



# Journées mathématiques X-UPS

Année 2001

Pavages

Richard KENYON

**Pavages aléatoires par dimères**

*Journées mathématiques X-UPS* (2001), p. 101-116.

<https://doi.org/10.5802/xups.2001-03>

© Les auteurs, 2001.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique  
Route de Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS,  
Institut polytechnique de Paris  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

## PAVAGES ALÉATOIRES PAR DIMÈRES

*par*

Richard Kenyon

---

### Table des matières

1. Introduction.....	101
2. Le problème.....	103
3. Calcul de $Z$ , cas planaire.....	107
4. Calcul de $Z$ : le cas du tore $T^2$ .....	109
5. Calcul des déterminants.....	111
6. Limites $n, m \rightarrow \infty$ .....	113
7. Transition de phase.....	113
8. Conclusions et problèmes ouverts.....	115
Références.....	116

### 1. Introduction

Le problème fondamental de la physique statistique est d'étudier les systèmes d'un grand nombre d'atomes. Si le système est suffisamment grand, on peut espérer utiliser les méthodes probabilistes pour son étude. Les questions de base sont le comportement d'un tel système quand on fait varier les paramètres qui définissent le système, par exemple la température et l'énergie d'interaction.

Ces problèmes sont bien sûr très difficiles, et on a souvent affaire à un phénomène très mystérieux : les « transitions de phase ». Par

exemple la formation abrupte d'un cristal quand on baisse la température dans un bassin d'eau est un phénomène loin d'être compris de façon mathématique.

Pour certains modèles simplifiés de tels systèmes, pourtant, on sait faire les calculs exacts. C'est en étudiant ces cas simples qu'on cherche à comprendre au moins de façon qualitative les systèmes naturels.

Le « modèle d'Ising » est un modèle très simple d'un système de spins sur un réseau. Le cas en dimension  $d = 2$  est le premier système exactement résolu dans lequel on trouve une « transition de phase », c'est-à-dire que quand on baisse la température on a un abrupt changement dans la configuration. Il a été « résolu » dans le cas de la dimension  $d = 2$  en 1944 par Onsager. (Le cas  $d > 3$  est encore ouvert.)

Un modèle très proche du modèle d'Ising, et qu'on propose d'explicitier ici, est le modèle des *dimères sur un réseau*. On va seulement étudier le cas de dimension 2. En 1961 Kasteleyn (et indépendamment, Temperley et Fisher) ont fait des premiers calculs exacts sur ce modèle. On parlera de leurs résultats.

Il s'agit d'un système de molécules diatomiques (« dimères ») placées sur les sites d'un réseau dans  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que :

- (1) les deux atomes d'une même molécule occupent deux sites adjacents du réseau,
- (2) tous les sites du réseau sont occupés.

On peut penser à des molécules adsorbées sur la surface d'un cristal, par exemple. On va imposer l'hypothèse que l'énergie d'interaction est nulle, et l'énergie d'une configuration ne dépend que de l'orientation des dimères.

L'outil de base de la physique statistique, et qu'on va calculer pour ce système, est la *fonction de partition*  $Z$ , qui est une somme, sur tous les états possible du système, de l'exponentielle de l'énergie de l'état. La fonction  $Z$  contient une grande quantité d'information décrivant le comportement du système. D'ailleurs les physiciens disent qu'un modèle est « résolu » quand ils arrivent à calculer l'asymptotique de  $Z$  quand la taille du système devient grande.

Dans la section 2 on définit le réseau qu'on va étudier, et on explicite le problème mathématique qu'on va résoudre. Ensuite on décrit la méthode de résolution du problème pour les régions planes (section 3) et sur le tore (section 4), c'est-à-dire une région planaire avec des conditions périodiques au bord. Dans la section 5 on calcule la fonction de partition explicitement dans le cas d'un graphe sur le tore. Ensuite on calcule la limite des  $Z$  pour les tores, qui est la fonction souhaitée. On trouvera ses transitions de phase et d'autres propriétés dans la section 7.

La preuve comporte quelques passages techniques ; nous avons essayé de donner seulement une esquisse de preuve dans ces endroits.

## 2. Le problème

Soit  $T$  le pavage régulier du plan par des triangles équilatéraux. Nous allons considérer les pavages par losanges d'une région finie  $R \subset T$ . Une *losange* est par définition la réunion de deux triangles adjacents de  $T$  (voir le texte de François Labourie [4]). On colorie les triangles de  $T$  en noir et blanc, les triangles ayant leur pointe en haut en noir, les autres en blanc. Ainsi chaque losange recouvre un triangle noir et un triangle blanc ; une région finie  $R$  est pavable seulement si elle contient autant de triangles noirs que de triangles blancs. (Cette condition n'est pas pourtant suffisante pour l'existence d'un pavage : voir [5]).

Une autre façon de regarder un pavage, que les informaticiens et physiciens aiment bien, et qui laisse voir le lien avec les dimères, est la suivante. À une région  $R \subset T$  on associe un graphe  $\widehat{R}$ , dont les sommets sont les triangles de  $T \cap R$ , et tel que deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux triangles correspondants ont un côté en commun. Voir la figure 1. Le graphe  $\widehat{R}$  est une partie du graphe « nid d'abeille », graphe périodique dont les faces sont des hexagones.

Ainsi à un pavage de  $R$  correspond un ensemble d'arêtes de  $\widehat{R}$ , qui a la propriété que chaque sommet est contenu dans exactement une arête. Un tel ensemble d'arêtes s'appelle *couplage parfait*, car on a « couplé » chaque sommet avec l'un de ses voisins. C'est également appelé « recouvrement par dimères », chaque dimère étant un lien.

Notez que si on tient compte du coloriage des triangles de  $T$ , on peut colorier les sommets de  $\widehat{R}$  en noir et blancs selon la couleur du triangle correspondant. Ainsi un couplage parfait associe à chaque sommet noir un sommet adjacent blanc.

Appelons  $e_1, e_2$  et  $e_3$  les trois directions d'arêtes de  $\widehat{R}$ . On associe aux arêtes des énergies  $E_1, E_2, E_3$ , qui en physique sont les énergies associées à une molécule adsorbée sur l'arête. Pour nous ces énergies seront simplement des nombres réels associés aux arêtes. On définit  $z_j = e^{-E_j/kT}$ , où  $k$  est une constante (la constante de Boltzmann) et  $T$  est la température. Les quantités  $z_i$  sont appelées les « activités ».

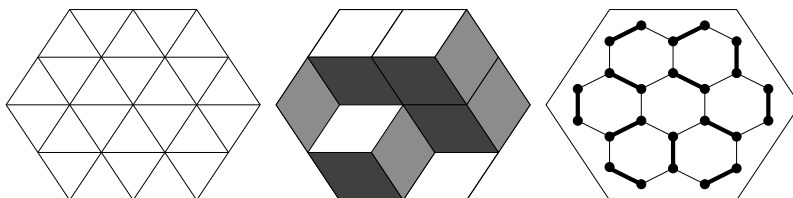


FIGURE 1. La région  $R$ , un pavage, le couplage de  $\widehat{R}$  correspondant.

Pour tout système physique ne prenant qu'un nombre fini d'états on peut définir une mesure de probabilité (sur l'espace des états du système), la *mesure de Boltzmann*. Pour cette mesure, la probabilité de trouver le système dans l'état  $C$  est proportionnelle à  $e^{-E(C)/(kT)}$ , où  $E(C)$  est l'énergie de la configuration  $C$ .

Pour un graphe fini  $\widehat{R}$ , on définit la mesure de Boltzmann  $\mu$  sur l'ensemble (fini) des couplages parfaits de  $\widehat{R}$  : la probabilité d'une configuration  $C$  contenant  $n_i$  arêtes de type  $e_i$  est

$$(2.1) \quad \text{Prob}(C) = \frac{1}{Z} e^{-E(C)/kT} = \frac{1}{Z} z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3},$$

où  $Z$  est une constante qu'on appelle *fonction de partition*. Dans cette formule  $E(C)$  est l'énergie totale de la configuration  $C$ , c'est-à-dire la somme des énergies des arêtes dans le couplage.

La fonction de partition  $Z$  s'écrit :

$$Z(z_1, z_2, z_3) = \sum_{\text{couplages}} z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3},$$

où la somme porte sur tous les couplages parfaits, et pour un couplage donné,  $n_j$  est le nombre de dimères dans la  $j$ -ième direction. Notez que  $Z$  est un polynôme en  $z_1, z_2, z_3$  avec des coefficients entiers positifs.

La figure 2 montre un pavage aléatoire d'une région triangulaire (avec poids égaux).

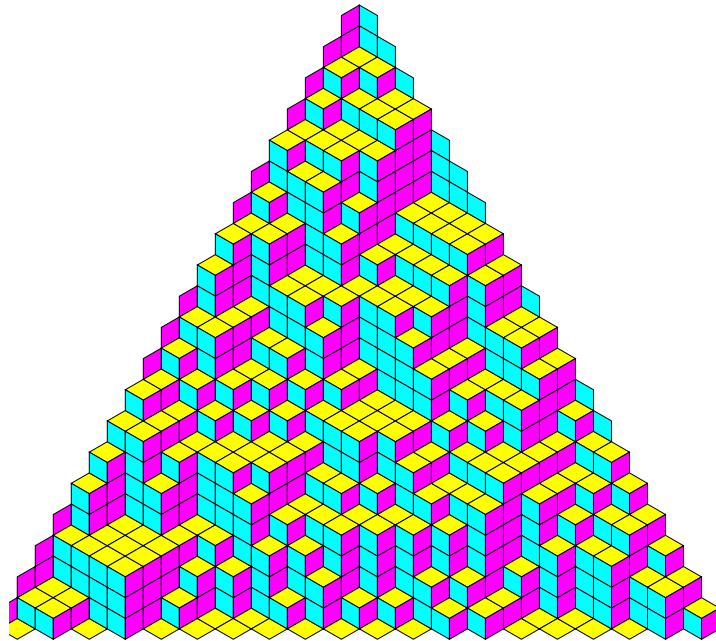


FIGURE 2. Pavage aléatoire d'une région triangulaire.

Comme on l'a dit dans l'introduction, la quantité  $Z$  contient beaucoup d'information sur le système. Par exemple  $\bar{n}_i$ , le nombre moyen de dimères de type  $z_i$  dans une configuration aléatoire, est donné par l'expression

$$\bar{n}_i = \frac{z_i}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z_i}.$$

Ceci suit immédiatement de l'expression (2.1). De même, la variance  $\sigma^2(n_i)$  du nombre de dimères de type  $z_i$  est donnée par

$$\sigma^2(n_i) = \left( z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 \log Z = \frac{z_i}{Z} \frac{\partial}{\partial z_i} z_i \frac{\partial Z}{\partial z_i} - \left( \frac{z_i}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z_i} \right)^2.$$

Une autre quantité physique intéressante à connaître est *l'entropie*  $S(\mu)$  de la mesure  $\mu$ . L'entropie est la somme

$$S(\mu) = \sum_{\text{configurations } C} -\mu(C) \log \mu(C).$$

C'est une mesure de l'information contenue dans le système. Si on voulait communiquer (sur une ligne informatique par exemple) l'état exact d'une configuration aléatoire, il faudrait envoyer  $S(\mu)$  bits en moyenne (en supposant que le logarithme dans la définition est le logarithme en base 2).

L'entropie se calcule à partir de  $Z$  et ses dérivées. On a :

$$\begin{aligned} S(\mu) &= \sum_C -\mu(C) \log \mu(C) = \sum_C -\frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}}{Z} \log \left( \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}}{Z} \right) \\ &= \log Z \sum_C \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}}{Z} \\ &\quad - \sum_C \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}}{Z} (n_1 \log z_1 + n_2 \log z_2 + n_3 \log z_3) \\ &= \log Z - \bar{n}_1 \log z_1 - \bar{n}_2 \log z_2 - \bar{n}_3 \log z_3. \end{aligned}$$

Pour des systèmes infinis on s'intéresse à calculer des versions normalisées de ces quantités. Au lieu de calculer le nombre moyen de dimères de type  $z_i$  on calcule la probabilité qu'un dimère soit présent. C'est le nombre moyen « par site ». De même l'entropie par site est l'entropie divisée par le nombre de sites. La quantité  $Z$  est une fonction « multiplicative » du nombre de sites, donc pour normaliser  $Z$  on calcule  $Z^{1/N}$ , où  $N$  est le nombre total de sites; c'est la fonction de partition « par site ».

Quand la taille du système tend vers l'infini (on parle de la « limite thermodynamique »), on peut espérer que ces quantités normalisées convergent. La limite thermodynamique de la fonction de partition par site est bien sûr la quantité la plus importante. On l'appelle de nouveau  $Z$ . C'est habituellement une fonction analytique de ses paramètres, mais il se peut que ce soit seulement analytique par morceaux.

Certains auteurs définissent un *changement de phase* comme étant une température où la limite thermodynamique de la fonction de partition par site n'est pas analytique (en fonction de  $T$ ). Le changement de phase est dite de premier ordre si  $Z$  n'est pas continue en ce point. C'est de second ordre si  $Z$  est continue mais pas différentiable, et ainsi de suite.

Attention, il n'est pas toujours facile de montrer que la convergence de la fonction de partition vers sa limite thermodynamique est lisse. Il se peut que les limites des dérivées ne convergent pas vers les dérivées de la limite. Dans le cas présent c'est un passage technique qu'on ne discutera pas.

Le lecteur a peut-être remarqué que pour une région finie  $R \subset T$ , chaque pavage de  $R$  a le même nombre de pavés dans chaque orientation, c'est-à-dire les nombres  $n_1, n_2, n_3$  sont indépendants du pavage. Ceci rend le calcul de  $Z$  moins intéressant pour des régions planes. Si en revanche on impose des conditions « périodiques » au bord (c'est-à-dire on pave une région torique), ou bien des conditions « libres » au bord (on permet aux dimères de dépasser le bord) alors le nombre de dimères de chaque type va varier selon le pavage. C'est en ces cas là que la fonction  $Z$  est intéressante à calculer. Nous allons (dans la section 4) imposer des conditions périodiques au bord, ce qui permettra de faire des calculs exacts. De plus on conjecture que toute mesure limite avec des conditions au bords quelconques est déjà exprimée par une limite de régions avec des conditions périodiques au bord. On montrera qu'avec des conditions périodique au bord il y a un changement de phase de seconde ordre à une certaine température critique.

### 3. Calcul de $Z$ , cas planaire

Supposons maintenant que  $R \subset T$  est une région finie, pavable par losanges, et sans trou, c'est-à-dire borné par une seule courbe simple de  $T$ . Soit  $\widehat{R}$  le graphe associé. Soit  $2n$  le nombre total de sommets de  $\widehat{R}$ , donc on a  $n$  sommets noirs et  $n$  blancs. Soit  $K$  la matrice d'adjacence de  $\widehat{R}$ , c'est-à-dire la matrice  $2n \times 2n$  indexée par les sommets de  $\widehat{R}$ , définie par  $K = (k_{v_1 v_2})$  où  $k_{v_1 v_2} = z_j$  si  $v_1$  et  $v_2$



sont liés par une arête dans la direction  $e_j$ , et  $k_{v_1 v_2} = 0$  si  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas reliés. La matrice  $K$  est symétrique.

Si on ordonne les sommets en mettant d'abord tous les sommets noirs, ensuite les sommets blancs, la matrice  $K$  a une forme en blocs :

$$(3.1) \quad K = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix},$$

où  $A$  est une matrice  $n \times n$  et  $0$  représente la matrice  $n \times n$  nulle.

Soit  $Z(z_1, z_2, z_3)$  la fonction de partition de  $\widehat{R}$ .

**Théorème 3.1** ([2]). *On a  $Z(z_1, z_2, z_3) = |\det A|$ .*

*Démonstration.* Appelons  $N_1, \dots, N_n$  les sommets noirs de  $\widehat{R}$  et  $B_1, \dots, B_n$  les sommets blancs.

Par définition, le déterminant de  $A$  vaut

$$(3.2) \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) k_{1\sigma(1)} k_{2\sigma(2)} \cdots k_{n\sigma(n)}.$$

Il est clair que chaque terme  $k_{1\sigma(1)} k_{2\sigma(2)} \cdots k_{n\sigma(n)}$  dans la somme vaut 0, sauf ceux tels que les sommets  $N_k$  et  $B_{\sigma(k)}$  sont adjacents pour tout  $k \in [1, n]$ . Donc la somme a exactement un terme pour chaque couplage parfait de  $\widehat{R}$ . Ce terme, en valeur absolue, vaut  $z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}$ , comme souhaité. Il suffit de voir que le signe  $\text{sign}(\sigma)$  est constant.

Supposons par exemple qu'on a deux couplages parfaits qui diffèrent seulement autour d'une hexagone, comme dans la figure 3. Comment comparer les signes des termes correspondantes? Appe-

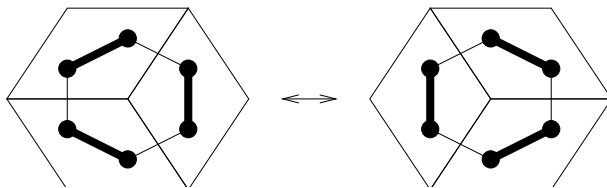


FIGURE 3. Rotation « hexagonale » d'un couplage.

lons les sommets noirs de l'hexagone  $N_1, N_2, N_3$  et les sommets blancs  $B_1, B_2, B_3$ . Dans le premier couplage,  $N_i$  est couplé avec  $B_i$ . Dans le deuxième,  $N_i$  est couplé avec  $B_{i-1 \bmod 3}$ . Donc la permutation  $\sigma$  dans

le deuxième terme diffère de celle de la première par la permutation cyclique  $(B_1 \ B_2 \ B_3)$ , qui est une permutation de signature  $+1$ . Donc ces deux termes ont le même signe dans la somme. Il suffit maintenant de montrer que deux couplages quelconques peuvent être relié par une suite d'opérations de ce type (rotations autour d'une hexagone).

C'est ici qu'il est important de regarder le pavage associé à un couplage. On peut penser au pavage comme à une surface dans  $\mathbb{Z}^3$  composé de carrés unité  $xy, yz$ , ou  $zx$ . La surface est le bord d'un empilement de cubes ; changer le couplage autour d'une hexagone correspond à enlever ou ajouter une cube. Il est facile à voir que, étant donné deux surfaces, on peut passer de l'un à l'autre en enlevant et ajoutant des cubes.

Ceci complète la preuve.

#### 4. Calcul de $Z$ : le cas du tore $T^2$

Il est possible d'utiliser le même argument du Théorème 3.1 pour calculer  $Z$  pour un graphe sur un tore  $T^2$ , sauf qu'il y a un problème avec les signes dans (3.2). La preuve ne marche plus car il n'est pas vrai que deux couplages différent par une suite d'opérations « hexagonales ». Si on dessine deux couplages sur le même graphe, leur réunion est une réunion de cycles et d'arêtes seules. Si certains de ces cycles sont *non homologues à zéro* sur le tore, c'est-à-dire font le tour du tore, alors les couplages correspondants ne sont pas reliés par une suite d'opérations hexagonales. Pour passer d'un couplage à l'autre il faut faire une permutation le long de ces cycles.

L'astuce consiste à voir que le signe de la permutation correspondant à une telle opération ne dépend que de la classe d'homologie dans  $H_1(T^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  (voir définition plus bas), du cycle (ou réunion de cycles) le long duquel on fait l'échange.

Examinons un cas concret. Soit  $\hat{x} = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$  et  $\hat{y} = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ . Dans la graphe  $H$  les sommets noirs sont  $p\hat{x} + q\hat{y}$  où  $p, q \in \mathbb{Z}$  et les sommets blancs sont de la forme  $p\hat{x} + q\hat{y} + 1$  où  $p, q \in \mathbb{Z}$ . (Zut, il faut tourner le graphe dans la Figure 1 par  $90^\circ$ .) Pour  $p, q \in \mathbb{Z}$  et  $t \in \{0, 1\}$  on appelle le sommet  $(p, q, t)$  le sommet  $p\hat{x} + q\hat{y} + t$ . Voir la figure 4. Soit  $m, n$

des entiers positifs pairs et  $H_{m,n}$  le graphe toroïdal  $H/(m\hat{x}Z + n\hat{y}Z)$ , c'est-à-dire où on identifie  $(p, q, t)$  avec  $(p + m, q, t)$  et  $(p, q + n, t)$ , voir la figure.

Soit  $K_1 = K_1(m, n)$  la matrice d'adjacence de  $H_{m,n}$  avec des poids  $z_1, z_2, z_3$  selon la direction. Soit  $K_2$  la matrice obtenue à partir de  $K_1$  en multipliant par  $-1$  les poids des arêtes entre les sommets  $(m - 1, k, 1)$  et  $(0, k, 0)$ , pour tout  $k \in [0, n - 1]$  (ces arêtes sont étiquetées «  $P$  » dans la Figure 4).

Soit  $K_3$  la matrice obtenue à partir de  $K_1$  en multipliant par  $-1$  les poids des arêtes entre  $(k, n - 1, 1)$  et  $(k, 0, 0)$ , pour tout  $k$  (ces arêtes sont étiquetées «  $Q$  » dans la figure 4).

Soit  $K_4$  la matrice obtenue à partir de  $K_1$  en multipliant par  $-1$  les poids des arêtes «  $P$  » et «  $Q$  ».

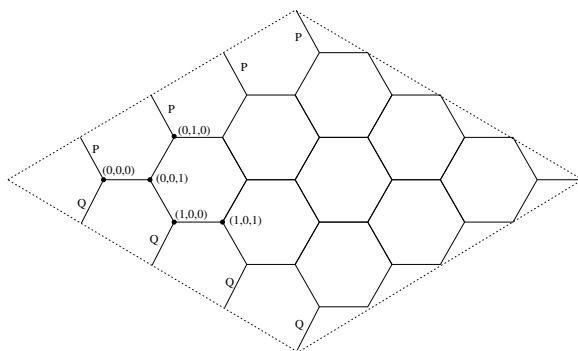


FIGURE 4. Les signes pour  $K_j$ , dans un domaine fondamental pour  $H_{4,4}$ .

Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les matrices  $mn/2 \times mn/2$  obtenues à partir des  $K_j$  comme dans (3.1).

**Proposition 4.1.** *La fonction de partition du graphe  $H_{m,n}$  est :*

$$Z_{m,n} = \frac{1}{2} ( -|\det(A_1)| + |\det(A_2)| + |\det(A_3)| + |\det(A_4)| ).$$

*Idée de la preuve.* Appelons *couplage standard*  $M$  le couplage qui joint le sommet  $(k, \ell, 0)$  au sommet  $(k, \ell, 1)$  pour tout  $k, \ell$ . Pour calculer les signes dans l'expression (3.2), on va comparer chaque couplage avec  $M$  : le signe est fonction des cycles qu'il faut « échanger » pour passer de  $M$  au couplage donné. On prétend que le déterminant de

la matrice  $A_1$  compte positivement les couplages obtenus à partir de  $M$  en faisant des « échanges » le long d'une réunion de cycles qui contiennent un nombre pair d'arêtes «  $P$  » et un nombre pair d'arêtes «  $Q$  ». (c'est-à-dire dont la classe d'homologie vaut  $(0, 0)$  dans  $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ). De plus, le déterminant de  $A_1$  compte les autres couplages avec le signe  $-1$ .

Pour voir cela, notons que les cycles dans la réunion d'un couplage avec  $M$  sont « monotones » dans la direction  $e_1$ , donc on peut vérifier que leur longueur modulo 4 est déterminée par la parité du nombre d'arêtes  $P$  et  $Q$  qu'ils contiennent.

Par les mêmes idées, la matrice  $A_2$  compte positivement tous les couplages, sauf ceux dont le nombre de  $P$  est pair et le nombre de  $Q$  est impair ; la matrice  $A_3$  compte positivement tous les couplages sauf ceux dont le nombre de  $P$  est impair et le nombre de  $Q$  est pair ; et la matrice  $A_4$  compte positivement tous les couplages sauf ceux dont le nombre de  $P$  est impair et le nombre de  $Q$  est impair.

On laisse au lecteur le soin de vérifier ces faits, qui impliquent que la somme (4.1) compte chaque couplage exactement une fois.

## 5. Calcul des déterminants

Nous allons calculer les déterminants des  $K_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Vu la périodicité du tore, on peut espérer trouver des vecteurs propres périodiques.

Un vecteur propre de  $K_j$  est une fonction définie sur les sommets de  $H_{m,n}$ . On définit le vecteur  $f$  qui a valeur au sommet  $(r, s, t)$  donnée par :

$$f(r, s, t) = c_t a^r b^s,$$

où  $a, b, c_t$  sont constants. On voit que la coordonnée  $(r, s, 0)$  du vecteur  $K_1 f$  satisfait :

$$\begin{aligned} (K_1 f)(r, s, 0) &= z_1 c_1 a^r b^s + z_2 c_1 a^{r-1} b^s + z_3 c_1 a^r b^{s-1} \\ &= c_1 a^r b^s (z_1 + z_2 a^{-1} + z_3 b^{-1}) \\ &= (z_1 + z_2 a^{-1} + z_3 b^{-1}) \frac{c_1}{c_0} f(r, s, 0), \end{aligned}$$

et au sommet  $(r, s, 1)$  on a de même

$$\begin{aligned} (K_1 f)(r, s, 1) &= z_1 c_0 a^r b^s + z_2 c_0 a^{r+1} b^s + z_3 c_0 a^r b^{s+1} \\ &= c_0 a^r b^s (z_1 + z_2 a + z_3 b) \\ &= (z_1 + z_2 a + z_3 b) \frac{c_0}{c_1} f(r, s, 1). \end{aligned}$$

Notons que ces équations sont valides même pour  $r = m - 1$  et  $s = n - 1$  à condition que  $a^m = b^n = 1$ .

Si on pose

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{z_1 + z_2 a^{-1} + z_3 b^{-1}} & c'_0 &= c_0 \\ c_1 &= \sqrt{z_1 + z_2 a + z_3 b} & c'_1 &= -c_1 \\ \lambda &= c_0 c_1 & \lambda' &= -c_0 c_1 \end{aligned}$$

alors  $f(r, s, t) = c_t a^r b^s$  et  $f'(r, s, t) = c'_t a^r b^s$  sont vecteurs propres de  $K_1$ , avec valeurs propres  $\lambda$  et  $\lambda'$ . Ceci nous donne  $2mn$  vecteurs propres pour  $K_1$  (on a  $m$  choix pour  $a$  et  $n$  choix pour  $b$ ), et on peut vérifier qu'ils sont indépendants. Donc on a trouvé tous les vecteurs propres.

Pour  $K_2$  on a des vecteurs propres et valeurs propres de même forme, sauf qu'il faut  $a^m = -1$  et  $b^n = 1$ . Pour  $K_3$  il faut  $a^m = 1$ ,  $b^n = -1$ , et pour  $K_4$  il faut  $a^m = b^n = -1$ .

Finalement on trouve

$$(5.1) \quad \det(K_1) = \det(A_1)^2 = \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{\ell=0}^{n-1} |z_1 + z_2 e^{-2\pi i k/m} + z_3 e^{-2\pi i \ell/n}|^2$$

$$(5.2) \quad \det(K_2) = \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{\ell=0}^{n-1} |z_1 + z_2 e^{-\pi i(2k+1)/m} + z_3 e^{-2\pi i \ell/n}|^2$$

$$(5.3) \quad \det(K_3) = \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{\ell=0}^{n-1} |z_1 + z_2 e^{-2\pi i k/m} + z_3 e^{-\pi i(2\ell+1)/n}|^2$$

$$(5.4) \quad \det(K_4) = \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{\ell=0}^{n-1} |z_1 + z_2 e^{-\pi i(2k+1)/m} + z_3 e^{-2\pi i(2\ell+1)/n}|^2.$$

Maple donne les valeurs

$$Z_{2,2}(z_1, z_2, z_3) = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + 2z_1^2 z_2^2 + 2z_1^2 z_3^2 + 2z_2^2 z_3^2$$

$$Z_{4,4}(1, 1, 1) = 417$$

$$Z_{6,6}(1, 1, 1) = 263640$$

## 6. Limites $n, m \rightarrow \infty$

On s'intéresse à la limite, quand la taille du système  $2mn$  tend vers l'infini, de la fonction de partition « par site »  $Z_{m,n}^{1/(2mn)}$ . On définit

$$Z \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{m,n \rightarrow \infty} (Z_{m,n})^{1/(2mn)}.$$

On montre dans [1] que cette limite existe.

Quand  $n, m \rightarrow \infty$  les quatre quantités  $|\det A_i|$  sont généralement à peu près de la même taille. En fait on a envie de dire que les quantités  $\frac{1}{2mn} \log \det A_i$  tendent chacune vers la même intégrale

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z_1 + z_2 e^{i\theta} + z_3 e^{i\phi}| d\theta d\phi,$$

mais ceci est vrai seulement sur une sous-suite de  $m, n$ , car la quantité  $z_1 + z_2 e^{i\theta} + z_3 e^{i\phi}$  s'annule pour certains choix d'angles  $\theta, \phi$ . Néanmoins on peut montrer (voir [1]) que la quantité  $\frac{1}{2mn} \log Z_{m,n}$  tend bien vers cette intégrale, et de façon assez régulière.

## 7. Transition de phase

Rappelons que  $z_i = e^{-E_i/kT}$ . Supposons que les trois énergies sont différentes, par exemple  $E_3 < E_2 < E_1$ . Alors pour une température  $T$  suffisamment petite, on a  $z_3 > z_1 + z_2$ . En revanche si  $T$  est grande, les  $z_i$  sont presque égaux. Il y a une unique température  $T_c$  où  $z_3 = z_1 + z_2$ . On verra que c'est la température critique où l'on a une transition de phase.

Utilisons les identités (pour  $m$  pair) :

$$\prod_{k=0}^{m-1} (u + e^{2\pi i k/m}) = u^m - 1,$$

$$\prod_{k=0}^{m-1} (u + e^{\pi i (2k+1)/m}) = -(u e^{\pi i/m})^m + 1 = u^m + 1.$$

Pour (5.1) par exemple on trouve

$$\det(A_1)^2 = \prod_{k=0}^{m-1} z_3^{2n} \left| \left( \frac{z_1 + z_2 e^{-2\pi i k/m}}{z_3} \right)^n - 1 \right|^2.$$

Si  $z_3 > z_1 + z_2$ , quand  $n$  est grand le terme entre parenthèses est minuscule et on a  $\det A_1 = z_3^{mn}$  à une petite erreur près. De même pour les autres  $A_i$ ; on conclut que  $Z_{m,n} \approx z_3^{mn}$  et  $Z = z_3^{1/2}$ .

Ceci équivaut à dire que pour  $H_{m,n}$ , avec une probabilité qui tend vers 1 quand  $m, n \rightarrow \infty$ , toutes les arêtes du couplage sont dans la direction  $e_3$ . Donc on a la formation d'un « cristal ». (Notez que ceci est seulement vrai dans la limite  $m, n \rightarrow \infty$ . Pour  $m, n$  fini on a toujours une probabilité non nulle d'avoir chaque type d'arête.)

Par symétrie on a un cristal chaque fois que  $z_1, z_2, z_3$  ne satisfont pas l'inégalité triangulaire. La région complémentaire, où  $z_1, z_2, z_3$  satisfont l'inégalité triangulaire, est appelée la *zone liquide*. Dans la zone liquide toutes les types d'arêtes sont présents.

La figure 5 montre la probabilité, en fonction de  $z_1, z_2, z_3$ , que l'arête entre  $(0, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  se trouve dans un couplage aléatoire (on a normalisé  $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ ). On peut calculer la valeur exacte de cette probabilité à partir de  $Z$  : c'est

$$\text{Prob}(e_1) = \frac{z_1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z_1}.$$

Cette formule suit du fait que  $Z_{m,n}$  est un polynôme en  $z_1, z_2, z_3$  et donc  $(z_1/Z_{m,n})(\partial Z_{m,n}/\partial z_1)$  est l'espérance du nombre d'arêtes de type  $e_1$ . Mais attention, il est moins facile de montrer que la limite des dérivées vaut la dérivé de la limite : voir [1].

Dans la zone liquide, cette valeur est :

$$\text{Prob}(e_1) = \frac{1}{\pi} \text{Cos}^{-1} \left( \frac{z_2^2 + z_3^2 - z_1^2}{2z_2z_3} \right)$$

ce qui est précisément  $1/\pi$  fois l'angle opposé au coté  $z_1$  dans un triangle de cotés  $z_1, z_2, z_3$ . Pourquoi a-t-on cette interprétation géométrique ? Je ne sais pas.

Cette probabilité est continue partout sauf aux trois points

$$(1/2, 1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2).$$

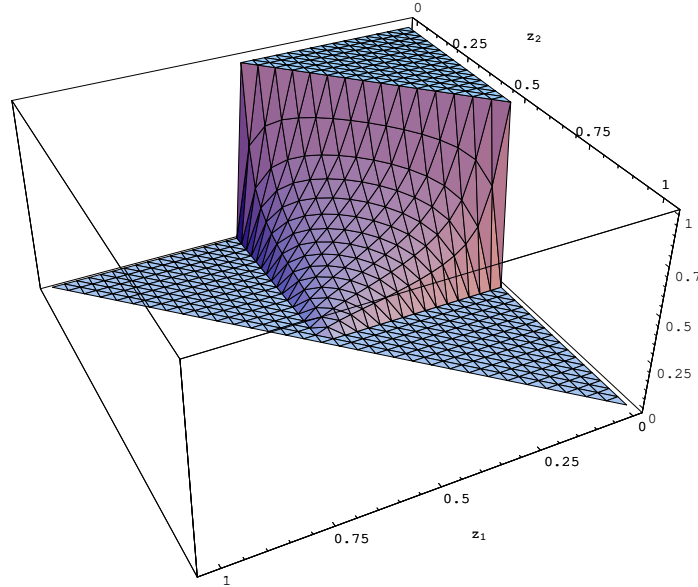


FIGURE 5. La probabilité d'une arête «  $e_3$  », en fonction de  $z_1$  et  $z_2$  avec  $z_3 = 1 - z_1 - z_2$ .

Le calcul de  $Z$  sur le segment critique  $z_3 = z_1 + z_2$  est assez non trivial mais peut se faire avec les équations (5.1) ; on trouve des comportements intéressants qui dépendent fortement de la valeur  $m/n$ . C'est le seul cas où  $Z$  dépend de la forme géométrique de la domaine (et non seulement de son aire).

Dans [3], il est expliqué comment calculer la probabilité de trouver, dans une configuration aléatoire, un ensemble donné d'arêtes. Ces résultats permettent d'avoir une idée précise du comportement local d'une configuration aléatoire.

## 8. Conclusions et problèmes ouverts

Des variantes des méthodes de Kasteleyn expliquées ici marchent pour tout graphe planaire ou graphe sur un tore.

Dans certains cas, on a d'autres types de transition de phase. Par exemple le modèle d'Ising peut être résolu de cette manière.



Compter le nombre de couplages parfaits dans un graphe général est un problème difficile (« #P-complet » pour les informaticiens : il n'y a pas d'algorithme en temps polynomial à moins que  $P = NP$ ). Comment compter les couplages dans un réseau dans  $\mathbb{R}^3$  ? Ceci est un problème ouvert important en physique statistique. Comment compter les trimères sur un réseau ? Comment compter les mélanges de dimères et monomères sur un réseau ?

Toutes ces questions, faciles à énoncer, restent au-dessus des techniques combinatoires connues à présent.

### Références

- [1] H. COHN, R. KENYON & J. PROPP – « A variational principle for domino tilings », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), no. 2, p. 297–346.
- [2] P. W. KASTELEYN – « The statistics of dimers on a lattice. I : The number of dimer arrangements on a quadratic lattice », *Physica* **27** (1961), p. 1209–1225.
- [3] R. KENYON – « Local statistics of lattice dimers », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **33** (1997), no. 5, p. 591–618.
- [4] F. LABOURIE – « Pavages », in *Pavages*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001, ce volume.
- [5] W. P. THURSTON – « Conway's tiling groups », *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), no. 8, p. 757–773.

Richard Kenyon, Laboratoire de Mathématiques, UMR 8628 du CNRS, Bât 425,  
Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

E-mail : richard.kenyon@yale.edu

Url : <https://gauss.math.yale.edu/~rkw25/>