, d\xi''.$$

Dans le domaine d'intégration, le rapport $|\xi| / |\xi'|$ est uniformément borné, et le volume de ce domaine est polynomial en ξ'. La fonction $\widehat{u}$ étant à croissance lente en ξ, il en résulte immédiatement que $\mathrm{II}(\xi')$ est à croissance lente en ξ'. Sous la seconde hypothèse, pour ξ' appartenant à un voisinage conique de ξ_0, on doit intégrer une fonction majorée par $C_N(1 + |\xi'|)^{-N}$ pour tout N sur une boule de rayon proportionnel à $|\xi'|$ et le résultat est à décroissance rapide en ξ'.

En résumé, l'intégrale fournit une fonction à croissance lente, donc un élément de $\mathcal{S}'$, et nous savons qu'il existe une distribution $\gamma u \in \mathcal{S}'$ dont c'est la transformée de Fourier.

Lemme 8.2. *Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant les conditions du lemme précédent. Les traces étant définies comme ci-dessus, on a $\gamma(\varphi u) = \varphi(x', 0)\gamma u$.*

L'argument vu dans la démonstration de la proposition 7.5 montre que l'on a (à des puissances de 2π près qui alourdiraient la typographie)

$$\mathcal{F}\left(\gamma(\varphi u)\right)(\xi') \simeq \iiint \widehat{u}(\xi'-\eta', \xi''-\eta'')\widehat{\varphi}(\eta', \eta'')\, d\eta'\, d\eta''\, d\xi''.$$

En prenant comme nouvelles variables d'intégration η', η'' et $\xi'' - \eta''$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\gamma(\varphi u)\right)(\xi') \simeq \int \widehat{u}(\xi' - \eta')\widehat{\gamma\varphi}(\eta')\, d\eta'$$

ce qui est précisément (les 2π et autres détails sont laissés au lecteur) la transformée de Fourier p-dimensionnelle du produit $(\gamma\varphi)(\gamma u)$.

Une conséquence immédiate de ce lemme est que γu est à support compact, et plus généralement que l'on a $\mathrm{Supp}(\gamma u) \subset \{x' \mid (x', 0) \in \mathrm{Supp}(u)\}$.

Théorème et définition 8.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et*

$$\Omega' = \{x' \mid (x', 0) \in \Omega\}$$

sa trace sur $\mathbb{R}^p$. Le fibré conormal de Ω' est l'ensemble

$$N^*\Omega' = \big\{(x, \xi) \mid x' \in \Omega',\ x'' = 0,\ \xi' = 0,\ \xi'' \neq 0\big\}.$$

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifie $\mathrm{WF}(u) \cap N^*\Omega = \varnothing$, sa trace γu est bien définie dans $\mathcal{D}'(\Omega')$. De plus

$$\mathrm{WF}(\gamma u) \subset \big\{(x', \xi') \mid \exists \xi'',\ (x', 0, \xi', \xi'') \in \mathrm{WF}(u)\big\}$$

Sous les conditions de l'énoncé, on peut trouver une partition de l'unité $\sum \chi_j = 1$, telle que ou bien le support de χ ne coupe pas $x'' = 0$, ou bien le produit χu vérifie la condition du lemme 8.1. On pose alors $\gamma u = \sum \gamma(\varphi_j u)$, le lemme 8.2 garantissant que cette somme est localement finie. On vérifie enfin que le résultat ne dépend pas de la partition utilisée.

Il reste à montrer que si $A = \{(x_0', 0, \xi_0', \xi'') \mid \xi'' \in \mathbb{R}^q\}$ est disjoint de $\mathrm{WF}(u)$ alors $(x_0', \xi_0') \notin \mathrm{WF}(u)$. En choisissant la partition de l'unité suffisamment fine, la transformée de Fourier des $\chi_j u$ qui ne s'annulent pas au voisinage de x_0 va être à décroissance rapide dans un voisinage conique de A, et le résultat découle de la seconde partie du lemme 8.1.

Remarque 8.4. Le front d'onde étant fermé, l'hypothèse du théorème permet, pour y'' assez voisin de 0 de définir la trace (notée $u_{y''}$) sur le sous-espace d'équation $x'' = y''$. Pour ω' d'adhérence contenue dans Ω' et pour y'' assez petit, on définit ainsi une application $y'' \mapsto u_{y''}$ à valeur dans $\mathcal{D}'(\omega')$ dont on démontre qu'elle est continue et même indéfiniment différentiable.

Remarque 8.5. On peut plus généralement définir la restriction d'une distribution u à une sous variété $V \subset \Omega$, pourvu que $N^*V \cap \mathrm{WF}(u)$ soit vide.

9. Front d'onde et produit

Pour des fonctions f et g définies sur un ensemble quelconque X, il est une manière assez détournée de définir leur produit : 1. construire leur produit tensoriel, c'est-à-dire la fonction H définie sur $X \times X$ par $H(x,y) = f(x)g(y)$; 2. considérer la restriction de celle-ci à la diagonale, c'est-à-dire poser $h(x) = H(x,x)$. Cet artifice rend de grands services lorsque la définition directe d'un produit est moins évidente.

Le produit tensoriel de deux distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^p$ et $v \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^q$, est toujours défini comme élément de $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et il n'est pas difficile d'en estimer le front d'onde à partir de celui des facteurs. Soit $(x_0, \xi_0) \in \Omega_1 \times (\mathbb{R}^p \smallsetminus \{0\})$ n'appartenant pas à $\mathrm{WF}(u)$ et soit $(y_0, \eta_0) \in \Omega_2 \times (\mathbb{R}^q \smallsetminus \{0\})$. Choisissons $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ ne s'annulant pas en x_0 [ou y_0] et à support assez petit, et posons $w = \varphi_1(x)\varphi_2(y) u \otimes v = (\varphi_1 u) \otimes (\varphi_2 v)$. On a

$$\widehat{w}(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\varphi_1 u_1}(\xi_1)\widehat{\varphi_2 u_2}(\xi_2). \tag{9.1}$$

Dans un voisinage conique assez petit de (ξ_0, η_0), que l'on pourra prendre de la forme $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, les rapports des trois quantités $|\xi|$, $|\eta|$ et $|(\xi, \eta)|$ restent bornés par des constantes fixes. Le membre de droite de (9.1), qui est le produit d'une fonction à décroissance rapide et d'une fonction à croissance lente, y est donc à décroissance rapide. D'après la remarque 7.6, cela suffit à montrer que $(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)$ n'appartient pas à $\mathrm{WF}(u\otimes v)$. En y adjoignant le résultat symétrique en u et v, on a donc montré le résultat suivant.

Théorème 9.1. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{WF}(u\otimes v)\subset \{(x,y,\xi,\eta)\mid (x,\xi)\in \mathrm{WF}(u) \textit{ et } (y,\eta)\in \mathrm{WF}(v)\}\\ \cup\{(x,y,\xi,0)\mid (x,\xi)\in \mathrm{WF}(u) \textit{ et } y\in \mathrm{Supp}(v)\}\\ \cup\{(x,y,0,\eta)\mid x\in \mathrm{Supp}(u) \textit{ et } (y,\eta)\in \mathrm{WF}(v)\}.\end{aligned}$$

Pour énoncer le théorème suivant, nous utilisons la notation M^{a} pour désigner l'*antipodal* d'un sous-ensemble $M\subset\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\})$. C'est l'ensemble des (x,ξ) tels que $(x,-\xi)\in M$.

Théorème 9.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient u et v appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors leur produit uv est bien défini sous l'hypothèse suivante*

$$\mathrm{WF}(u)\cap(\mathrm{WF}(v))^{\mathrm{a}}=\varnothing.$$

On a de plus

$$\begin{aligned}&\mathrm{WF}(uv)\\ &\quad\subset\big\{(x,\xi)\mid \exists\eta_1,\exists\eta_2,\ \xi{=}\eta_1{+}\eta_2,\ (x,\eta_1)\in\mathrm{WF}(u),\ (x,\eta_2)\in\mathrm{WF}(v)\big\}.\end{aligned}$$

Il s'agit en fait d'une conséquence simple des théorèmes 8.3 et 9.1. La restriction de $u\otimes v$ à la diagonale est bien définie, pourvu que le front d'onde de $u\otimes v$ ne rencontre pas le fibré normal de la diagonale, c'est-à-dire l'ensemble des $(x,x,\xi,-\xi)$. Un tel point ne peut appartenir à $\mathrm{WF}(u\otimes v)$ que si $(x,\xi)\in\mathrm{WF}(u)$ et $(x,-\xi)\in\mathrm{WF}(v)$, ce qui donne la première partie de l'énoncé.

La seconde partie de l'énoncé résulte aussi du théorème 8.3 une fois remarqué que l'application de projection $(\xi',\xi'')\mapsto\xi'$ avec les notations de ce théorème, devient ici l'application $(\eta_1,\eta_2)\mapsto\eta_1{+}\eta_2$.

Front d'onde et EDP. Les théorèmes précédents, qui relèvent purement de la théorie des distributions, sont un peu un sous-produit de la théorie des équations aux dérivées partielles, où l'on trouve les principales raisons de l'introduction du front d'onde. Nous ne citerons que deux résultats importants et faciles à énoncer.

On se donne une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre m, dont les coefficients a_α sont réels et de classe C^∞ :

$$P(x,\partial_x)u \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = f(x). \tag{9.2}$$

La distribution f est donnée et la distribution u est l'inconnue.

À cette équation sont associés plusieurs invariants :

- Le *symbole principal* $p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$. C'est une fonction C^∞ sur $\Omega\times\mathbb{R}^n$ polynomiale et homogène de degré m en ξ.
- La *variété caractéristique* $\{(x,\xi)\in\Omega\times(\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}) \mid p_m(x,\xi)=0\}$ notée $\mathrm{Car}(P)$.
- Le champ de vecteurs sur $\Omega\times(\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\})$ dont les composantes sont les $(\partial p_m/\partial_{\xi_j}; -\partial p_m/\partial_{x_j})$ appelé *champ hamiltonien* de p_m. Ses courbes intégrales sont appelées les *bicaractéristiques* de l'équation.

Nous pouvons maintenant énoncer les deux résultats (L. Hörmander, 1970) qui marquent l'apparition du front d'onde dans le paysage mathématique.

- *Si u est une solution de* (9.2), *on a*

$$\mathrm{WF}(u)\subset\mathrm{WF}(f)\cup\mathrm{Car}(P).$$

- *Lorsque f est de classe C^∞, le front d'onde de u est non seulement contenu dans* $\mathrm{Car}(P)$, *mais c'est une réunion de bicaractéristiques. Si* (x_0,ξ_0) *et* (y_0,η_0) *sont sur la même bicaractéristique, l'un des points ne peut appartenir à* $\mathrm{WF}(u)$ *sans que l'autre y appartienne aussi.*

Indications bibliographiques. Il existe bien sûr de multiples ouvrages consacrés à la théorie des distributions. Pour le front d'onde et ses applications, la meilleure référence est le tome 1 du traité de L. Hörmander *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* (Springer).

Jean-Michel Bony, Centre de Mathématiques, École polytechnique, F–91128 Palaiseau cedex
E-mail : `bonyjm@math.cnrs.fr`
Url : `http://bonyjm.perso.math.cnrs.fr/bony(en).html`