Journées mathématiques X-UPS

Année 1999

Aspects de la théorie du contrôle

Jean-Michel Coron

Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires

Journées mathématiques X-UPS (1999), p. 127-174.
https://doi.org/10.5802/xups.1999-02

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1999, p. 127–174 doi: 10.5802/xups.1999-02

QUELQUES RÉSULTATS SUR LA COMMANDABILITÉ ET LA STABILISATION DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

par

Jean-Michel Coron

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 1999. Aspects de la théorie du contrôle. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1999, et Éditions de l'École polytechnique, 2008.

Chapitre 1. Commandabilité

1.1. Introduction

Dans ces notes on considère le système de contrôle

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1.1}$$

où $x \in \mathsf{R}^n$ est l'état du système et $u \in \mathsf{R}^m$ est le contrôle (aussi appelé la commande) ; la fonction $f : \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^n$ est supposée de classe C^∞. Le problème de commandabilité est le suivant : étant donnés deux états $a \in \mathsf{R}^n$ et $b \in \mathsf{R}^n$, peut-on trouver une commande $u : [0, T] \to \mathsf{R}^m$ nous permettant de passer de l'état a à l'état b, c'est-à-dire que si $x : [0, T] \to \mathsf{R}^n$ est solution de

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(0) = a,$$

alors $x(T) = b$. Le temps T est fixé ou arbitraire suivant les cas considérés.

Dans le texte de Martin et Rouchon [30] on a vu que pour un système linéaire

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu,$$

où A est une application linéaire de R^n dans R^n et B est une application linéaire de R^m dans R^n, ce problème, que $T > 0$ soit fixé ou non, a une solution et une seule si et seulement si

$$\text{(Critère de Kalman)} \qquad R(A, B) = \mathsf{R}^n, \tag{1.2}$$

où $R(A, B)$ est le sous-espace vectoriel de R^n engendré par les vecteurs $A^i Bu$ avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $u \in \mathsf{R}^m$.

Le cas général, où f est non linéaire, est très loin d'être résolu. Dans le texte de Martin et Rouchon [30], une méthode (platitude ; voir [16]) est présentée pour traiter ce problème dans de nombreux cas. L'objet de ce chapitre est de présenter d'autres résultats sur ce problème de commandabilité :

- Dans la section 1.2, on verra comment déduire du critère de Kalman des résultats « locaux » de commandabilité

• Dans la section 1.3, on étudiera le cas des systèmes sans dérive a□ne en la commande, c'est-à-dire le cas où

$$f(x,u) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$$

avec, pour $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $f_i \in C^\infty(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n)$.
• Dans la section 1.4, on traitera les systèmes généraux.

1.2. Linéarisé et commandabilité

L'objet de cette section est de déduire de la commandabilité de systèmes linéaires des résultats de commandabilité locale pour les systèmes non linéaires. Pour cela nous allons d'abord rappeler la notion de trajectoires et définir le linéarisé autour d'une trajectoire.

1.2.a. Trajectoire et linéarisé autour d'une trajectoire. Pour des raisons qui apparaîtront plus clairement dans la section suivante, il est intéressant d'autoriser des discontinuités pour la commande $t \mapsto u(t)$. Pour $T_0 < T_1$, on note $C^0_d([T_0,T_1];\mathrm{R}^m)$ l'ensemble des fonctions $u : [T_0,T_1] \to \mathrm{R}^m$ continues par morceaux, c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité. Soit $u \in C^0_d([T_0,T_1];\mathrm{R}^m)$. Comme ce u n'est pas continu on doit préciser ce qu'on entend par solution de

$$\dot{x} = f(x,u(t)). \tag{1.3}$$

On adopte la définition suivante :

Définition 1.1. Soit I un intervalle inclus dans $[T_0,T_1]$. La fonction $x : I \to \mathrm{R}^m$ est une solution de (1.3) si elle est continue et vérifie

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x(\tau),u(\tau))d\tau, \quad \forall (t_1,t_2) \in I^2.$$

Du théorème de Cauchy sur les solutions de

$$\dot{x} = f(x,u(t)), \quad x(T_0) = x_0$$

dans le cas où u est continue on déduit facilement que le théorème reste vrai si $u \in C^0_d([T_0,T_1];\mathrm{R}^m)$, c'est-à-dire que l'on a :

Théorème 1.2. *Soit* $u \in C^0_d([T_0,T_1];\mathsf{R}^m)$ *et soit* $a \in \mathsf{R}^n$*. Alors*

(i) *Pour tout intervalle* $I \subset [T_0,T_1]$ *contenant* T_0*, il existe au plus une fonction* $x : I \to \mathsf{R}^n$ *solution de* (1.3) *et valant* a *en* T_0*,*

(ii) *S'il n'existe pas de fonction* $x : [T_0,T_1] \to \mathsf{R}^n$ *solution de* (1.3) *et valant* a *en* T_0*, alors il existe* $\omega < T_1$ *et* $x : [T_0,\omega[\to \mathsf{R}^n$ *solution de* (1.3)*, valant* a *en* T_0 *et telle que*

(1.4) $$\lim_{t\to\omega} |x(t)| = +\infty.$$

Il résulte de ce théorème qu'étant donné $x_0 \in \mathsf{R}^n$ et $T \in [T_0,T_1]$, il existe une solution maximale et une seule de $\dot{x} = f(x,u(t))$, $x(T) = x_0$. Par « maximale », on entend ayant le plus grand intervalle de définition. Dans la suite de ces notes les solutions des équations différentielles sont toujours prises maximales.

Donnons maintenant la définition d'une trajectoire du système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$.

Définition 1.3. Soient T_0 et T_1 deux réels avec $T_0 < T_1$. Une trajectoire du système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$ sur $[T_0,T_1]$ est une fonction $(\overline{x},\overline{u}) : [T_0,T_1] \to \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ telle que

(i) $\overline{u} \in C^0_d([T_0,T_1]);\mathsf{R}^m)$,
(ii) $\overline{x}$ est solution de $\dot{\overline{x}} = f(\overline{x},\overline{u}(t))$.

Soit $(\overline{x},\overline{u}) : [T_0,T_1] \to \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ une trajectoire du système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$. Soit $(x,u) : [T_0,T_1] \to \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ une trajectoire du système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$ « proche » de $(\overline{x},\overline{u})$: on écrit $x = \overline{x} + \varepsilon y$, $u = \overline{u} + \varepsilon v$ avec ε « petit ». On a, en développant à l'ordre 1 en ε,

$$\begin{aligned}\dot{x} = \dot{\overline{x}} + \varepsilon\dot{y} &= f(\overline{x}+\varepsilon y,\ \overline{u}+\varepsilon u)\\ &\approx f(\overline{x},\overline{u}) + \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{u})y + \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x},\overline{u})v\right),\end{aligned}$$

et donc

$$\dot{y} \approx A(t)y + B(t)v,$$

avec

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) \in \mathcal{L}(\mathsf{R}^n; \mathsf{R}^n), \tag{1.5}$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) \in \mathcal{L}(\mathsf{R}^m; \mathsf{R}^n), \tag{1.6}$$

où $\mathcal{L}(\mathsf{R}^p; \mathsf{R}^q)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de R^p dans R^q. Ceci conduit à la définition

Définition 1.4. Soient T_0 et T_1 deux réels avec $T_0 < T_1$. Soit

$$(\overline{x}, \overline{u}) : [T_0, T_1] \longrightarrow \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$$

une trajectoire du système de contrôle $\dot{x} = f(x, u)$. Le linéarisé de $\dot{x} = f(x, u)$ autour de $(\overline{x}, \overline{u})$ est le système contrôle linéaire *dépendant du temps*

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v, \tag{1.7}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont donnés dans (1.5) et (1.6), où l'état est $y \in \mathsf{R}^n$ et où le contrôle est $v \in \mathsf{R}^m$.

Bien sûr A et B définis par (1.5) et (1.6) ne sont en général pas continus mais continus par morceaux et de nouveau on doit utiliser la définition « intégrale » (voir définition 1.1) pour définir les solutions de (1.7) même si $v : [T_0, T_1] \to \mathsf{R}^m$ est continue. Autrement dit, si $v \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$, $y : [T_0, T_1] \to \mathsf{R}^n$ est solution de $\dot{y} = A(t)y + B(t)v(t)$ si $y \in C^0([T_0, T_1]; \mathsf{R}^n)$ et si

$$y(t_2) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} A(t)y(t) + B(t)v(t)dt, \quad \forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2. \tag{1.8}$$

Notons que le système $\dot{y} = A(t)y + B(t)v(t)$ étant a□ne le phénomène d'explosion en temps fini (voir (1.4)) n'arrive pas et le problème de Cauchy : étant donné $a \in \mathsf{R}^n$ trouver $y : [T_0, T_1] \to \mathsf{R}^n$ solution de

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v(t), \quad y(T_0) = a,$$

a une solution et une seule.

On aimerait maintenant déduire de la commandabilité du linéarisé, un résultat de commandabilité locale (autour de $(\overline{x}, \overline{u})$) pour le système de contrôle non linéaire $\dot{x} = f(x, u)$. Mais pour que ce résultat soit utile il faut d'abord savoir caractériser la commandabilité de $\dot{y} = A(t)y + B(t)v$ (notons que comme A et B dépendent du temps le critère de Kalman donné en (1.2) ne peut plus être utilisé). C'est l'objet de la sous-section suivante.

1.2.b. Commandabilité des systèmes linéaires instationnaires. Dans toute cette sous-section, on se donne

- deux réels T_0, T_1 avec $T_0 < T_1$,
- une fonction $A \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathsf{R}^n; \mathsf{R}^n))$,
- une fonction $B \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathsf{R}^m; \mathsf{R}^n))$.

Le système de contrôle que l'on considère est

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v, \tag{1.9}$$

où $y \in \mathsf{R}^n$ est l'état du système et $v \in \mathsf{R}^m$ le contrôle (et où $t \in [T_0, T_1]$). Naturellement on adopte la définition suivante :

Définition 1.5. Le système de contrôle (1.9) est commandable si, pour tout $(a, b) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n$, il existe

$$(y, v) \in C^0([T_0, T_1]; \mathsf{R}^n) \times C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m),$$

trajectoire de (1.9) telle que

$$y(T_0) = a \quad \text{et} \quad y(T_1) = b.$$

Pour donner un premier critère de commandabilité, rappelons ce qu'est la résolvante $R \in C^0([T_0, T_1] \times [T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathsf{R}^n; \mathsf{R}^n))$ du système

$$\dot{y} = A(t)y. \tag{1.10}$$

De nouveau les solutions de (1.10) sont à prendre au sens intégral (faire $v = 0$ dans (1.8)). Soient t_1 et t_2 deux réels de $[T_0, T_1]$. Pour $\alpha \in \mathsf{R}^n$, considérons la solution $y \in C^0([0, T_1]; \mathsf{R}^n)$ de (1.10) satisfaisant $y(t_1) = \alpha$. Clairement l'application $\alpha \in \mathsf{R}^n \mapsto y(t_2) \in \mathsf{R}^n$ est linéaire. Cette application linéaire est $R(t_2, t_1)$. On vérifie facilement que

$$R(t, t) = \text{Identité}, \quad \forall t \in [T_0, T_1], \tag{1.11}$$

$$R(t_3, t_2) \circ R(t_2, t_1) = R(t_3, t_1), \quad \forall (t_1, t_2, t_3) \in [T_0, T_1]^3, \tag{1.12}$$

$$R \in C^0([T_0, T_1] \times [T_0, T_1]\,;\, \mathcal{L}(\mathsf{R}^n; \mathsf{R}^n)), \tag{1.13}$$

$$R(t_3, t_1) = R(t_2, t_1) + \int_{t_2}^{t_3} A(t) R(t, t_1)\, dt, \quad \forall (t_1, t_2, t_3) \in [T_0, T_1]^3. \tag{1.14}$$

Comme il est bien connu, un des intérêts de la résolvante R est de permettre de donner une formule explicite pour la solution de

$$\dot{y} = A(t)y + f(t), \quad y(t_1) = a \tag{1.15}$$

où les données sont $a \in \mathbb{R}^n$, $t_1 \in [T_0, T_1]$, $f \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ et l'inconnue est la fonction $y \in C^0([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$. En effet, comme on le vérifie facilement, la solution de (1.15) est donnée par

$$y(t) = R(t, t_1)a + \int_{t_1}^{t} R(t, s)f(s)ds. \tag{1.16}$$

Pour $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, notons par $M^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ la transposée de M. Un premier critère de commandabilité est

Théorème 1.6. *Le système $\dot{y} = A(t)y + B(t)v$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité*

$$C := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, t)B(t)B(t)^*R(T_1, t)^* dt \ (\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)) \tag{1.17}$$

est inversible.

Montrons juste la partie « si ». (C'est la partie la plus facile, mais aussi la partie la plus intéressante ; pour « seulement si », voir par exemple [15, p. 138-139]. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note que, si $\overline{v} \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathbb{R}^m)$, alors la solution du problème de Cauchy

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)\overline{v}(t), \quad y(T_0) = a$$

est donnée par – voir (1.16) –

$$y(t) = R(t, T_0)a + \int_{T_0}^{t} R(t, s)B(s)\overline{v}(s)ds.$$

En particulier

$$y(T_1) = R(T_1, T_0)a + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s)\overline{v}(s)ds$$

Donc, si on définit $\overline{v} \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathbb{R}^m)$ par

$$\overline{v}(s) = B(s)^*R(T_1, s)^*C^{-1}(b - R(T_1, T_0)a), \tag{1.18}$$

on a

$$y(T_1) = R(T_1, T_0)a + b - R(T_1, T_0)a = b.$$

Remarque 1.7. Le contrôle $\overline{v}$ donné par (1.18) a la propriété remarquable suivante : il minimise

$$E(v) := \int_{T_0}^{T_1} |v(s)|^2 ds,$$

sur l'ensemble des contrôles $v \in C_d^0([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$ permettant de faire passer l'état du système de a en T_0 à b en T_1. Autrement dit

$$E(v) > E(\overline{v}) \tag{1.19}$$

pour tout $v \in C_d^0([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$ tel que

$$(\dot{y} = A(t)y + B(t)v(t) \text{ et } y(T_0) = a) \implies y(T_1) = b; \tag{1.20}$$

en fait l'inégalité (1.19) est même stricte si $v \neq \overline{v}$ sur un ensemble infini de $[T_0, T_1]$. Cela se voit en vérifiant que, pour tout $v \in C_d^0([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$ satisfaisant (1.20), on a

$$E(v) = E(\overline{v}) + E(v - \overline{v}).$$

Le critère de commandabilité donné par le théorème 1.6 a un défaut sérieux pour être utilisable : il nécessite, a priori, de connaître R et de calculer des intégrales, ce qui peut s'avérer difficile, voir impossible. Nous allons maintenant donner un critère ne nécessitant pas de connaître ni de calculer des intégrales : on a juste à faire des dérivations. Pour ce critère on suppose A et B de classe C^∞ sur $[T_0, T_1]$ et on définit, par récurrence sur $i \in \mathsf{N}$, $B_i \in C^\infty([T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathsf{R}^m; \mathsf{R}^n))$ par

$$\begin{aligned} B_0 &= B, \\ B_i &= AB_{i-1} - \frac{d}{dt} B_{i-1}. \end{aligned}$$

On a alors le théorème suivant, où evM désigne le sous-espace vectoriel de R^n engendré par $M \subset \mathsf{R}^n$,

Théorème 1.8. *Supposons qu'il existe $\overline{t} \in [T_0, T_1]$ tel que*

$$ev\{B_i(\overline{t})v\,;\, v \in \mathsf{R}^m,\ i \in \mathsf{N}\} = \mathsf{R}^n. \tag{1.21}$$

Alors le système de contrôle $\dot{y} = A(t)y + B(t)v$ est commandable.

Montrons ce théorème. On suppose donc qu'on a (1.21). D'après le théorème 1.6, il suffit de vérifier que la matrice de commandabilité C définie par (1.17) est inversible. Supposons que C ne soit pas inversible. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ tel que $Cx = 0$ et donc $x^*Cx = 0$ (on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ en associant à x l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda \mapsto \lambda x$) ou encore

$$\int_{T_0}^{T_1} x^* R(T_1,s)B(s)B(s)^* R(T_1,s)^* x \, ds = 0. \tag{1.22}$$

Comme la quantité qui est sous le signe intégral dans le membre de gauche de (1.22) est positive ou nulle, elle est identiquement nulle sur $[T_0, T_1]$

$$x^* R(T_1,s)B(s)B(s)^* R(T_1,s)^* x = 0, \quad \forall s \in [T_0, T_1],$$

et donc

$$x^* R(T_1,s)B(s) = 0, \quad \forall s \in [T_0, T_1],$$

ou encore

$$k(s) := y^* R(\bar{t},s)B(s) = 0, \quad \forall s \in [T_0, T_1], \tag{1.23}$$

avec $y = R(T_1,\bar{t})^* x$ (voir (1.12)). D'après (1.11) et (1.12), $R(T_1,\bar{t})$ est bijective et donc, comme $x \neq 0$,

$$y \neq 0. \tag{1.24}$$

Avec (1.11) et (1.12), on a

$$R(s,\bar{t})R(\bar{t},s) = \text{Identité}. \tag{1.25}$$

Avec (1.14), on a

$$\frac{d}{ds}(R(s,\bar{t})) = A(s)R(s,\bar{t}), \quad \forall s \in [T_0, T_1],$$

qui, avec (1.25), donne

$$\left(\frac{d}{ds}\big(R(\bar{t},s)\big)\right) R(s,\bar{t}) + R(s,\bar{t})A(s)R(s,\bar{t}) = 0, \quad \forall s \in [T_0, T_1]$$

et donc

$$\frac{d}{ds}\big(R(\bar{t},s)\big) = -R(s,\bar{t})A(s), \quad \forall s \in [T_0, T_1]. \tag{1.26}$$

De (1.26), il vient

$$k'(s) = -y^* R(\bar{t}, s)\Big(A(s)B(s) - \frac{d}{ds}\big(B(s)\big)\Big)$$
$$= -y^* R(\bar{t}, s) B_1(s), \quad \forall s \in [T_0, T_1].$$

Continuant de la même façon on montre, par récurrence sur $i > 0$, que

$$k^{(i)}(s) = (-1)^i y^* R(\bar{t}, s) B_i(s), \quad \forall s \in [T_0, T_1].$$

En particulier, pour tout $i \in \mathrm{N}$,

$$k^{(i)}(\bar{t}) = (-1)^i y^* B_i(\bar{t}). \tag{1.27}$$

Mais (1.21) et (1.23) donnent alors $y^* = 0$, en contradiction avec (1.24).

La réciproque du théorème 1.8, qui est fausse en général, est vraie pour A et B analytiques : le calcul précédent (voir en particulier (1.26)) montre en fait, à l'aide du théorème 1.6,

Théorème 1.9. *Si A et B sont analytiques, alors le système de contrôle*

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v$$

*est commandable si et seulement si on a (*1.21*) pour tout $\bar{t} \in [T_0, T_1]$.*

Remarquons que, pour le théorème 1.9, on ne peut pas remplacer dans (1.21) « $i \in \mathrm{N}$ » par « $i \in [0, n-1]$ » comme on le fait dans la démonstration du critère de Kalman (1.2) en utilisant Cayley-Hamilton. (Prendre, par exemple, $m = n = 1,\ T_0 = 0,\ T_1 = 1,\ \bar{t} = 0$ et le système de contrôle $\dot{y} = tv$.) Toutefois on a la proposition suivante, où A et B sont seulement supposés de classe C^∞,

Proposition 1.10. *Supposons que $\bar{t} \in [T_0, T_1]$ est tel que (*1.21*) soit vrai. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [T_0, T_1] \cap ([\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon] \smallsetminus \{\bar{t}\})$,*

$$ev\{B_i(\bar{t})v\ ;\ v \in \mathrm{R}^m,\ i \in [0, n-1] \cap \mathrm{N}\} = \mathrm{R}^n.$$

Remarquons que le théorème 1.9 et la proposition 1.10 redonne le critère de Kalman (1.2).

1.2.c. Lien entre la commandabilité du système non linéaire et la commandabilité du linéarisé. Dans cette sous-section on se donne $T_0 < T_1$ et une trajectoire $(\overline{x}, \overline{u}) : [T_0, T_1] \to \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ du système de contrôle $\dot{x} = f(x, u)$. On introduit d'abord la définition suivante :

Définition 1.11. Le système de contrôle $\dot{x} = f(x, u)$ est localement commandable le long de la trajectoire $(\overline{x}, \overline{u})$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $a \in \mathsf{R}^n$ et tout $b \in \mathsf{R}^n$ avec $|x(T_0) - a| < \eta$ et $|x(T_1) - b| < \eta$, il existe $u \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$ tel que

$$(\dot{x} = f(x, u(t)) \text{ et } x(T_0) = a) \implies (x(T_1) = b), \tag{1.28}$$

$$|u(t) - \overline{u}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [T_0, T_1]. \tag{1.29}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.12. *Si le linéarisé autour de la trajectoire $(\overline{x}, \overline{u})$ est commandable, alors le système de contrôle $\dot{x} = f(x, u)$ est localement commandable le long de la trajectoire $(\overline{x}, \overline{u})$.*

Avant de donner la démonstration de ce théorème, insistons sur le fait que la réciproque de ce théorème est fausse (exemple : $n = m = 1$, $f(x, u) = u^3$, $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ et $\overline{x} = \overline{u} = 0$). Pour la démonstration on met sur $C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^k)$ et sur $C^0([T_0, T_1]; \mathsf{R}^k)$ la norme

$$|z| = \max\{|z(t)| \ ; \ t \in [T_0, T_1]\}$$

et on commence par énoncer un théorème qui justifie les calculs que nous avons fait pour introduire le linéarisé. Pour énoncer ce théorème, définissons

$$F : \mathsf{R}^n \times C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m) \longrightarrow \mathsf{R}^n, \ (a, u) \longmapsto F(a, u),$$

de façon suivante : pour $a \in \mathsf{R}^n$ et pour $u \in C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$, soit $x : [T_0, T_1] \to \mathsf{R}^n$ défini par

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(T_0) = a.$$

On pose alors $F(a, u) = x(T_1)$. Du fait de la possibilité d'explosion en temps fini, F peut ne pas être défini sur $\mathsf{R}^n \times C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$ tout entier, mais bien sûr elle est définie en $(\overline{x}(T_0), \overline{u})$ et $F(\overline{x}(T_0), \overline{u}) = \overline{x}(T_1)$. On a de plus le théorème suivant :

Théorème 1.13. *Le domaine de définition de F est un ouvert de l'espace $\mathsf{R}^n \times C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$ contenant $(\overline{x}(T_0), \overline{u})$. La fonction F est de classe C^1 et, pour $(a, v) \in \mathsf{R}^n \times C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$, la di érentielle de F en $(\overline{x}(T_0), \overline{u})$ est définie par*

$$F'(\overline{x}(T_0), \overline{u})(a, v) = b$$

où b est défini par

$$\left(\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}(t), \overline{u}(t))y + \frac{\partial F}{\partial u}(\overline{x}(t), \overline{u}(t))v \text{ et } y(T_0) = a\right) \Longrightarrow (y(T_1) = b).$$

Ce théorème se démontre « à la main », à l'aide d'estimations du type Gronwall ; voir, par exemple, [19]. Nous allons maintenant déduire le théorème 1.12 du théorème 1.13 et du théorème d'inversion locale. Soit $G : \mathsf{R}^n \times C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m) \to \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n$, $(a, u) \mapsto G(a, v) = (a, F(a, u))$. D'après le théorème 1.13 cette fonction G est définie et de classe C^1 sur un ouvert contenant $(\overline{x}(T_0), \overline{x}(T_1))$. On a

$$G'(x(T_0), \overline{u})(a, v) = (a, F'(x(T_0), \overline{u})(a, v)).$$

D'après l'hypothèse du théorème 1.12 et le théorème 1.13 $G'(\overline{x}(T_0), \overline{u})$ est surjective. Il existe donc un sous-espace vectoriel V de l'espace $\mathsf{R}^n \times C^0_d([T_0, T_1]; \mathsf{R}^m)$ de dimension $2n$ tel que la restriction de $G'(x(T_0), \overline{u})$ à V soit bijective. Utilisant le théorème d'inversion locale pour la restriction de G à V on obtient l'existence d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n$ contenant $G(\overline{x}(T_0), \overline{u}) = (x(T_0), x(T_1))$ et d'une application $H : \mathcal{O} \to V$, $(a, b) \mapsto (H_1(a, b), H_2(a, b))$, de classe C^1 sur $\mathcal{O}$ telle que

$$G \circ H(a, b) = (a, b),$$

$$H(\overline{x}(T_0), \overline{x}(T_1)) = (\overline{x}(T_0), \overline{u}). \tag{1.30}$$

A l'évidence $H_1(a, b) = a$ et, par construction, on a (1.28) si on prend $u = H_2(a, b)$. Finalement la continuité de H et (1.30) donne (1.29) pour $u = H_2(a, b)$ si (a, b) est proche de $(\overline{x}(T_0), \overline{x}(T_1))$.

1.2.d. Commandabilité locale en un point d'équilibre

Un point d'équilibre du système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$ est un couple $(\widetilde{x},\widetilde{u}) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ tel que $f(\widetilde{x},\widetilde{u}) = 0$.

Pour tout $(T_0,T_1) \in \mathsf{R}^2$ avec $T_0 < T_1$, la fonction $t \in [T_0,T_1] \mapsto (\widetilde{x},\widetilde{u}) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ est une trajectoire du système $\dot{x} = f(x,u)$. Pour la définition de la commandabilité locale en $(\widetilde{x},\widetilde{u}) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ de $\dot{x} = f(x,u)$ on a alors au moins deux possibilités suivant que l'on demande que la commandabilité soit en temps arbitraire ou en temps petit. Ici nous prendrons le temps petit et adoptons la définition

Définition 1.14. Le système $\dot{x} = f(x,u)$ est localement commandable au point d'équilibre $(\widetilde{x},\widetilde{u})$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(a,b) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n$ avec $|a-\widetilde{x}| < \eta$ et $|b-\widetilde{x}| < \eta$, il existe $u \in C^0_d([0,\varepsilon];\mathsf{R}^m)$ tel que

$$(\dot{x} = f(x,u(t)) \text{ et } x(0) = a) \implies (x(\varepsilon) = b),$$
$$|u(t) - \widetilde{u}| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,\varepsilon].$$

Le linéarisé au point d'équilibre $(\widetilde{x},\widetilde{u}) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ du système $\dot{x} = f(x,u)$ est le système de contrôle linéaire stationnaire

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{x},\widetilde{u})y + \frac{\partial f}{\partial u}(\widetilde{x},\widetilde{u})v$$

où $y \in \mathsf{R}^n$ est l'état et $v \in \mathsf{R}^m$ le contrôle. En appliquant le théorème 1.12 à la trajectoire $t \in [0,\varepsilon] \mapsto (\widetilde{x},\widetilde{u}) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$, on a facilement le théorème

Théorème 1.15. *Si le linéarisé au point d'équilibre $(\widetilde{x},\widetilde{u})$ du système $\dot{x} = f(x,u)$ est commandable, alors le système $\dot{x} = f(x,u)$ est localement commandable au point d'équilibre $(\widetilde{x},\widetilde{u})$.*

Donnons un exemple d'application tiré de la mécanique spatiale.

Exemple 1.16. On s'intéresse au pilotage de l'*orientation* d'un satellite (pour le pilotage de la position, voir [1, problème 12]). L'état du système est alors constitué des 3 angles d'Euler (ϕ,θ,ψ) d'un repère attaché au satellite par rapport à un repère fixe et de la vitesse angulaire ω de ce repère attaché au satellite par rapport au repère fixe ; cette vitesse angulaire est exprimée dans le repère lié au satellite : dans ce repère $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$. On a donc $x = (\omega^*, \eta^*)^* = (\omega^*, (\phi, \theta, \psi))^* \in \mathsf{R}^6$, de sorte que $n = 6$. Les contrôles sont (souvent) des couples délivrés par m tuyères. La dynamique du système est donnée par (en identifiant les points de R^p à des vecteurs colonnes)

$$\begin{cases} \dot{\omega} & = J^{-1}S(\omega)J\omega + \sum_{i=1}^m u_i b_i, \\ \dot{\eta} & = A(\eta)\omega, \end{cases} \tag{1.31}$$

où

- J est la matrice d'inertie du satellite,
- $S(\omega)$ est la matrice associée au produit vectoriel : $S(\omega)\omega' = \omega' \wedge \omega$, ou encore

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

- la matrice $A(\eta)$ est donnée par

$$A(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta\tan\phi & 1 & -\cos\theta\tan\phi \\ -\sin\theta/\cos\phi & 0 & \cos\theta/\cos\phi \end{pmatrix},$$

- le vecteur $u_i b_i$ de R^3 est le couple délivré par la tuyère i ; $b_i \in \mathsf{R}^3$ avec $|b_i| = 1$ est la direction du couple : elle est fixée (ce n'est pas un contrôle), $u_i \in \mathsf{R}$, qui est un contrôle, donne l'intensité et le sens du couple délivré par la tuyère i.

Le contrôle est $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^* \in \mathsf{R}^m$. En pratique, on prend $m = 3$ et les vecteurs b_1, b_2 et b_3 sont indépendants, de sorte que, sans restreindre la généralité,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le point $((\widetilde{\omega}, \widetilde{\eta}), \widetilde{u}) = ((0,0),0) \in \mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^3$ est un point d'équilibre du système de contrôle (1.31). Le linéarisé autour de ce point d'équilibre est

$$\dot{y} = Ay + Bv \tag{1.32}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} O & O \\ I & O \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix},$$

où $I \in \mathcal{L}(\mathsf{R}^3; \mathsf{R}^3)$ est l'identité de R^3 et $O \in \mathcal{L}(\mathsf{R}^3; \mathsf{R}^3)$ est l'application nulle. On a

$$A\,B = \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix}.$$

De sorte que

$$ev\{A^i Bu\,;\, u \in \mathsf{R}^3,\ i \in \{0,0\}\} = \mathsf{R}^6,$$

et donc, d'après le critère de Kalman (1.2), le système (1.32) est commandable. Donc, d'après le théorème 1.15, le système de contrôle (1.31) est localement commandable au point $(0,0) \in \mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^3$.

On étudiera plus loin le cas où une des tuyères étant défectueuses on a $m = 2$. Dans ce cas le linéarisé au point d'équilibre $(0,0) \in \mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^3$ n'est pas commandable et le théorème 1.15, qui donne juste une condition *su sante* de commandabilité locale, ne permet pas de conclure.

Remarque 1.17. Pour le système (1.31), la fonction f n'est pas définie sur tout $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ mais seulement sur l'ouvert

$$\{(\omega^*, \eta^*)^* \in \mathsf{R}^3 \times \mathsf{R}^3\ ;\ \cos\phi \neq 0\} \times \mathsf{R}^m.$$

L'hypothèse « f est défini sur tout $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ » n'a été faite que pour simplifier les notations. On adapte facilement les définitions et les théorèmes au cas où f n'est défini que sur un ouvert de $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ (et de classe C^∞ sur cet ouvert).

1.3. Systèmes sans dérive

Dans cette section, on regarde une classe particulière de systèmes de contrôle non linéaires : les systèmes sans dérive et a□ne par rapport au contrôle, c'est-à-dire que

$$f(x,u) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x),$$

où, pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in C^\infty(\mathsf{R}^n; \mathsf{R}^m)$. Ces systèmes sont dits sans dérive car quand le contrôle est nul l'état ne bouge pas. Bien sûr de tels systèmes sont très particuliers ; mais ils se rencontrent très souvent pour les systèmes d'origine mécanique.

Donnons un « prototype » de tels systèmes. On prend $m = 2$ et $m = 3$. Le système est

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1. \tag{1.33}$$

Ce système est un modèle, très simplifié, d'une voiture, où on a effectivement deux contrôles : tourner le volant et appuyer sur l'accélérateur et où l'état apparaît naturellement de dimension 3 : deux coordonnées pour le centre de gravité (la voiture se déplace sur un plan ou une surface) et un angle pour donner l'axe de la voiture. Après différentes simplifications (par exemple on suppose que l'on contrôle la vitesse directement alors que c'est en fait l'accélération le contrôle physique) et un bon choix de variables on arrive à (1.33). Tous les points $(\widetilde{x}, 0) \in \mathsf{R}^3 \times \mathsf{R}^2$ sont des points d'équilibre du système (1.33) – c'est un phénomène général pour les systèmes sans dérive –. Le linéarisé du système (1.33) au point d'équilibre $(\widetilde{x}, 0)$ est

$$\dot{y}_1 = v_1, \quad \dot{y}_2 = v_2, \quad \dot{y}_3 = \widetilde{x}_1 v_2 - \widetilde{x}_2 v_1; \tag{1.34}$$

Pour ce système linéaire, le critère de Kalman (1.2) n'est pas satisfait et donc ce système linéaire n'est pas commandable. Pourtant, on va voir dans cette section un critère suffisant (et nécessaire si les f_i sont analytiques) de commandabilité pour les systèmes sans dérive qui va nous montrer que le système (1.33) est bien commandable. Pour donner ce critère on a besoin de rappeler la définition du crochet de Lie de deux champs de vecteurs. C'est l'objet de la sous-section suivante.

1.3.a. Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Soient X et Y deux champs vecteurs de classe C^∞ sur R^n, c'est-à-dire deux fonctions de R^n dans R^n de classe C^∞ sur R^n. On pose $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

Le crochet de Lie de X et de Y est le champ de vecteurs, noté $[X, Y] \in C^\infty(\mathsf{R}^n; \mathsf{R}^n)$, dont la ième composante sur la base canonique de R^n est donné par

$$[X,Y]_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \Big(X_j(x) \frac{\partial Y_i}{\partial x}(x) - Y_j(x) \frac{\partial X_i}{\partial x}(x) \Big),$$

autrement dit

$$[X,Y](x) = Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x).$$

On a bien sûr

$$[X,Y] = -[Y,X]. \tag{1.35}$$

On a aussi l'identité de Jacobi, que l'on vérifie facilement à la main,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0, \tag{1.36}$$

pour tout $(X,Y,Z) \in C^\infty(\mathsf{R}^n;\mathsf{R}^n)^3$. Rappelons que, si $V \in C^\infty(\Omega;\mathsf{R}^p)$ où Ω est un ouvert non vide de R^n, et si $X \in C^\infty(\mathsf{R}^n;\mathsf{R}^n)$, on définit la dérivée de Lie de V dans la direction de X par

$$L_X V(x) = \sum X_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

ou encore

$$L_X V(x) = V'(x)X(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

On vérifie de nouveau facilement que

$$L_{[X,Y]} V = L_X(L_Y V) - L_Y(L_X V), \tag{1.37}$$

pour tout $(X,Y) \in C^\infty(\mathsf{R}^n;\mathsf{R}^m)^2$ et pour tout $V \in C^\infty(\mathsf{R}^n;\mathsf{R}^p)$.

Terminons cette sous-section par une remarque expliquant pourquoi les crochets de Lie sont importants pour le problème de la commandabilité. Considérons, pour simplifier, le cas $m=2$ de sorte que le système est

$$\dot{x} = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x).$$

On sait comment se déplacer « dans la direction de f_1 » : il suffit de prendre $(u_1,u_2) = (1,0)$. De la même façon on sait comment se déplacer « dans la direction de f_2 ». Expliquons comment on peut se déplacer dans la direction de $[f_1,f_2]$. Soit

$$\phi_i : \mathsf{R}^n \times \mathsf{R} \longrightarrow \mathsf{R}^n, \quad (x,t) \longmapsto \phi_i(x,t),$$

le flot associé au champ de vecteurs f_i :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(x,t) = f_i(\phi_i(x,t)), \tag{1.38}$$

$$\phi_i(x,0) = x. \tag{1.39}$$

Les fonctions $\phi_i,\ i \in \{1,2\}$, sont définies sur des ouverts de $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}$ contenant $\mathrm{R}^n \times \{0\}$. Posons $\phi_i^t(x) = \phi_i(x,t)$. Considérons maintenant, pour $\varepsilon > 0$, le contrôle $u : [0, 4\varepsilon] \to \mathrm{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} u(t) = (1,0), & \forall t \in [0, \varepsilon[, \\ u(t) = (0,1), & \forall t \in [\varepsilon, 2\varepsilon[, \\ u(t) = (-1,0), & \forall t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon[, \\ u(t) = (0,-1), & \forall t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon]. \end{cases} \tag{1.40}$$

Supposons qu'au temps $t = 0$ l'état du système soit $a \in \mathrm{R}^n$. Alors, au temps $t = 4\varepsilon$, l'état du système est $\phi_2^{-\varepsilon}\phi_1^{-\varepsilon}\phi_2^{\varepsilon}\,\phi_1^{\varepsilon}(a)$ et un calcul direct montre que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\phi_2^{-\varepsilon}\phi_1^{-\varepsilon}\phi_2^{\varepsilon}\,\phi_1^{\varepsilon}(a) = a + \varepsilon^2[f_1, f_2](a) + O(\varepsilon^3). \tag{1.41}$$

On arrive ainsi à se déplacer dans la direction de $[f_1, f_2]$. Mais remarquons que c'est « plus difficile » que de se déplacer dans la direction de f_1 ou de f_2 : au bout du temps 4ε on ne s'est déplacé que de $\varepsilon^2[f_1, f_2](a)$ et donc d'une quantité en ε^2 alors que, par exemple, le contrôle $u : [0, \varepsilon] \to \mathrm{R}^2$, $u(t) = (1, 0)$, nous permet de déplacer l'état de $\varepsilon f_1(a)$, qui est un terme en ε. C'est ce qu'on observe d'ailleurs quand on conduit une voiture : il est difficile de la déplacer latéralement quand on part d'une vitesse nulle, c'est-à-dire de faire un créneau. La « manœuvre » (1.40) est d'ailleurs ce que l'on fait pour faire le créneau : on tourne le volant à droite, on recule, on tourne le volant à gauche et on avance.

Une fois qu'on sait se déplacer dans la direction $[f_1, f_2]$ on voit assez facilement comment se déplacer dans les directions des crochets Lie $[f_1, [f_1, f_2]]$ et $[f_2, [f_1, f_2]]$ et ainsi de suite (mais cela devient de plus en plus compliqué). On est donc conduit à considérer l'algèbre de Lie engendrée par une famille de champs de vecteurs :

Définition 1.18. Soient m un entier > 0 et $f_i \in C^\infty(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}^n)$ pour $i \in [1, m]$. On appelle algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs

$f_1, \ldots, f_m$ le plus petit sous-espace vectoriel E de $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$f_i \in E, \quad \forall i \in [1, m], \tag{1.42}$$

$$(g \in E \text{ et } h \in E) \quad \Longrightarrow \quad ([g, h] \in E). \tag{1.43}$$

Cette algèbre de Lie est notée $\mathrm{Lie}\{f_1, \ldots, f_m\}$.

Bien sûr un tel plus petit sous-espace vectoriel vérifiant (1.42)-(1.43) existe : il suffit de prendre l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels vérifiant (1.42)-(1.43).

Par exemple $[f_1, f_2]$ et $[f_1, [f_1, f_2]]$ sont dans $\mathrm{Lie}\{f_1, f_2\}$. En fait en utilisant l'anticommutativité du crochet de Lie (voir (1.35)) et l'identité de Jacobi (1.36) on peut donner une description simple de $\mathrm{Lie}\{f_1, \ldots, f_m\}$ en procédant de la façon suivante. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies à valeurs dans $\{1, \ldots, m\}$, c'est-à-dire la réunion des $\mathcal{S}_k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où $\mathcal{S}_k$ désigne l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_k$ on associe $f_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ défini par récurrence sur k de la façon suivante :

(i) Si $k = 1$, $\qquad f_\sigma = f_{\sigma(1)}$,

(ii) Si $k > 2$, soit $\widetilde{\sigma}$ la restriction de σ à $\{1, \ldots, k-1\}$. On a $f_\sigma = [f_{\sigma(k)}, f_{\widetilde{\sigma}}]$.

En raisonnant par récurrence sur la longueur des crochets itérés (i.e. le nombre de f_i apparaissant dans les crochets) on démontre facilement à l'aide de l'anticommutativité et l'identité de Jacobi la proposition

Proposition 1.19. *$\mathrm{Lie}\{f_1, \ldots, f_m\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des champs de vecteurs dans $\{f_\sigma; \sigma \in \mathcal{S}\}$.*

Au vu de ce qui a été dit plus haut (voir en particulier (1.41)) il est tentant de conjecturer que, si

$$\{g(x); g \in \mathrm{Lie}\{f_1, \ldots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

on peut « se déplacer dans toutes les directions » et donc le système $\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$ est commandable. On va voir dans la section suivante que c'est effectivement le cas.

1.3.b. Crochets de Lie et commandabilité. Dans cette sous-section nous prenons comme définition de commandabilité

Définition 1.20. Le système $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$ est commandable si, pour tout $(a, b) \in (\mathrm{R}^n)^2$, il existe $T > 0$ et $u \in C_d^0([0, T]); \mathrm{R}^m)$ tel que

$$\Big(\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) f_i(x) \text{ et } x(0) = a\Big) \Longrightarrow (x(T) = b).$$

Remarquons que si $(\overline{x}, \overline{u}) : [0, T] \to \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m$ est une trajectoire de $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$, alors, pour tout $\lambda > 0,\ (x_\lambda, u_\lambda) : [0, \lambda T] \to \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m$ défini par

$$x_\lambda(t) = x\big(t/\lambda\big), \quad u_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\, u\big(t/\lambda\big), \quad \forall t \in [0, \lambda],$$

est aussi une trajectoire de $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$. Donc, dans la définition 1.20, on peut remplacer « il existe $T > 0$ et $u \in$ » par « et pour tout $T > 0$, il existe $u \in$ ».

Le résultat principal de cette sous-section est le théorème de Rashevski [36] – Chow [4] :

Théorème 1.21. *Si*

(1.44) $$\{g(x)\,;\, g \in \mathrm{Lie}\{f_1, \ldots, f_m\}\} = \mathrm{R}^n, \quad \forall x \in \mathrm{R}^n,$$

alors le système $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$ est commandable.

Montrons ce théorème. Pour simplifier les notations, supposons que les champs f_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, sont complets, c'est-à-dire que les flots ϕ_i de ces champs de vecteurs (voir (1.38)–(1.39)) sont définis sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}$ tout entier. (En fait on peut se ramener à ce cas en remplaçant $f_i(x)$ par $\widetilde{f_i}(x) = (1 + |f_i(x)|^2)^{-1} f_i(x)$: le champ $\widetilde{f_i}$ est borné donc complet, la condition (1.44) implique la même condition avec $\widetilde{f_i}$ à la place de f_i et $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i \widetilde{f_i}(x)$ est commandable (si et) seulement si $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$ est commandable).

Soit, pour $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $t > 0$, $\phi_i^t : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ défini par $\phi_i^t(x) = \phi_i(x, t)$. Notons que, pour $t < 0$,

$$(\dot{y} = -f_i(y),\ y(0) = x) \Longrightarrow (\phi_i^t(x) = y(|t|)).$$

Ainsi, si on note $A(a) \subset \mathsf{R}^n$ l'ensemble des $\phi_{i_k}^{t_k} \circ \phi_{i_{k-1}}^{t_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i_1}^{t_1}(a)$ où $k \in \mathsf{N}^*$, $i_j \in \{1, \ldots, m\}$ $\forall j \in [1, k]$, $t_j \in \mathsf{R}$ $\forall j \in [1, k]$, il su□t de vérifier que (1.44) implique que

$$A(a) = \mathsf{R}^n, \quad \forall a \in \mathsf{R}^n.$$

Il résulte facilement de la définition de A que

$$\big((b \in A(a) \text{ et } c \in A(b)) \Longrightarrow (c \in A(a))\big), \quad \forall (a, b, c) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n. \tag{1.45}$$

Par ailleurs, comme

$$\phi_i^t \circ \phi_i^{-t}(x) = x, \quad \forall x \in \mathsf{R}^n, \quad \forall t \in \mathsf{R}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\},$$

on a

$$b = \phi_{i_k}^{t_k} \circ \phi_{i_{k-1}}^{t_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i_1}^{t_1}(a) \Longrightarrow a = \phi_{i_1}^{-t_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_{k-1}}^{-t_{k-1}} \circ \phi_{i_k}^{-t_k}(b)$$

et donc

$$\big(b \in A(a) \Longrightarrow a \in A(b)\big), \quad \forall (a, b) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n. \tag{1.46}$$

Admettons pour l'instant le lemme

Lemme 1.22. *Sous l'hypothèse* (1.44) *du théorème* 1.21*, on a :*

$$A(a) \textit{ contient un ouvert non vide,} \quad \forall a \in \mathsf{R}^n.$$

On suppose que l'on a (1.44). Montrons que, pour tout $a \in \mathsf{R}^n$, $A(a)$ est à la fois ouvert et fermé dans R^n et donc égal à R^n ($A(a)$ est non vide car $a \in A(a)$).

Étape 1. Montrons que

$$A(a) \text{ est un voisinage de } a, \quad \forall a \in \mathsf{R}^n. \tag{1.47}$$

D'après le lemme 1.22, il existe $b \in A(a)$ tel que $A(a)$ est un voisinage de b. Comme $b \in A(a)$, il existe $k \in \mathsf{N} \setminus \{0\}$, des indices $i_1, \ldots, i_k$ dans $\{1, \ldots, m\}$ et des réels $t_1, \ldots, t_k$ tels que $b = \psi(a)$ avec $\psi = \phi_{i_k}^{t_k} \circ \phi_{i_{k-1}}^{t_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i_1}^{t_1}(a)$. Comme ψ est continue, $\psi^{-1}(A(a))$ est un voisinage de a. De plus ψ est un homéomorphisme de R^n : on a $\psi^{-1} = \phi_{i_1}^{-t_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_{k-1}}^{-t_{k-1}} \circ \phi_{i_k}^{-t_k}$. Cette expression de ψ^{-1} et (1.45) montrent que $\psi^{-1}(A(a)) \subset A(a)$, ce qui termine la démonstration de (1.47).

Étape 2. $A(a)$ est un ouvert de R^n. En effet, soit $b \in A(a)$; alors $A(b)$ est un voisinage de b. Mais, d'après (1.45), $A(b) \subset A(a)$. Donc $A(a)$ est un voisinage de b.

Étape 3. $A(a)$ est un fermé de R^n. En effet soit $(b_k; k \in \mathsf{N})$ une suite de points de $A(a)$ convergent vers $b \in \mathsf{R}^n$. D'après (1.47), $A(b)$ est un voisinage de b et donc il existe $k_0 \in \mathsf{N}$ tel que $b_{k_0} \in A(b)$, ce qui avec (1.46) implique que $b \in A(b_{k_0})$. Comme $b_{k_0} \in A(a)$ on a alors, avec (1.45), $b \in A(a)$ et donc $A(a)$ est un fermé de R^n.

Il reste à montrer le lemme 1.22. Un outil clé pour démontrer cette proposition est le lemme suivant :

Lemme 1.23. *Soit k un entier dans $[1, n-1]$. Soit $\varphi : \mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^n \quad y \mapsto \varphi(y)$ une application de classe C^∞ sur un voisinage de $\overline{y} \in \mathsf{R}^k$. On suppose que $\varphi'(\overline{y})$ est injective. Il existe alors un ouvert ω de R^k contenant $\overline{y}$, un ouvert Ω de R^n contenant $\varphi(\omega)$ et $V \in C^\infty(\Omega; \mathsf{R}^{n-k})$ tels que*

$$V(\varphi(y)) = 0, \quad \forall y \in \omega,$$
$$\ker V'(\varphi(y)) = \varphi'(y)(\mathsf{R}^k), \quad \forall y \in \omega.$$

Montrons ce lemme. Soit ℓ une application linéaire de R^{n-k} dans R^n telle que

$$\ell(\mathsf{R}^{n-k}) + \Im(\varphi'(\overline{y})) = \mathsf{R}^n. \tag{1.48}$$

Soit

$$\psi : \mathsf{R}^k \times \mathsf{R}^{n-k} \longrightarrow \mathsf{R}^n, \quad (y, z) \longmapsto \psi(y, z) = \varphi(y) + \ell(z).$$

D'après (1.48), $\psi'(\overline{y}, 0)$ est surjective donc bijective. Il existe donc, d'après le théorème d'inversion locale, un ouvert U de $\mathsf{R}^k \times \mathsf{R}^{n-k}$ contenant $(\overline{y}, 0)$, un ouvert Ω de R^n contenant $\varphi(\overline{y}) (= \psi(\overline{y}, 0))$ et $T \in C^\infty(\Omega; U)$ tel que

$$(\psi(y, z) = x \text{ et } (y, z) \in U) \Longleftrightarrow (x \in \Omega \text{ et } (y, z) = T(x))$$

Soit $P_2 : \mathsf{R}^k \times \mathsf{R}^{n-k} \to \mathsf{R}^{n-k}$, $(y, z) \mapsto z$. On voit facilement qu'il suffit de prendre

(i) pour ω, un ouvert de R^k contenant $\overline{y}$ et tel que $\omega \times \{0\} \subset U$,
(ii) $V = P_2 \circ T$.

On revient maintenant à la démonstration du lemme 1.22. Soit $a\in\mathbb{R}^n$. On commence par remarquer que les vecteurs $f_1(a),\dots,f_m(a)$ ne peuvent pas être tous nuls. En effet, si tous ces vecteurs sont nuls, alors le sous-espace vectoriel $E := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\,;\ f(a) = 0\}$ de $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, qui vérifie (1.43), vérifie aussi (1.42) et donc on a $\mathrm{Lie}\{f_1,\dots,f_m\} \subset E$, en contradiction avec (1.44) (prendre $x = a$). Soit $i_1 \in \{1,\dots,m\}$ tel que

$$f_{i_1}(a) \neq 0. \tag{1.49}$$

Si $n = 1$, $\{\phi^t_{i_1}(a); t \in \mathbb{R}\}$ est un voisinage de a. On suppose donc $n > 2$. Appliquons le lemme 1.23 avec $k = 1$, $\varphi(y) = \phi^y_{i_1}(a)$ et $\overline{y} = 0$. Il existe $\varepsilon_1 > 0$, un ouvert Ω_1 de $\mathbb{R}^n$ contenant $\{\phi^t_{i_1}(a)\,;\ t \in\,]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[\}$ et $V \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n-1})$ tels que

$$V(\phi^t_{i_1}(a)) = 0, \quad \forall t \in\,]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[, \tag{1.50}$$

$$\ker V'(\phi^t_{i_1}(a)) = \mathbb{R}\, f_{i_1}(\phi^t_{i_1}(a)), \quad \forall t \in\,]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[. \tag{1.51}$$

On note alors qu'il existe $t^1_1 \in\,]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[$ et $i_2 \in \{1,\dots,m\}$ tel que

$$V'\big(\phi^{t^1_1}_{i_1}(a)\big)f_{i_2}\big(\phi^{t^1_1}_{i_1}(a)\big) \neq 0$$

En effet, si ce n'est pas le cas,

$$E := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\ ;\ V'\big(\phi^t_{i_1}(a)\big)f\big(\phi^t_{i_1}(a)\big) = 0 \quad \forall t \in\,]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ qui contient l'ensemble $\{f_1,\dots,f_m\}$. Supposons que (1.43) soit vrai. Alors

$$\mathrm{Lie}\{f_1,\dots,f_m\} \subset E,$$

et donc

$$h \in \mathrm{Lie}\{f_1,\dots,f_m\} \Longrightarrow V'(a)h(a) = 0$$

en contradiction avec (1.44) et (1.51) si on prend $x = a$ et $t = 0$. Vérifions (1.43). D'après (1.37) il suffit de vérifier que si $\theta \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n-1})$ est tel que

$$\theta\big(\phi^t_{i_1}(a)\big) = 0, \quad \forall t \in\,]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[\tag{1.52}$$

et si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est tel que

$$V'\big(\phi^t_{i_1}(a)\big)\, f\big(\phi^t_{i_1}(a)\big) = 0 \quad \forall t \in\,]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[, \tag{1.53}$$

alors

(1.54) $$\theta'\big(\phi_{i_1}^t(a)\big)\, f\big(\phi_{i_1}^t(a)\big) = 0 \quad \forall t \in\,]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[.$$

(Pour g et h dans E, prendre successivement $(\theta, f) = (L_g V, h)$ et $(\theta, f) = (L_h V, g)$.) Dérivons (1.52) par rapport à t ; il vient

(1.55) $$\theta'\big(\phi_{i_1}^t(a)\big)\, f_{i_1}\big(\phi_{i_1}^t(a)\big) = 0 \quad \forall t \in\,]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[.$$

Mais (1.51) et (1.53) impliquent que $f\big(\phi_{i_1}^t(a)\big) = \lambda(t) f_{i_1}\big(\phi_{i_1}^t(a)\big)$, avec $\lambda(t) \in$ R, pour $t \in\,]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$; ce qui, avec (1.55), implique (1.54).

Il existe donc $t_1^1 \in\,]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$ et $i_2 \in \{1, \dots, m\}$ tel que

(1.56) $$V'\big(\phi_{i_1}^{t_1^1}(a)\big)\, f_{i_2}\big(\phi_{i_1}^{t_1}(a)\big) \neq 0,$$

ce qui, avec (1.51), implique que

(1.57) $f_{i_1}\big(\phi_{i_1}^{t_1^1}(a)\big)$ et $f_{i_2}\big(\phi_{i_1}^{t_1^1}(a)\big)$ sont linéairement indépendants.

Soit φ : R$^2 \to$ R^n, $(t_1, t_2) \mapsto \phi_{i_2}^{t_2} \circ \phi_{i_1}^{t_1}(a)$. On a $\varphi($R$^2) \subset A(a)$ et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t_1^1, 0) = f_{i_2}\big(\phi_{i_1}^{t_1^1}(a)\big),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t_1^1, 0) = f_{i_1}\big(\phi_{i_1}^{t_1^1}(a)\big).$$

En particulier, avec (1.57), $\varphi'(t_1^1, 0)$ est injectif. Si $n = 2$, $\varphi'(t_1^1, 0)$ est donc bijectif et le théorème d'inversion locale nous assure que $\varphi($R$^2)$ (et donc $A(a)$) est un voisinage de $\varphi(t_1^1, 0)$. On suppose donc $n > 3$ et on réitère le processus précédent. Esquissons rapidement comment on procède. On applique le lemme 1.23 avec $k = 2$, $\overline{y} = (t_1^1, 0)$. On en déduit l'existence d'un ouvert ω de R^2 contenant $\overline{y}$, d'un ouvert Ω de R^n contenant $\varphi(\omega)$ et d'une fonction $V \in C^\infty(\Omega;$ R$^{n-2})$ telle que

$$V\big(\varphi(t_1, t_2)\big) = 0, \quad \forall (t_1, t_2) \in \omega,$$

(1.58) $$\ker V'\big(\varphi(t_1, t_2)\big) = \varphi'(t_1, t_2)(\mathrm{R}^2), \quad \forall (t_1, t_2) \in \omega.$$

De nouveau on note alors qu'il existe $(t_1^2, t_2^2) \in \omega$ et $i_3 \in \{1, \dots, m\}$ tel que

(1.59) $$V'\big(\varphi(t_1^2, t_2^2)\big) f_{i_3}\big(\varphi(t_1^2, t_2^2)\big) \neq 0$$

En e￿et, si ce n'est pas le cas,

$$E := \{f \in C^\infty(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}^n); \quad V'\big(\varphi(y)\big) f\big(\varphi(y)\big) = 0, \quad \forall y \in \omega\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathsf{R}^n;\mathsf{R}^n)$ qui contient l'ensemble $\{f_1,\dots,f_m\}$. Comme ci-dessus on vérifie que (1.43) est vrai et donc que

$$\mathrm{Lie}\{f_1,\dots,f_m\}\subset E,$$

ce qui, comme ci-dessus, conduit à une contradiction avec (1.44) si l'on prend $x=\varphi(\overline{y})$. Soit maintenant $\psi:\mathsf{R}^3\to\mathsf{R}^n$, $(t_1,t_2,t_3)\mapsto \phi_{i_3}^{t_3}\circ\phi_{i_2}^{t_2}\circ\phi_{i_1}^{t_1}(a)$. On a $\psi(\mathsf{R}^3)\subset A(a)$ et de (1.59) et (1.58) on déduit facilement que

$$\psi'(t_1^2,t_2^2,0)(\mathsf{R}^3)=\mathsf{R}\,f_{i_3}\big(\varphi(t_1^2,t_2^2)\big)\oplus\ker V'\big(\varphi(t_1^2,t_2^2)\big)$$

et donc $\psi'(t_1^2,t_2^2,0)$ est injectif (noter que $\ker V'(x)$ est de dimension au moins 2, $\forall x\in\varphi(\omega)$). Si $n=3$, $\psi'(t_1^2,t_2^2,0)$ est alors bijectif et le théorème d'inversion locale nous assure que $\psi(\mathsf{R}^3)$, et donc $A(a)$, est un voisinage de $\psi(t_1^2,t_2^2,0)$. Si $n>3$, on continue...

Revenons au système (1.33). Pour ce système $m=2$, $n=3$, $f_1(x)=(1,0,-x_2)^*$, $f_2(x)=(0,1,x_1)^*$. Un calcul simple donne $[f_1,f_2](x)=(0,0,2)^*$, de sorte que

$$\mathsf{R}\,f_1(x)\oplus\mathsf{R}\,f_2(x)\oplus\mathsf{R}[f_1,f_2](x)=\mathsf{R}^3,\quad\forall x\in\mathsf{R}^3.$$

Le système (1.33) est donc bien commandable comme annoncé.

Le théorème 1.21 est quasiment optimal : sa réciproque est vraie pour les systèmes analytiques. On a le théorème suivant, dû à Hermann [20] et Nagano [33],

Théorème 1.24. *Si les champs de vecteurs $f_1,\dots,f_m$ sont analytiques et si le système $\dot x=\sum_{i=1}^m u_if_i(x)$ est commandable, alors*

$$\{g(x);g\in\mathrm{Lie}\{f_1,\dots,f_m\}\}=\mathsf{R}^n,\quad\forall x\in\mathsf{R}^n.$$

1.4. Systèmes avec dérive

La situation pour les systèmes avec dérive est considérablement plus compliquée et encore largement mal comprise, même si on limite ses ambitions à des résultats locaux, comme on le fera ici. Pendant toute cette section, on suppose que

$$f(0,0)=0,$$

et on s'intéresse à la commandabilité locale du système $\dot{x} = f(x,u)$ en $(0,0)$. On adopte la définition

Définition 1.25. On dit que le système $\dot{x} = f(x,u)$ est localement commandable en $(0,0)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x_0, x_1) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n$ avec $|x_0| < \eta$ et $|x_1| < \eta$, il existe $u \in C^0_d([0,\varepsilon];\mathsf{R}^m)$ tel que

$$|u(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,\varepsilon],$$
$$\big(\dot{x} = f(x,u(t)) \text{ et } x(0) = x_0\big) \Longrightarrow \big(x(\varepsilon) = x_1\big).$$

Nous allons donner une condition nécessaire et une condition suffisante de commandabilité locale. Pour simplifier les notations, nous supposons que le système est affine en le contrôle, c'est-à-dire que

$$f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x),$$

où f_i, $i = 0, 0, \ldots, m$, est dans $C^\infty(\mathsf{R}^n;\mathsf{R}^n)$. Une condition nécessaire de commandabilité locale est alors donnée dans le théorème suivant, qui se déduit du théorème 1.24,

Théorème 1.26. *Supposons que les champs de vecteurs $f_0, f_1, \ldots, f_m$ soient analytiques. Si le système $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$ est localement commandable en $(0,0)$, alors*

$$\{g(0)\,;\, g \in \mathrm{Lie}\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}\} = \mathsf{R}^n. \tag{1.60}$$

Cette condition nécessaire de commandabilité est suffisante dans deux cas importants.

(i) Les systèmes linéaires : $\dot{x} = Ax + Bu$. En effet, un calcul simple montre que si $f_0(x) = Ax$, $f_i(x) = Be_i$ pour $i \in \{1, \ldots, m\}$ où $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base de R^m alors

$$ad^k_{f_0} f_i(0) = (-1)^k A^k B e_i,$$

où $ad^k_{f_0} f_i \in C^\infty(\mathsf{R}^n;\mathsf{R}^n)$ est défini par récurrence sur $k \in \mathsf{N}$ par

$$ad^0_{f_0} f_i = f_i,$$
$$ad^k_{f_0} f_i = [f_0, ad^{k-1}_{f_0} f_i].$$

Il suffit alors d'utiliser le critère de Kalman (1.2) pour conclure.

(ii) Les systèmes sans dérive : $f_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{R}^n$. Cela résulte (de la démonstration) du théorème 1.21.

Mais la condition nécessaire de commandabilité locale donnée par le théorème 1.26 n'est pas su sante en général. Prenons, par exemple, $n = 2$ et $m = 1$ et considérons le système

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = u \tag{1.61}$$

de sorte que $f_0(x) = (x_2^2, 0)^*$, $f_1(x) = (0, 1)^*$. On a $[f_1, [f_1, f_0]] = (2, 0)^*$ et donc $[f_1, [f_1, f_0]](0)$ et $f_1(0)$ engendrent R^2. Pourtant le système (1.61) n'est pas localement commandable en $(0, 0) \in \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}$: en e et, x_1 ne peut qu'augmenter au cours du temps pour les solutions de (1.61).

Nous allons maintenant donner une condition su sante de commandabilité locale. Notons $\mathrm{Br}(f)$ l'ensemble des crochets de Lie itérés des vecteurs $f_0, f_1, \ldots, f_m$. Par exemple

$$h_1 = [f_0, [[f_1, f_0], f_0] \in \mathrm{Br}(f), \tag{1.62}$$

$$h_2 = [[[f_0, [f_1, f_0]], f_1] \in \mathrm{Br}(f). \tag{1.63}$$

La définition que nous avons donnée $\mathrm{Br}(f)$ n'est pas précise, mais peut être rendue facilement rigoureuse. Le seul point sur lequel nous nous contenterons d'insister c'est que les crochets de Lie sont des objets « formels » : il se pourrait que pour les champs f_0 et f_1 que l'on s'est donné on ait $h_1(x) = h_2(x)$, $\forall x \in \mathrm{R}^n$; même si c'est le cas h_1 et h_2 ne sont pas « identifiés ». Pour $h \in \mathrm{Br}(f)$ et $i \in \{0, 0, \ldots, m\}$, on note par $\delta_i(h)$ le nombre de fois où f_i apparaît dans la définition de h. Par exemple si $m = 2$, on a avec (1.61) et (1.63)

$$\delta_0(h_1) = 3, \quad \delta_1(h_1) = 1, \quad \delta_2(h_1) = 0,$$
$$\delta_0(h_2) = 2, \quad \delta_1(h_2) = 2, \quad \delta_2(h_2) = 0.$$

On voit sur cet exemple pourquoi il est important de considérer les éléments de $\mathrm{Br}(f)$ comme des objets « formels » pour pouvoir définir $\delta_i(h)$. Soit S_m le groupe des permutations de $\{1, \ldots, m\}$. Pour $\pi \in S_m$ et $h \in \mathrm{Br}(f)$, on note h^π l'élément de $\mathrm{Br}(f)$ obtenu en remplaçant, dans la définition de h, f_i par $f_{\pi(i)}$ pour tous les $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Finalement, pour $h \in \mathrm{Br}(f)$, on pose

$$\sigma(h) = \sum_{\pi \in S_m} h^{\pi}.$$

Par exemple, si $m = 2$, on a, avec (1.63),

$$\sigma(h_2) = [[[f_0, [f_1, f_0]], f_1] + [[[f_0, [f_2, f_0]], f_2].$$

Pour $\theta \in [0, +\infty[$, on dira que le système $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$ satisfait la condition $S(\theta)$ si, pour tout $h \in \mathrm{Br}(f)$ avec $\delta_0(h)$ impair et $\delta_i(h)$ pair pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\sigma(h)(0)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $g(0)$ où $g \in \mathrm{Br}(f)$ satisfait

$$\theta_0 \delta(g) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i(g) < \theta \delta_0(h) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i(h).$$

On a alors le théorème suivant, dû à Sussmann [40],

Théorème 1.27. *Si, pour un $\theta \in [0, 1]$, le système $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$ satisfait la condition $S(\theta)$, et si la condition de rang* (1.60) *est satisfaite, alors le système $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$ est localement commandable en $(0, 0) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m$.*

Pour la démonstration nous renvoyons à [40]. Mentionnons juste que la condition $S(\theta)$ est satisfaite pour tout θ pour

(i) les systèmes sans dérive : dans ce cas, si $h \in \mathrm{Br}(f)$ contient un nombre impair de f_0 (qui est $= 0$), il contient au moins un f_0 et est donc nul,

(ii) les systèmes linéaires $\dot{x} = Ax + Bu$: dans ce cas, si $h \in \mathrm{Br}(f)$ est tel que $\delta_1(f) + \delta_2(f) + \cdots + \delta_m(f) \neq 1$, alors $h(0) = 0$.

Exemple 1.28. Revenons au problème du contrôle de l'orientation d'un satellite ; voir l'exemple 1.16 ci-dessus. Le contrôle de l'orientation est assuré habituellement à l'aide de 3 tuyères : avec les notations de (1.31), on a $m = 3$ et (b_1, b_2, b_3) est une base de R^3. Dans cet exemple on étudie le cas où une des tuyères est en panne. (Cela arrive en fait souvent, au point que, par sécurité, les tuyères sont généralement doublées). On a donc, toujours avec les notations de (1.31), $m = 2$ et les vecteurs b_1 et b_2 sont indépendants. On vérifie alors facilement (voir [2] ou [14]) que le système (1.31) vérifie la condition de rang (1.60) si et seulement si

$$ev\{S(\omega)J^{-1}\omega\ ;\ \omega \in ev\{b_1, b_2\}\} + \mathsf{R}\, b_1 + \mathsf{R}\, b_2 = \mathsf{R}^3. \tag{1.64}$$

De plus, le calcul montre que si (1.64) est vérifié alors $S(1)$ est satisfait. Il résulte donc des théorèmes 1.26 et 1.27 que le système (1.31) est localement commandable en $(0,0) \in \mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^2$ si et seulement si (1.64) est satisfait. Remarquons qu'il a été montré par Bonnard dans [2] que (1.64) implique en outre la commandabilité globale en temps grand.

***Remarque 1.29* (voir aussi la remarque 1.17).** Rappelons que, pour le système (1.31), la fonction f n'est pas défini sur $\mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^m$ tout entier. Mais elle est définie et analytique sur un voisinage de $(0,0) \in \mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^m$. Pour appliquer les théorèmes 1.26 et 1.27 il suffit d'introduire un difféomorphisme analytique entre un ouvert de $\mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^2$ contenant $(0,0)$ et contenu dans le domaine de définition de f et $\mathsf{R}^6 \times \mathsf{R}^2$ qui image $(0,0)$ en $(0,0)$.

Chapitre 2. Stabilisation

2.1. Introduction

Les contrôles du chapitre précédent sont « en boucle ouverte » : ils dépendent du point de départ, du point d'arrivée et du temps. Dans la pratique, ces contrôles sont souvent peu robustes aux perturbations (erreurs de modèle, erreurs sur le point de départ). Pour s'en convaincre il suffit d'essayer d'aller à pied de l'École polytechnique à la station de RER « Lozère » en fermant les yeux : c'est une tâche difficile (et non dépourvue de danger dans la descente de l'escalier aux 300 marches). Dans la pratique on ouvre les yeux : le contrôle que l'on utilise dépend de ce que l'on voit, c'est-à-dire de l'état du système. C'est un contrôle en boucle fermée. De façon plus mathématique, on cherche un retour d'état, ou feedback, c'est-à-dire une fonction $x \mapsto u(x)$ telle que le point que l'on cherche à atteindre soit asymptotiquement stable pour le système bouclé $\dot{x} = f(x, u(x))$. Il est alors naturel de se demander si la commandabilité implique l'existence d'un tel u. On va voir que ce n'est pas toujours le cas, mais que l'introduction de feedbacks *instationnaires*, c'est-à-dire dépendant aussi du temps, sauve souvent la situation. Ce chapitre est organisé de la façon suivante :

- dans la section 2.2, on fait des rappels sur la stabilisation asymptotique des systèmes,
- dans la section 2.3, on montre que la commandabilité du linéarisé implique l'existence de feedbacks asymptotiquement stabilisants,
- dans la section 2.4, on donne une obstruction à l'existence de feedbacks asymptotiquement stabilisants,
- dans la section 2.5, on énonce des théorèmes montrant que la commandabilité locale implique souvent l'existence de feedbacks *instationnaires* asymptotiquement stabilisants.

2.2. Stabilisation asymptotique

Pour des raisons qui apparaîtront clairement dans la section 2.4, il est important de considérer le problème de la stabilisation asymptotique pour des champs de vecteurs *dépendant du temps* et *seulement continus*. Soit donc $X \in C^0(\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}; \mathrm{R}^n)$. Notons que le problème de Cauchy : étant donné $t_0 \in \mathrm{R}$ et $x_0 \in \mathrm{R}^n$, trouver x : I (intervalle contenant t_0) $\to \mathrm{R}^n$ de classe C^1 vérifiant

$$\dot{x} = X(x,t), \quad t \in I \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0$$

a au moins une solution maximale, mais on n'a plus d'unicité des solutions maximales. La démonstration de l'existence (théorème de Péano) se fait en régularisant le champ et en passant à la limite grâce au théorème d'Ascoli ; voir, par exemple, [19]. Comme dans le cas régulier le domaine de définition d'une solution maximale est un ouvert $I =]\alpha, \omega[$ contenant t_0 et si $\omega < +\infty$ (resp. $\alpha > -\infty$) $\lim_{t\to\omega^+} |x(t)| = +\infty$ (resp. $\lim_{t\to\alpha^-} |x(t)| = +\infty$). Voici un exemple de non unicité : on prend $n = 1$, $X(x,t) = |x|^{1/2}$, $t_0 = x_0 = 0$; alors, pour tout $\alpha > 0$, $x : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ défini par

$$x(t) = \frac{1}{4}(t-\alpha)^2, \quad \forall t \in [\alpha, +\infty[,$$
$$x(t) = 0, \quad \forall t \in]-\infty, \alpha[,$$

est une solution maximale du problème de Cauchy. Rappelons notre convention : toutes les solutions de $\dot{x} = X(x,t)$ sont maximales.

Donnons maintenant la définition de l'asymptotique stabilité.

Définition 2.1. Soit $X \in C^0(\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}; \mathrm{R}^n)$. On dit que $x_0 (\in \mathrm{R}^n)$ est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x,t)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\tau \in \mathrm{R}$ et pour tout $\tau' \geqslant \tau$

$$\big(\dot{x} = X(x,t) \text{ et } |x(\tau) - x_0| < \eta\big) \implies \big(|x(\tau') - x_0| < \varepsilon\big),$$

(ii) il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $s \in \mathrm{R}$,

$$\big(\dot{x} = X(x,t) \text{ et } |x(s) - x_0| < \delta\big) \implies \big(|x(\tau) - x_0| < \varepsilon,\ \forall \tau \geqslant s + M\big). \tag{2.1}$$

Si, de plus, pour tout $\delta > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que l'on ait (2.1) pour tout $s \in \mathrm{R}$, on dit que x_0 est globalement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x,t)$.

On a une caractérisation de l'asymptotique stabilité à l'aide de fonctions de Liapounov. Donnons cette caractérisation dans le cas global

Théorème 2.2. *Le point x_0 est globalement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x,t)$ si et seulement si il existe $V \in C^\infty(\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}; [0, +\infty[)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in C^0(\mathrm{R}^n; [0, +\infty[)$ tels que*

$$\alpha_i(x) > 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}, \quad \forall x \in \mathrm{R}^n \setminus \{x_0\},$$
$$\alpha_i(x_0) = 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\},$$
$$\lim_{|x| \to +\infty} \alpha_1(x) = +\infty,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} X_i(x,t) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x,t) \leqslant -\alpha_3(x), \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R},$$
$$\alpha_1(x) \leqslant V(x,t) \leqslant \alpha_2(x), \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}.$$

De plus, si X ne dépend pas du temps, on peut prendre V indépendant du temps et, si X est T-périodique par rapport au temps, on peut prendre V T-périodique par rapport au temps.

L'introduction de telles fonctions V pour étudier la stabilité asymptotique des points d'équilibre est due à Liapounov. Le théorème 2.2 a une longue histoire ; voir [18]. Sous la forme présentée ici, il est dû à Kurzweil [28]. Pour une démonstration plus simple que celle de [28], mais pour le cas indépendant du temps, voir l'article [5] de Clarke, Ledyaev et Stern.

Ce théorème montre la « robustesse » de l'asymptotique stabilité. En effet de ce théorème on déduit facilement (cela peut aussi se montrer à la main)

Théorème 2.3. *Si le point x_0 est globalement asymptotiquement stable, il existe*

$$r \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\},]0, +\infty[)$$

tel que, pour tout $Y \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$|Y(x,t) - X(x,t)| \leqslant r(x), \quad \forall (x,t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \times \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

le point x_0 est globalement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = Y(x,t)$.

De la version locale du théorème 2.2 (voir [28]), on déduit une version locale du théorème 2.3 en remplaçant « globalement » par localement et en demandant que (2.2) soit vrai pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$.

Rappelons que l'on a (voir, par exemple, [19] ou [1])

Proposition 2.4. *Soit $X \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si x_0 est localement asymptotiquement stable pour le système linéaire $\dot{x} = X'(x_0)x$, alors x_0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$.*

Rappelons aussi que 0 est localement ($=$ globalement) asymptotiquement pour le système linéaire $\dot{x} = Ax$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative ; voir [19] ou [1] par exemple.

2.3. Stabilisabilité et stabilisabilité du linéarisé

Dans cette section et les suivantes on se donne $f \in C^{\infty}(\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m; \mathrm{R}^n)$ vérifiant

$$f(0,0) = 0.$$

Un feedback est une fonction $u : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, $x \mapsto u(x)$. On devrait en fait dire « feedback stationnaire » pour insister sur le fait que le feedback ne dépend pas du temps. On ne le fera pas pour ne pas alourdir le texte.

On introduit la définition

Définition 2.5. On dit que le système $\dot{x} = f(x,u)$ est localement (resp. globalement) asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback s'il existe $u \in C^0(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}^m)$ s'annulant en 0 tel que $0 (\in \mathrm{R}^n)$ est localement (resp. globalement) asymptotiquement stable pour le système $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Le but de cette section est de montrer la proposition simple, mais très utile, suivante :

Proposition 2.6. *Si le linéarisé de $\dot{x} = f(x,u)$ en $(0,0)$ est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback, alors le système $\dot{x} = f(x,u)$ est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback.*

Comme un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ commandable est globalement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback (linéaire ; voir [30]), on déduit de la proposition 2.6 le

Corollaire 2.7. *Si le linéarisé de $\dot{x} = f(x,u)$ en $(0,0)$ est commandable, alors le système $\dot{x} = f(x,u)$ est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback.*

Par exemple le système (1.31) modélisant l'évolution de l'orientation d'un satellite est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback si on a trois tuyères indépendantes, c'est-à-dire si $m = 3$ et si les 3 vecteurs b_1, b_2 et b_3 sont indépendants.

Montrons maintenant la proposition 2.6. On suppose donc que le système linéaire

$$\dot{y} = Ay + Bv$$

où le contrôle est $v \in \mathrm{R}^m$ et l'état $y \in \mathrm{R}^n$ et où

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0),$$

est localement asymptotiquement stabilisable. Admettons pour l'instant le lemme

Lemme 2.8. *Si le système linéaire $\dot{y} = Ay + Bv$ est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback, alors il existe un feedback linéaire $u(x) = Cx$ avec $C \in \mathcal{L}(\mathrm{R}^m; \mathrm{R}^n)$ tel que 0 est globalement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = (A + BC)x$.*

Soit donc $C \in \mathcal{L}(\mathrm{R}^m; \mathrm{R}^n)$ tel que 0 est globalement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = (A + BC)x$. Soit $X(x) = f(x, u(x))$ avec $u(x) = Cx$. On a alors $X'(0) = A + BC$ et donc, d'après la proposition 2.4, 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$.

Montrons le lemme 2.8. Soit

$$R(A,B) = ev\{A^i Bu \; ; \; u \in \mathrm{R}^m \; ; \; i \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}.$$

Soit k la dimension de $R(A,B)$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de R^n. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de R^n telle que $(f_1, \dots, f_k)$ est une base de $R(A,B)$. On voit facilement que

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

où $B_1 \in M_{k,m}$ (i.e. est une matrice réelle avec k lignes et m colonnes ; comme d'habitude les vecteurs de R^p sont identifiés à des matrices à p lignes et 1 colonne), $A_1 \in M_{k,k}$, $A_2 \in M_{k,n-k}$, $A_3 \in M_{n-k,n-k}$. On voit aussi facilement que

$$R(T^{-1}AT, T^{-1}B) = ev\left\{ \begin{pmatrix} A_1^i B_1 u \\ 0 \end{pmatrix} ; i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \, u \in \mathrm{R}^m \right\}$$

et donc le système $\dot{y}_1 = A_1 y_1 + B_1 v$ où l'état est $y_1 \in \mathrm{R}^k$ et le contrôle $v \in \mathrm{R}^m$ est commandable. Le théorème du placement pôles (voir par exemple [30]) nous donne l'existence de $C_1 \in M_{m,k}$ tel que

$$\sigma(A_1 + B_1 C_1) \subset \{z \in \mathrm{C} \; ; \; \mathrm{Re}\, z < 0\}, \tag{2.5}$$

où $\sigma(A_1 + B_1 C_1)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de $A_1 + B_1 C_1$. D'après l'hypothèse du lemme 2.8, il existe $u \in C^0(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}^m)$ s'annulant en 0 tel que 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{y} = Ay + Bv(y)$. Posant $y = T\widetilde{y}$, on voit alors que 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{\widetilde{y}} = T^{-1}AT\widetilde{y} + Bv(T^{-1}\widetilde{y})$, et donc, avec (2.3) et (2.4), $0 \in \mathrm{R}^{n-k}$ est localement asymptotiquement stable pour $\dot{y}_2 = A_3 y_2$. D'où

$$\sigma(A_3) \subset \{z \in \mathrm{C} \; ; \; \mathrm{Re}\, z < 0\}. \tag{2.6}$$

Soit

$$\widetilde{C} = (C_1, O) \in M_{m,n}$$

et soit $C = \widetilde{C}T$. On a

$$\sigma(A + BC) = \sigma(T^{-1}AT + T^{-1}B\widetilde{C})$$

$$T^{-1}AT + T^{-1}B\widetilde{C} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 C_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\sigma(A + BC) = \sigma(A_1 + B_1 C_1) \cup \sigma(A_3).$$

Donc, avec (2.5) et (2.6),

$$\sigma(A + BC) \subset \{z \in \mathrm{C} \; ; \; \mathrm{Re}\, z < 0\},$$

ce qui implique que le feedback linéaire $v(y) = Cy$ stabilise asymptotiquement le système $\dot{y} = Ay + Bv$.

Retournons, à titre d'exemple, au système de contrôle (1.31) de l'orientation d'un satellite (voir l'exemple 1.16). Si les 3 tuyères fonctionnent (i.e. $m = 3$ et $ev\{b_1, b_2, b_3\} = \mathrm{R}^3$ avec les notations de l'exemple 1.16), on a vu que le linéarisé de ce système en $(0,0) \in \mathrm{R}^6 \times \mathrm{R}^3$ est commandable. Donc d'après le corollaire 2.7, le système (1.31) est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback.

Par contre, comme on va le voir dans la section suivante, il existe « beaucoup » de systèmes de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$ localement commandable en $(0,0)$ qui ne sont pas localement asymptotiquement stabilisables à l'aide d'un feedback.

2.4. Obstruction à la stabilisabilité

Ce résultat principal de cette section est le théorème suivant, dû à Brockett [3].

Théorème 2.9. *Si le système $\dot{x} = f(x,u)$ est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback, alors l'image par f de tout voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.*

Avant de donner la démonstration de ce théorème montrons sur deux exemples que la commandabilité locale n'implique pas que l'image par f de tout voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ soit un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Le premier exemple est le système (1.33) (le modèle de voiture). On a vu que ce système est commandable (voir le théorème 1.21) et aussi localement commandable en $(0,0)$ (voir (ii) page 153) ; pourtant, pour ce système,

$$f(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^3 \smallsetminus (\{(0,0)\} \times (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}))$$

n'est pas un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^3$. Donc, d'après le théorème 2.9, ce système n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback.

Le deuxième exemple est celui du pilotage de l'orientation du satellite en mode dégradé : c'est le système (1.31) avec $m = 2$. On suppose que la condition de rang (1.64) est satisfaite. Alors le système est localement commandable (voir l'exemple 1.28). Pourtant, avec les notations de (1.31),

$$\begin{cases} J^{-1}S(\omega)\, J\omega + \sum_{i=1}^{2} u_i b_i = \Omega \\ A(\eta)\,\omega = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega \in \mathbb{R}\, b_1 + \mathbb{R}\, b_2$$

et donc l'image par f d'un voisinage de l'origine (dans $\mathbb{R}^8$) n'est jamais un voisinage de l'origine (dans $\mathbb{R}^6$). Et donc, de nouveau, on a un système localement commandable en $(0,0)$ qui n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback.

La démonstration du théorème 2.9 que nous allons donner repose sur la théorie du degré. Pour une présentation complète de cette théorie, voir, par exemple, [23]. Ici nous nous contenterons d'admettre le théorème

Théorème 2.10. *Il existe une et une seule application, noté* $\deg$*, qui à tout ouvert non vide borné* Ω*, à toute fonction* $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}; \mathsf{R}^n)$ *et à tout* $b \in \mathsf{R}^n$ r $\varphi(\partial\Omega)$ *associe un entier relatif* $\deg(\varphi, \Omega, b)$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *si* $\varphi \in C^1(\Omega; \mathsf{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathsf{R}^n)$ *et si* $b \in \mathsf{R}^n$ r $\varphi(\partial\Omega)$ *est une valeur régulière de* φ *(i.e. si* $(\varphi(x) = b$ *et* $x \in \Omega) \Rightarrow \det \varphi'(x) \neq 0)$ *on a*

$$\deg(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \mathsf{sgn}\big(\det \varphi'(x)\big); \tag{2.7}$$

(ii) *continuité par rapport à* φ *: pour tout ouvert non vide borné* Ω*, pour toute fonction* $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}; \mathsf{R}^n)$ *et pour tout* $b \in \mathsf{R}^n$ r $\varphi(\partial\Omega)$*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* $\psi \in C^0(\overline{\Omega}; \mathsf{R}^n)$ *tel que*

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

on $\deg(\psi, \Omega, b) = \deg(\varphi, \Omega, b)$*.*

Dans (2.7) on a utilisé la notation

$$\operatorname{sgn}(s) = 1 \quad \text{si} \quad s > 0, \quad \operatorname{sgn}(s) = -1 \quad \text{si} \quad s < 0.$$

On convient aussi que le second membre de (2.7) est nul si $\varphi^{-1}(b) =$?. Notons qu'il résulte facilement du théorème d'inversion locale que, si $b \in \mathsf{R}^n$ r $\varphi(\partial\Omega)$ est une valeur régulière de $\varphi \in C^1(\Omega); \mathsf{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathsf{R}^n)$, alors $\varphi^{-1}(b)$ n'a qu'un nombre fini d'éléments et donc le membre de droite de (2.7) est bien défini.

Des deux propriétés (i) et (ii) on déduit facilement les propriétés suivantes de l'application $\deg$.

Proposition 2.11. *Soit* Ω *un ouvert non vide borné de* R^n*. On a*

(i) *(Invariance par homotopie). Soit* $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathsf{R}^n$*,* $(x, t) \mapsto H(x, t)$ *une application continue et soit* b *dans* R^n r $(H(\partial\Omega \times [0, 1]))$*. On a*

$$\deg(H(\cdot, 0), \Omega, b) = \deg(H(\cdot, 1), \Omega, 0).$$

(ii) *Si* $\varphi \in C^0(\overline{\Omega}; \mathsf{R}^n)$ *et si* $b \in \mathsf{R}^n$ r $\varphi(\overline{\Omega})$*, alors* $\deg(\varphi, \Omega, b) = 0$*.*

L'invariance par homotopie se déduit trivialement de (ii) du théorème 2.10. Pour montrer (ii), soit $\varepsilon > 0$ tel que

(2.8) $$x \in \overline{\Omega} \implies |\varphi(x) - b| > \varepsilon$$

et soit $\psi \in C^1(\Omega; \mathsf{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathsf{R}^n)$ tel que

(2.9) $$|\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Soit $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathsf{R}^n$ défini par $H(x,t) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x)$. De (2.8) et (2.9) on déduit facilement que

(2.10) $$|H(x,t) - b| > 0 \qquad \forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,1].$$

Donc, avec (i) de la proposition 2.11,

(2.11) $$\deg(\varphi, \Omega, b) = \deg(\psi, \Omega, b).$$

Mais le membre de droite de l'égalité (2.11) vaut 0 d'après (2.7), car d'après (2.8) et (2.9), $b \notin \psi(\overline{\Omega})$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant, dû à Krasnoselskii [25] (voir aussi [26]) et dont le théorème 2.9 est un simple corollaire,

Théorème 2.12. *Soit $X \in C^0(\mathsf{R}^n; \mathsf{R}^n)$ tel que 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$. Alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\deg(X, \{x \in \mathsf{R}^n; |x| < \varepsilon\}, 0)$ est bien défini et vaut $(-1)^n$.*

Montrons le théorème 2.12. Commençons par traiter le cas où X est de classe C^1. Soit $\varphi : \mathsf{R}^n \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}^n$ le flot associé à X :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi),$$
$$\varphi(x,0) = x, \quad \forall x \in \mathsf{R}^n.$$

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \{x \in \mathsf{R}^n; |x| < \varepsilon\}$. Soit $H : \overline{B}_\varepsilon \times [0,1] \to \mathsf{R}^n$ défini par

$$H(x,t) = \frac{\varphi\big(x, t/(1-t)\big) - x}{t} \quad \text{si } t \in]0,1[,$$
$$H(x,1) = -x,$$
$$H(x,0) = X(x).$$

En utilisant le fait que 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$, on vérifie facilement que, pour $\varepsilon > 0$ *assez petit*,

$H \in C^0(\overline{B}_\varepsilon \times [0,1]; \mathsf{R}^n)$ et ne s'annule pas sur $\partial B_\varepsilon \times [0,1]$. En considérant $H(\cdot, 0)$ on voit donc que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\deg(X, B_\varepsilon, 0)$ est bien défini et l'invariance par homotopie du degré ((i) de la proposition 2.11) nous donne

$$\deg(X, B_\varepsilon, 0) = \deg(x \longmapsto -x, B_\varepsilon, 0). \tag{2.12}$$

Mais le nombre de droite de l'égalité (2.12) vaut, d'après (2.7), $(-1)^n$.

Reste à traiter le cas où X est seulement continu. Comme 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$ la version locale du théorème 2.2 nous donne l'existence de $V \in C^\infty(\mathsf{R}^n; [0, +\infty[)$ et de $\eta > 0$ tels que

$$V(0) = 0 < V(x), \quad \forall x \in \mathsf{R}^n \smallsetminus \{0\}, \tag{2.13}$$

$$X(x) \cdot \nabla V(x) = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) < 0, \quad \forall x \in B_\eta \smallsetminus \{0\}. \tag{2.14}$$

Soit $\varepsilon \in \,]0, \eta[$ et soit $H : \overline{B}_\varepsilon \times [0,1] \to \mathsf{R}^n$ défini par

$$H(x,t) = (1-t)X(x) - t\nabla V(x).$$

Avec (2.14), on a

$$H(x,t) \cdot \nabla V(x) < 0 \qquad \forall x \in \overline{B}_\varepsilon \smallsetminus \{0\}, \quad \forall t \in [0,1].$$

En particulier

$$H(x,t) \neq 0 \qquad \forall x \in \partial B_\varepsilon \qquad \forall t \in [0,1],$$

et l'invariance par homotopie du degré nous donne

$$\deg(X, B_\varepsilon, 0) = \deg(-\nabla V, B_\varepsilon, 0). \tag{2.15}$$

Mais, de (2.14), on voit

$$-\nabla V(x) \cdot \nabla V(x) < 0 \qquad \forall x \in B_\eta \smallsetminus \{0\},$$

et donc (version locale du théorème 2.2 : c'est la partie « si » de ce théorème, i.e. la partie la plus facile) 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = -\nabla V(x)$. Par conséquent, d'après ce qui précède, pour $\varepsilon > 0$ assez petit $\deg(-\nabla V, B_\varepsilon, 0) = (-1)^n$, ce qui avec (2.15) termine la démonstration du théorème 2.12.

De ce théorème 2.12, on déduit le corollaire suivant qui implique le théorème 2.9 (considérer $X(x) = f(x, u(x))$)

Corollaire 2.13. *Si $X \in C^0(\mathsf{R}^n;\mathsf{R})$ est tel que 0 est localement asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$, alors l'image par X de tout voisinage de 0 dans R^n est un voisinage de 0 dans R^n.*

En effet, soit $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $\deg(X, B_\varepsilon, 0)$ est bien défini et vaut $(-1)^n$. La propriété (ii) du théorème 2.10 (continuité du degré par rapport à φ) nous donne l'existence de $\eta > 0$ (dépendant de $\varepsilon > 0$) tel que

$$\deg(X - y, B_\varepsilon, 0) = (-1)^n (\neq 0) \qquad \forall y \in B_\eta,$$

qui avec (ii) de la proposition 2.11 assure que $B_\eta \subset X(B_\varepsilon)$.

2.5. Feedbacks instationnaires

Dans les sections 2.3 et 2.4, les feedbacks étaient indépendants du temps. L'objet de cette section est de montrer que l'introduction de feedbacks *instationnaires* (c'est-à-dire de fonctions $(x,t) \mapsto u(x,t)$) est utile pour la stabilisation asymptotique. On va voir que la commandabilité locale implique « souvent » l'existence de feedbacks *instationnaires* localement asymptotiquement stabilisants. On va regarder d'abord le cas des systèmes sans dérive (dans ce cas on a même un résultat global) puis le cas des systèmes avec dérive.

2.5.a. Systèmes sans dérive. Dans cette sous-section

$$f(x,u) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x),$$

c'est-à-dire que le système est sans dérive et affine par rapport au contrôle. Pour de tels systèmes, on peut obtenir un résultat « global ». On a le théorème suivant, montré dans [6],

Théorème 2.14. *Supposons que*

$$\{h(x);\ h \in \mathrm{Lie}\{f_1, \dots, f_m\}\} = \mathsf{R}^n, \quad \forall x \in \mathsf{R}^n. \tag{2.16}$$

Alors, pour tout $T \in]0, +\infty[$, il existe $u \in C^\infty(\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}; \mathsf{R}^m)$ tel que

$$u(0,t) = 0, \quad \forall t \in \mathsf{R}, \tag{2.17}$$

$$u(x, t+T) = u(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}, \tag{2.18}$$

(2.19) 0 *est globalement asymptotiquement stable pour*

$$\dot{x} = \textstyle\sum_{i=1}^m u_i(x,t) f_i(x).$$

En particulier le système (1.33) (le modèle de voiture) est globalement asymptotiquement stabilisable à l'aide de feedbacks instationnaires (périodiques en temps) alors que (voir la section précédente) il n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide de feedbacks *indépendants du temps*.

Remarque 2.15. Le cas particulier du système (1.33) a été traité par Samson dans [37] ; c'est cet exemple et l'article de Sontag et Sussmann [39] qui ont montré les premiers l'intérêt des feedbacks instationnaires par rapport aux feedbacks indépendants du temps pour le problème de la stabilisation. L'article de [39] considère le cas $n = 1$ (mais pour des systèmes $\dot{x} = f(x, u)$ généraux) et montre que la commandabilité implique la stabilisabilité asymptotique à l'aide de feedbacks *instationnaires*.

Avant d'esquisser les étapes de la démonstration du théorème 1.28, rappelons que

- la condition (2.16) implique la commandabilité de

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x);$$

voir le théorème 1.21 ;

- si les f_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont analytiques, la condition (2.16) est équivalente à la commandabilité de $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$; voir le théorème 1.24.

Bien sûr la version « locale » du théorème 1.28 est aussi vraie.

Esquissons maintenant les étapes de la démonstration du théorème 1.28. Le point clé est la démonstration de l'existence, pour $T > 0$ donné, de $\overline{u} \in C^\infty(\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}; \mathrm{R}^n)$ vérifiant (2.17), (2.18) et tel que, pour toute solution de $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i(x,t) f_i(x)$ sur $[0, T]$,

$$x(T) = x(0), \tag{2.20}$$

$$\begin{cases} \text{si } x(0) \neq 0, \text{ le linéarisé autour de } (x, \overline{u}) \\ \text{est commandable sur } [0, T]. \end{cases} \tag{2.21}$$

Utilisant (2.20) et (2.21), on montre assez facilement l'existence d'une application $v \in C^\infty(\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}; \mathrm{R}^n)$ satisfaisant (2.17) et (2.18), « petite » et telle que si $\dot{x} = f(x, (\overline{u} + v)(x,t))$ et $x(0) \neq 0$ alors

$$|x(T)| < |x(0)|,$$

ce qui implique que 0 est globalement asymptotiquement stable. Pour assurer (2.20), il suffit d'imposer

$$\overline{u}(x, T-t) = -\overline{u}(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

En effet, si on a (2.22), alors pour toute solution de $\dot{x} = f(x, \overline{u}(x,t))$ défini au temps $T/2$ on a $x(T-t) = x(t)$ car $t \mapsto x(T-t)$ est solution de la même équation différentielle et égal à x au temps $T/2$. On a donc (2.20), au moins s'il n'y a pas explosion. (Pour éviter l'explosion prendre « $\overline{u}(x,t)$ petit »). Il reste à assurer (2.21). C'est la partie difficile de la preuve. (Noter que $\overline{u} = 0$ ne convient généralement pas.) On montre l'existence de $\varepsilon \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \,]0, +\infty[)$ tel que « la plupart » des $\overline{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant (2.17), (2.18), (2.22) et

$$|\overline{u}(x,t)| < \varepsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0,T],$$

conviennent. (Essayer sur le modèle (1.33) de la voiture en utilisant le théorème 1.8).

Remarque 2.16. La méthode précédente suggère aussi la méthode suivante pour étudier la commandabilité locale d'un système en $(0,0)$: au lieu de regarder le linéarisé autour de la trajectoire $(\overline{x}, \overline{u}) = 0$, étudier le linéarisé autour d'autres trajectoires $(\overline{x}, \overline{u})$ avec $\overline{x}(0) = \overline{x}(\varepsilon) = 0$ et $|\overline{u}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \varepsilon]$. Essayons cette méthode sur la voiture (1.33). Soit $\varepsilon > 0$; soit $\overline{u} \in C^\infty([0,\varepsilon]; \mathbb{R}^2)$ avec

$$|\overline{u}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, \varepsilon],$$
$$\overline{u}(\varepsilon - t) = -\overline{u}(t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon].$$

Soit $\overline{x} : [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}^3$ la solution de

$$\dot{\overline{x}} = f(\overline{x}, \overline{u}(\overline{x}, \varepsilon)),$$
$$\overline{x}(0) = 0.$$

Comme ci-dessus $\overline{x}(\varepsilon - t) = \overline{x}(t) \quad \forall t \in [0, \varepsilon]$, et en particulier $\overline{x}(\varepsilon) = \overline{x}(0)$. Si $\overline{u} \equiv 0$ sur $[0, \varepsilon]$ le linéarisé autour de $(\overline{x}, \overline{u})$ n'est pas commandable et on ne peut pas conclure. Mais on vérifie facilement que si $\overline{u} \not\equiv 0$ sur $[0, \varepsilon]$ le linéarisé autour de $(\overline{x}, \overline{u})$ est commandable (utiliser le théorème 1.8) et donc, avec le théorème 1.12, le système (1.33) est localement le long de la trajectoire $(\overline{x}, \overline{u})$. On en déduit facilement que le système (1.33) est localement commandable en $(0, 0)$. (D'où l'on déduit d'ailleurs la commandabilité globale par des arguments d'homogénéité). On a ainsi pu réduire de nouveau le problème de la commandabilité locale d'un système non linéaire à la commandabilité d'un système linéaire (mais dépendant du temps). Cette méthode (« méthode du retour ») est surtout utile pour le contrôle des équations aux dérivées partielles ; en effet pour ces équations les méthodes non linéaires reposant sur les crochets de Lie ne marchent pas bien et l'essentiel des résultats connus portent sur la commandabilité des systèmes linéaires. Pour ces systèmes, on dispose de différentes méthodes puissantes pour l'étude de la commandabilité comme la méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) de J.-L. Lions [29] ; voir le texte de Puel [35]. La méthode du retour permet justement d'étudier la commandabilité de systèmes non linéaires à l'aide de la commandabilité de systèmes linéaires (dépendant du temps). Pour différentes applications de cette méthode à des équations aux dérivées partielles non linéaires, voir [9], [10], [21].

2.5.b. Systèmes avec dérive. Pour les systèmes avec dérive la situation est beaucoup plus compliquée et on va se contenter de chercher un résultat local. Notons tout de suite qu'on ne peut espérer pouvoir stabiliser à l'aide de feedbacks, même instationnaires, de *classe* C^1 les systèmes commandables. En effet, prenons par exemple $n = m = 1$ et considérons le système

$$\dot{x} = x - u^3. \tag{2.23}$$

On vérifie facilement que ce système est localement commandable en $(0, 0) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$. Mais il n'existe pas de $u \in C^1(\mathrm{R} \times \mathrm{R}; \mathrm{R})$, $(x, t) \mapsto u(x, t)$, tel que 0 est localement asymptotiquement stable pour le système bouclé $\dot{x} = x - u^3(x, t)$. Le système (2.23) n'est pas affine en le contrôle. Mais on a un contre-exemple affine en le contrôle en « ajoutant un intégrateur au système » (2.23), c'est-à-dire en considérant le système

$$\dot{x} = x - y^3, \quad \dot{y} = u, \tag{2.24}$$

où le contrôle est $u \in \mathsf{R}$ et l'état $(x, y)^* \in \mathsf{R}^2$. Le système (2.24) est localement commandable. Cela peut se voir à la main ; on peut aussi noter que ce système satisfait la condition de Sussmann $S(0)$, la condition de rang (1.60) et appliquer le théorème 1.27. Pourtant on peut montrer assez facilement (c'est toutefois plus compliqué que pour le système (2.23)) qu'il n'existe pas de feedbacks instationnaires de classe C^1 $u : (x, y)^* \mapsto u((x, y)^*, t)$ tel que 0 est localement asymptotiquement stable pour le système bouclé

$$\dot{x} = x - y^3, \quad \dot{y} = u((x, y)^*, t).$$

Pour cette raison on diminue la régularité des feedbacks.

Noter d'ailleurs que les systèmes (2.23) et (2.24) sont globalement asymptotiquement stabilisables à l'aide de feedbacks (indépendants du temps) : pour le système (2.23) on peut par exemple prendre $u(x) = (2x)^{1/3}$; pour le système (2.24) c'est un peu plus compliqué mais, par exemple, $u((x, y)^*) = -y + 2x^{1/3} + (x - y^3)$ convient ; voir [24].

On a le théorème suivant, montré dans [8] :

Théorème 2.17. *Supposons que, pour un $\theta \in [0, 1]$, le système*

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x)$$

satisfasse la condition de Sussmann $S(\theta)$. Supposons que $n \notin \{2, 3\}$ et que

$$\{g(0) \; ; \; g \in \mathrm{Lie}\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}\} = \mathsf{R}^n.$$

Alors, pour tout $T > 0$, il existe $u \in C^0(\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}; \mathsf{R}^m)$, de classe C^∞ sur $(\mathsf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathsf{R}$ tel que

$$u(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathsf{R},$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad \forall t \in \mathsf{R}, \quad \forall x \in \mathsf{R}^n,$$

0 *est localement asymptotiquement stable pour*

$$\dot{x} = f_0(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i(x, t) f_i(x).$$

On ne sait pas si l'hypothèse $n \notin \{2, 3\}$ peut être supprimée. Rappelons que, d'après le théorème 1.27, les hypothèses du théorème 2.17 entraînent la commandabilité locale en $(0, 0) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^m$ de

$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$. En fait (voir [8]) la conclusion du théorème 2.17 reste valable si $n \notin \{2, 3\}$ pour les conditions suffisantes connues de commandabilité locale et il est tentant de conjecturer, qu'au moins pour les systèmes analytiques, la conclusion du théorème 2.17 reste valable sous la seule hypothèse de la commandabilité locale de $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$ en $(0, 0) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m$.

***Exemple 2.18* (satellite en mode dégradé).** Revenons de nouveau au problème du contrôle de l'orientation d'un satellite en mode dégradé ; voir l'exemple 1.28. on suppose (1.64). Alors les hypothèses du théorème 2.17 sont satisfaites pour le système de contrôle (1.31) et donc ce système est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide de feedbacks instationnaires. De tels feedbacks ont été construits dans [32], [12] et [31]. Rappelons que ce système n'est pas localement asymptotiquement stabilisable à l'aide de feedbacks stationnaires ; voir le deuxième exemple de la page 162.

2.6. Quelques compléments

Beaucoup de questions fondamentales n'ont pas été abordées dans ce chapitre. En particulier

• Nous n'avons pas expliqué comment *construire* des feedbacks explicites asymptotiquement stabilisants. Ce problème fondamental a été bien sûr abordé par de nombreux auteurs et de nombreux livres ou articles de synthèse ont été écrits dessus ; voir par exemple [11, 13, 17, 22, 27, 34, 38].

• Souvent on ne mesure pas tout l'état x, mais une partie y de x. On ne peut donc pas utiliser des feedbacks dépendant de x : il faut se limiter à des feedbacks dépendant de y. Sur ce sujet il existe de nouveau une très vaste littérature. Mentionnons juste l'article de Teel et Praly [41], qui contient un des résultats les plus intéressants obtenus récemment sur ce sujet. Notons que de nouveau il est utile de considérer des feedbacks instationnaires ; par exemple le système

$$\dot{x} = u, \qquad y = x^2$$

ne peut être stabiliser asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme « $u(y)$ », bien qu'il puisse être stabilisé asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme « $u(x)$ » (prendre, par exemple $u(x) = -x$). Mais il peut être stabilisé asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme « $u(y, t)$ ». Voir [7] ou [11] pour plus d'informations.

Références

[1] F. Bonnans & P. Rouchon – *Analyse et commandes de systèmes dynamiques*, Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1998.

[2] B. Bonnard – « Contrôle de l'attitude d'un satellite rigide », *RAIRO, Autom. Syst. Anal. Control* **16** (1982), p. 85–93.

[3] R. W. Brockett – « Asymptotic stability and feedback stabilization », in *Differential geometric control theory (Houghton, Mich., 1982)*, Progress in Math., vol. 27, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 181–191.

[4] W. L. Chow – « Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung », *Math. Ann.* **117** (1940/1941), p. 98–105.

[5] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev & R. J. Stern – « Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions », *J. Differential Equations* **149** (1998), no. 1, p. 69–114.

[6] J.-M. Coron – « Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift », *Math. Control Signals Systems* **5** (1992), no. 3, p. 295–312.

[7] ———, « On the stabilization of controllable and observable systems by an output feedback law », *Math. Control Signals Systems* **7** (1994), no. 3, p. 187–216.

[8] ———, « On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law », *SIAM J. Control Optim.* **33** (1995), no. 3, p. 804–833.

[9] ———, « On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids », *J. Math. Pures Appl. (9)* **75** (1996), no. 2, p. 155–188.

[10] ———, « On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions », *ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var.* **1** (1996), p. 35–75.

[11] ———, « On the stabilization of some nonlinear control systems : results, tools, and applications », in *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 528, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, p. 307–367.

[12] J.-M. Coron & E.-Y. Keraï – « Explicit feedbacks stabilizing the attitude of a rigid spacecraft with two control torques », *Automatica J. IFAC* **32** (1996), no. 5, p. 669–677.

[13] J.-M. Coron, L. Praly & A. Teel – « Feedback stabilization of nonlinear systems : sufficient conditions and Lyapunov and input-output techniques », in *Trends in control (Rome, 1995)*, Springer, Berlin, 1995, p. 293–348.

[14] P. E. Crouch – « Spacecraft attitude control and stabilization : Applications of geometric control theory to rigid body models », *IEEE Trans. Autom. Control* **29** (1984), p. 321–331.

[15] P. Faurre & M. Depeyrot – *Éléments d'automatique*, vol. 1, Dunod, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.

[16] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin & P. Rouchon – « Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples », *International Journal of Control* **61** (1995), no. 6, p. 1327–1361.

[17] R. A. Freeman & P. V. Kokotović – *Robust nonlinear control design. State-space and Lyapunov techniques*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, Boston, 2008.

[18] W. Hahn – *Stability of motion*, Grundlehren Math. Wissen., vol. 138, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[19] P. Hartman – *Ordinary di erential equations*, Classics in Applied Math., vol. 38, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.

[20] R. Hermann – « On the accessibility problem in control theory », in *Internat. Sympos. Nonlinear Di erential Equations and Nonlinear Mechanics*, Academic Press, New York, 1963, p. 325–332.

[21] T. Horsin – « On the controllability of the Burgers equation », *ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var.* **3** (1998), p. 83–95.

[22] A. Isidori – *Nonlinear control systems*, 3e éd., Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[23] O. Kavian – *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Math. & Applications, vol. 13, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[24] M. Kawski – « Stabilization of nonlinear systems in the plane », *Systems Control Lett.* **12** (1989), no. 2, p. 169–175.

[25] M. A. Krasnosel'skiĭ – *The operator of translation along the trajectories of di erential equations*, Transl. Math. Monogr., vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[26] M. A. Krasnosel'skiĭ & P. P. Zabreiko – *Geometric methods in nonlinear analysis*, Grundlehren Math. Wissen., vol. 263, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[27] M. Krstić, I. Kanellakopoulos & P. Kokotović – *Nonlinear and adaptive control design*, Wiley, New York, 1995.

[28] J. Kurzweil – « On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion », *Czechoslovak Mathematical Journal* **06** (1956), no. 2, p. 217–259, Amer. Math. Soc. Transl. series, vol. 24 (1956), p. 19-77.

[29] J.-L. Lions – « Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems », *SIAM Rev.* **30** (1988), no. 1, p. 1–68.

[30] Ph. Martin & P. Rouchon – « Systèmes plats : planification et suivi de trajectoires », in *Aspects de la théorie du contrôle*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1999, ce volume.

[31] P. Morin & C. Samson – « Time-varying exponential stabilization of a rigid spacecraft with two control torques », *IEEE Trans. Automat. Control* **42** (1997), no. 4, p. 528–534.

[32] P. Morin, C. Samson, J.-B. Pomet & Z.-P. Jiang – « Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls », *Systems Control Lett.* **25** (1995), no. 5, p. 375–385.

[33] T. Nagano – « Linear di erential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras », *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), p. 398–404.

[34] H. Nijmeijer & A. van der Schaft – *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[35] J.-P. Puel – « Contrôle et équations aux dérivées partielles », in *Aspects de la théorie du contrôle*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1999, ce volume.

[36] P. K. Rashevski – « About connecting two points of complete nonholonomic space by admissible curve », *Uch Zapiski ped. inst. Libknexta* **2** (1938), p. 83–94.

[37] C. Samson – « Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart », in *Advanced robot control. Proc. of the intl. workshop on nonlinear and adaptive*

control : issues in robotics (Grenoble, Nov. 21-23, 1990), Springer-Verlag, Berlin, 1991, p. 125–151.
[38] R. Sepulchre, M. Janković & P. V. Kokotović – *Constructive nonlinear control*, Commun. and Control Engineering Series, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[39] E. Sontag & H. Sussmann – « Remarks on continuous feedback », in *19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, 1980, p. 916–921.
[40] H. J. Sussmann – « A general theorem on local controllability », *SIAM J. Control Optim.* **25** (1987), no. 1, p. 158–194.
[41] A. Teel & L. Praly – « Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback », *Systems Control Lett.* **22** (1994), no. 5, p. 313–325.

Jean-Michel Coron, Institut universitaire de France et Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques Louis-Lions, Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05
E-mail : coron@ann.jussieu.fr
Url : https://www.ljll.math.upmc.fr/coron/