



Journées mathématiques X-UPS

Année 1996

Aspects des systèmes dynamiques: le premier retour

Adrien DOUADY

Courbes de Julia sans tangente

Journées mathématiques X-UPS (1996), p. 117-132.

<https://doi.org/10.5802/xups.1996-06>

© Les auteurs, 1996.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

COURBES DE JULIA SANS TANGENTE

par

Adrien Douady

Table des matières

Introduction.....	117
1. La courbe de Julia.....	119
1.1. Mise en place.....	119
1.2. Construction du lacet γ	120
1.3. Injectivité de γ	122
1.4. Points qui ne sont pas sur J	123
2. Points fixes ou périodiques à multiplicateur non réel...	124
2.1. Points fixes, points périodiques, multiplicateur...	124
2.2. Existence d'un point sans tangente : cas c non réel	124
2.3. Cas c réel.....	125
2.4. Densité des points sans tangente.....	127
3. Distorsion bornée.....	128
3.1. Introduction, fonctions holomorphes.....	128
3.2. Distorsion.....	129
3.3. Majoration de la distorsion.....	129
3.4. Contradiction en supposant l'existence d'une tan- gente.....	131

Introduction

Étant donné un nombre complexe c , on note f_c l'application $z \mapsto z^2 + c$ de \mathbb{C} dans lui-même. Considérons pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ l'*orbite* de z_0 par f_c , c'est-à-dire la suite des $z_n = f_c^n(z_0)$. Pour $c = 0$, la situation est simple : si $|z_0| < 1$, la suite z_n tend vers 0, si $|z_0| > 1$,

Publication originelle dans Journées X-UPS 1996. Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1996, et Éditions de l'École polytechnique, 2009.

on a $|z_n| \rightarrow \infty$, si $|z_0| = 1$, on a $|z_n| = 1$ pour tout n ; l'application $\gamma_0 : t \mapsto e^{2i\pi t}$ est un homéomorphisme de \mathbb{T} sur le cercle unité J_0 qui conjugue l'application $\mathbf{q} : t \mapsto 2t$ à f_0 restreinte à J_0 .

Dans cet exposé nous allons montrer que, pour $|c| < 1/4$, on a une situation analogue jusqu'à un certain point.

Théorème 1

(a) Pour $|c| < 1/4$, il existe une courbe J_c dans \mathbb{C} telle que $f_c(J_c) = J_c$, et un homéomorphisme γ_c de \mathbb{T} sur J_c conjuguant \mathbf{q} à f_c

(b) L'application f_c a deux points fixes, un α_c dans la région Δ entourée par J_c et un β_c sur J_c . Pour $z_0 \in \Delta$, l'orbite (z_n) de z_0 tend vers α_c ; pour z_0 dans la région extérieure à J_c on a $|z_n| \rightarrow \infty$.

Commentaire. Par courbe dans \mathbb{C} , on entend un ensemble homéomorphe à un cercle. L'assertion (a) est simplement qu'il existe une application continue injective $\gamma_c : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f_c \circ \gamma_c = \gamma_c \circ \mathbf{q}$; on peut appeler J_c son image et comme \mathbb{T} est compact γ_c sera un homéomorphisme de \mathbb{T} sur J_c . L'ensemble Δ est l'ensemble des points de $\mathbb{C} - J_c$ par rapport auxquels γ_c a un indice $\neq 0$.

Le théorème suivant montre les limites de l'analogie avec le cas $c = 0$.

Théorème 2. Dans les conditions du théorème 1, si $c \neq 0$, la courbe J_c n'a de tangente en aucun point.

On dit que J_c est la courbe de Julia de f_c . Les théorèmes 1 et 2 sont valables sous une hypothèse plus faible que $|c| < 1/4$. Il suffit que f_c ait un point fixe α attractif, c'est-à-dire tel que $f_c(\alpha) = \alpha$, $|f'_c(\alpha)| < 1$. Les valeurs de c pour lesquelles cela a lieu forment la région W bornée par une cardioïde symétrique par rapport à \mathbb{R} , ayant un rebroussement en $1/4$ et passant par le point $-3/4$. Cette région contient le disque $\mathbb{D}_{1/4}$. Mais la démonstration sous cette hypothèse demanderait des outils savants d'analyse complexe.

Pour démontrer le théorème 1, on construit $\gamma_c : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et satisfaisant $f_c \circ \gamma_c = \gamma_c \circ \mathbf{q}$. On montre ensuite qu'elle est injective en construisant un inverse.

La démonstration du théorème 2 se fait en plusieurs étapes.

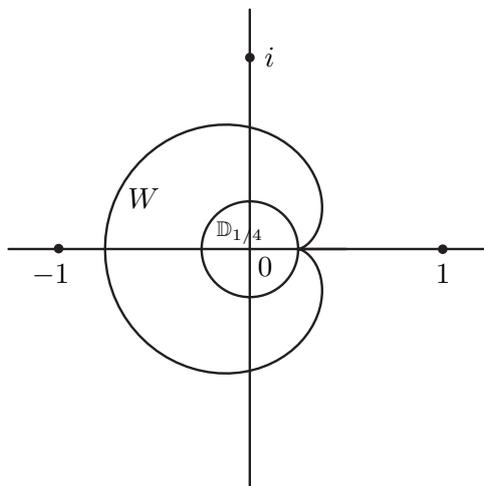


FIGURE 1.

(1) Il y a un point où J_c n'a pas de tangente. Cela est facile si c n'est pas réel : le point fixe β_c convient car il a un multiplicateur non réel. Si c est réel, on montre qu'il y a un cycle d'ordre 3 à multiplicateur non réel, cela est assez délicat.

(2) Il y a dans J_c un ensemble dense de points où J_c n'a pas de tangente. C'est facile à partir du résultat précédent par images réciproques.

(3) On montre que J_c possède une propriété d'autosimilarité avec distorsion bornée. À partir de là, s'il y avait un point où J_c a une tangente, on montre que J_c contiendrait un arc C^1 , c'est-à-dire ayant une tangente en chaque point (et variant continûment avec le point). Ce serait en contradiction avec le pas (2).

1. La courbe de Julia

1.1. Mise en place. On note $\mathbb{D}_{a,r}$ le disque ouvert de centre a et de rayon r : $\mathbb{D}_{a,r} = \{z \mid |z - a| < r\}$. On écrit \mathbb{D}_r pour $\mathbb{D}_{0,r}$.

On fixe c avec $|c| < 1/4$. La fonction f_c a deux points fixes α et β , solutions de $z^2 - z + c = 0$; on convient que $|\alpha| \leq |\beta|$. On a $|\alpha\beta| = |c| < 1/4$, d'où $|\alpha| < 1/2$, et $\beta = 1 - \alpha$, d'où $1/2 < |\beta| < 3/2$.

Le point α est un point fixe *attractif*. Cela signifie que la dérivée de f_c en α est de module < 1 . En effet cette dérivée est 2α , et on vient de voir que $|\alpha| < 1/2$. Le point fixe β , lui est *répulsif*. En effet $|\beta| > 1/2$.

On pose

$$U_0 = \mathbb{D}_{3/2}, \quad V_0 = \mathbb{D}_{1/2}, \quad A_0 = U_0 \setminus \bar{V}_0 = \{z \mid 1/2 < |z| < 3/2\}.$$

Pour $n \geq U$, on pose

$$U_n = f_c^{-n}(U_0), \quad V_n = f_c^{-n}(V_0), \quad A_n = f_c^{-n}(A_0) = U_n \setminus \bar{V}_n.$$

On pose également

$$\begin{aligned} U_{-1} &= f_c(U_0) = \mathbb{D}_{c,9/4}, & V_{-1} &= f_c(V_0) = \mathbb{D}_{c,1/4}, \\ A_{-1} &= U_{-1} \setminus \bar{V}_{-1} = f_c(A_0). \end{aligned}$$

Comme A_0 est symétrique on a $A_0 = f_c^{-1}(A_{-1})$.

On a $\bar{V}_{-1} \subset V_0$ et $\bar{U}_0 \subset U_{-1}$, d'où $\bar{A}_0 \subset A_{-1}$ et $\bar{A}_n \subset A_{n-1}$ pour tout n . On voit par récurrence (*) que, pour tout n , A_n est limité par deux courbes simples \mathbb{R} -analytiques Γ_n^+ et Γ_n^- entourant 0 et c , avec Γ_n^+ bord de U_n et Γ_n^- bord de V_n .

On a $|f'_c| < 1$ sur V_0 , et sur \bar{V}_{-1} le module $|f'_c|$ est borné par une constante < 1 . Il en résulte (*) que pour tout $z \in V_{-1}$ l'orbite de z tend vers α . Cela a encore lieu pour tout $z \in V_\infty = \bigcup V_n$, puisque pour un tel z l'orbite finit par entrer dans V_{-1} . Réciproquement si l'orbite (z_n) de z tend vers α on a $z_n \in V_0$ donc $z \in V_n$ pour un certain n , donc V_∞ est exactement l'ensemble des points dont l'orbite tend vers α : c'est le *bassin d'attraction* de α .

1.2. Construction du lacet γ . On construit par récurrence une suite de lacets (γ_n) de β à β dans A_0 (en fait γ_n est dans A_n). Par un lacet γ nous entendons une application continue de \mathbb{T} dans \mathbb{C} , ou ce qui revient au même de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} avec $\gamma(0) = \gamma(1)$.

On pose $\gamma_0(t) = e^{2i\pi t} \cdot \beta$. On définit $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow A_0$ par récurrence par

- $\gamma_{n+1}(t) \in f_c^{-1}(\gamma_n(2t))$,
- γ_{n+1} continue,
- $\gamma_{n+1}(0) = \beta$.

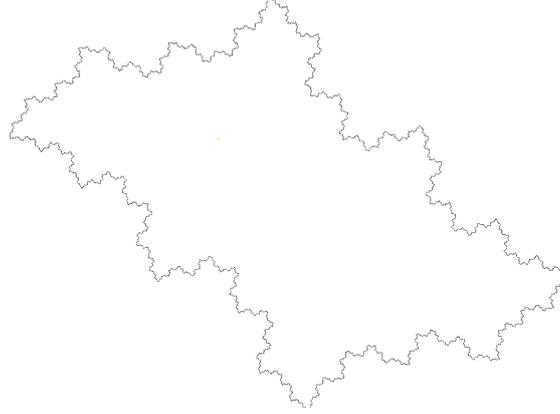


FIGURE 2. La courbe de Julia (image de Dan Sorensen)

On voit par récurrence (*) que, pour tout n , on a $\gamma_n(1) = \beta$ et γ_n fait une fois le tour de 0 et de c . L'image de γ_n est contenue dans A_n .

Lemme. *La suite d'applications (γ_n) est uniformément convergente sur $[0, 1]$.*

Démonstration. Pour z et z' dans A_n , définissons $d_{A_n}(z, z')$ comme la longueur minimum d'un chemin dérivable de z à z' dans A_n : c'est donc $|z' - z|$ si le segment $[z, z']$ est contenu dans A_n , et en tous cas on a $|z - z'| \leq d_{A_n}(z, z')$.

On a $|f'_c(z)| > 1$ pour $z \in A_0$, et $\lambda = (\inf_{z \in A_1} |f'_c(z)|)^{-1} < 1$. Tout chemin η de longueur ℓ dans A_0 admet deux relèvements η' et η'' dans A_1 , de même longueur $\leq \lambda\ell$.

On peut construire (*) une application continue $H : [0, 1]^2 \rightarrow A_0$ telle que

$$\begin{aligned} H(0, s) &= H(1, s) = \beta, \\ H(1, 0) &= \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t). \end{aligned}$$

Notons μ la borne supérieure des longueurs des chemins $\eta_t : s \mapsto H(t, s)$ de $\gamma_0(t)$ à $\gamma_1(t)$. On construit par récurrence pour tout t un chemin $\eta_{n,t}$ de $\gamma_n(t)$ à $\gamma_{n+1}(t)$ dans A_0 : ce chemin est un relèvement de $\eta_{(n-1),2t}$, et sa longueur est $\leq \lambda^n \mu$. Par suite, pour tout t et tout n ,

on a

$$\|\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)\| \leq d_{A_0}(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)) \leq \lambda^n \mu.$$

Il en résulte que la suite de lacets (γ_n) est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur $[0, 1]$. \square

On note γ la limite des γ_n . C'est un lacet continu, et la relation

$$f(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(2t)$$

donne par passage à la limite $f(\gamma(t)) = \gamma(2t)$.

1.3. Injectivité de γ . On va construire par récurrence une suite d'applications $\varphi_n : \overline{A_n} \rightarrow \mathbb{T}$. On définit $\varphi_0 : \overline{A_0} \rightarrow \mathbb{T}$ par

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \text{Arg}(z/\beta).$$

Quand z décrit un lacet dans $\overline{A_1}$ qui fait un tour autour de 0, le point $f(z)$ fait deux tours dans $\overline{A_0}$ autour de c et donc aussi de 0, et un relèvement de $\varphi_0(f(z))$ dans \mathbb{R} augmente de 2. On peut donc (*) définir $\varphi_1 : \overline{A_1} \rightarrow \mathbb{R}$ par

- $\varphi_1(z) \in \mathbf{q}^{-1}(\varphi_0(f(z)))$, où $\mathbf{q} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ est l'application $t \mapsto 2t$,
- φ_1 continue,
- $\varphi_1(\beta) = 0$.

Quand z parcourt un lacet dans $\overline{A_1}$, un représentant de $\varphi_1(z) - \varphi_0(z)$ dans \mathbb{R} revient inchangé. Autrement dit l'application $\varphi_1 - \varphi_0 : \overline{A_1} \rightarrow \mathbb{T}$ admet un relèvement continu $\delta : \overline{A_1} \rightarrow \mathbb{R}$.

On peut définir par récurrence $\varphi_n : \overline{A_n} \rightarrow \mathbb{T}$ par

$$\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(z) + \left[\frac{1}{2^n} \delta(f_c^n(z)) \right]$$

où $[x]$ désigne la classe de x dans \mathbb{T} . On vérifie par récurrence que

$$2\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(f_c(z)).$$

Sur $\bigcap \overline{A_n}$, la suite des φ_n converge uniformément vers une fonction continue $\varphi : \bigcap \overline{A_n} \rightarrow \mathbb{T}$ qui vérifie $\mathbf{q} \circ \varphi = \varphi \circ f_c$.

L'image J de γ est contenue dans $\bigcap A_n$, et $\varphi \circ \gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ est une application continue de degré 1 (ce qui signifie qu'elle admet un

relèvement $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $g(x+1) = g(x)+1$ commutant avec \mathbf{q} .
 En effet

$$\mathbf{q} \circ \varphi \circ \gamma = \varphi \circ f \circ \gamma = \varphi \circ \gamma \circ \mathbf{q}.$$

Comme on l'a vu dans l'exposé précédent (Th. 1, partie 3.2), ce ne peut être que l'identité.

Il en résulte que γ est injective. Comme \mathbb{T} est compact, γ est un homéomorphisme de \mathbb{T} sur son image J .

1.4. Points qui ne sont pas sur J . Posons

$$\gamma_0^-(t) = \frac{1}{2|\beta|} \gamma_0(t) \quad \text{et} \quad \gamma_0^+(t) = \frac{3}{2|\beta|} \gamma_0(t).$$

Les lacets γ_0^- et γ_0^+ paramètrent le bord intérieur Γ_0^- et le bord extérieur Γ_0^+ de A_0 . On construit comme dans la section 1.2 des lacets γ_n^- et $\gamma_n^+ : \mathbb{T} \rightarrow A_0$ qui paramètrent les bords intérieur et extérieur de A_n , avec

$$\begin{aligned} f_c \circ \gamma_{n+1}^- &= \gamma_n^- \circ \mathbf{q} \\ f_c \circ \gamma_{n+1}^+ &= \gamma_n^+ \circ \mathbf{q} \end{aligned}$$

les points de base étant obtenus en relevant le chemin radial de β à $\beta_0^- = 1/2 \cdot \beta/|\beta|$ ou à $\beta_0^+ = 3/2 \cdot \beta/|\beta|$.

Le même raisonnement que pour la démonstration du lemme montre (*) que γ_n^- et γ_n^+ convergent uniformément vers le lacet γ .

Soit z un point de $\mathbb{C} - J$. Si l'indice de γ par rapport à z est 1, pour n assez grand, l'indice de γ_n^- par rapport à z est 1 aussi. Alors $z \in V_n$, donc l'orbite de z tend vers le point fixe attractif α . Si l'indice de γ par rapport à z est 0, pour n assez grand l'indice de γ_n^+ par rapport à z est 0 aussi. Alors $z \in \mathbb{C} - U_n$, on a $f_c^n(z) \in \mathbb{C} - U_0$ et l'orbite de z tend vers ∞ . Enfin si l'indice de γ par rapport à z était un nombre ν différent de 0 et 1, il en serait de même pour γ_n^- pour n assez grand, ce qui est impossible.

On a donc fait une partition de \mathbb{C} en trois parties : la courbe J qui est un fermé, le bassin d'attraction de α et celui de ∞ qui sont des ouverts.

2. Points fixes ou périodiques à multiplicateur non réel

2.1. Points fixes, points périodiques, multiplicateur

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale. Un *point fixe* ξ pour f est un point $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $f(\xi) = \xi$. Le *multiplicateur* de ξ est alors $f'(\xi)$. On dit que ξ est *attractif* si $|f'(\xi)| < 1$, *répulsif* si $|f'(\xi)| > 1$, *indifférent* si $|f'(x)| = 1$.

Un *point périodique* de période k est un point fixe de f^k , qui n'est pas point fixe de $f^{k'}$ pour $0 < k' < k$. Quand on parle du multiplicateur d'un point périodique de période k , il s'agit de son multiplicateur pour f^k . On parlera de même de point périodique attractif, répulsif, indifférent, etc.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe telle que $f(\Gamma) \subset \Gamma$. Si Γ passe par un point périodique ξ à multiplicateur ρ non réel, la courbe Γ ne peut pas avoir de tangente en ξ . En effet, si Γ avait une tangente D en ξ , la droite D devrait être préservée par l'application tangente à f en ξ , qui est $z \mapsto \xi + \rho(z - \xi)$, ce qui est impossible pour ρ non réel (la multiplication par ρ fait tourner d'un angle égal à l'argument de ρ).

2.2. Existence d'un point sans tangente : cas c non réel.

Considérons l'application $f_c : z \mapsto z^2 + c$ avec $|c| < 1/4$. La courbe de Julia J_c passe par le point fixe β de f_c , qui a pour multiplicateur $\rho = 2\beta$.

Si c n'est pas réel, β n'est pas réel puisque $c = \beta - \beta^2$, donc ρ est non réel et J_c n'a pas de tangente en β .

Que se passe-t-il en fait ?

Ici β est un point fixe répulsif, et J_c satisfait à $f_c^{-1}(J_c) = J_c$. Soit z_0 un point de J voisin de β et définissons z_{-n} par $z_{-n-1} = f_c^{-1}(z_n)$, en utilisant la branche de f_c^{-1} qui a β pour point fixe.

Les points z_{-n} tendent vers β approximativement sur une spirale logarithmique : à chaque fois $z_n - \beta$ a une longueur divisée approximativement par le module de ρ , et son argument augmente approximativement de $(-\text{Arg } \rho)$. Cela est suffisant (*) pour affirmer que la courbe J tend vers β en spiralant : quand un point z tend vers β sur J , une détermination continue de l'argument de $z - \beta$ dans \mathbb{R} tend vers ∞ .

2.3. Cas c réel. Ce cas est beaucoup plus délicat. Le multiplicateur du point fixe β est réel.

Il y a sur J_c un cycle d'ordre 2, à savoir $\{\gamma(1/3), \gamma(2/3)\}$, où $\gamma = \gamma_c$ est l'application étudiée dans la partie 1. Mais les points $\gamma(1/3)$ et $\gamma(2/3)$ sont conjugués, et le multiplicateur de ce cycle est réel.

Il y a deux cycles d'ordre 3, à savoir

$$\{\gamma(1/7), \gamma(2/7), \gamma(4/7)\} \quad \text{et} \quad \{\gamma(3/7), \gamma(5/7), \gamma(6/7)\}.$$

Ces deux cycles sont conjugués l'un de l'autre (conjugaison complexe), leurs multiplicateurs ρ' , ρ'' sont conjugués.

Proposition 1. *Pour $c \in]-1/4, 1/4[- \{0\}$, les multiplicateurs ρ' et ρ'' sont distincts, donc non réels.*

Nous proposerons pour cette proposition une démonstration algébrique assez savante (!!). Il se peut qu'on puisse en trouver de plus simples.

Démonstration. On fait varier c dans \mathbb{C} tout entier. La condition pour que z soit un point périodique de période divisant 3 s'écrit

$$f_c^3(z) - z = 0.$$

La fonction $(c, z) \mapsto f_c^3(z) - z$ est un polynôme à 2 variables, de degré 8 en z . Il est divisible par $f_c(z) - z$, qui est l'équation des points fixes.

En divisant, on obtient un polynôme $E(c, z)$ qui est de degré 6 en z , qui s'écrit sous la forme

$$z^6 + e_5(c)z^5 + \cdots + e_1(c)z + e_0(c)$$

où les e_i sont des polynômes en c . Pour chaque c , il a 6 racines (éventuellement confondues) $\xi_1^{(c)}, \dots, \xi_6^{(c)}$, mais on ne peut pas choisir $\xi_1(c)$ par exemple dépendant continûment de c . Les points $\xi_i(c)$ forment, s'ils sont tous distincts, deux cycles d'ordre 3, notons ρ' et ρ'' leurs multiplicateurs.

Lemme 1. *La somme $s_1(c) = \rho' + \rho''$ et le produit $s_0(c) = \rho'\rho''$ sont des polynômes en c .*

Démonstration. Considérons pour chaque c le polynôme

$$H(c, z) = z^6 + h_5(c)z^5 + \cdots + h_1(c)z + h_0(c)$$

dont les racines sont les multiplicateurs

$$\rho_i(c) = 8\xi_i(c) \cdot f_c(\xi_i(c)) \cdot f_c^2(\xi_i(c)).$$

Les coefficients $h_k(c)$ sont donnés par les fonctions symétriques élémentaires des $\rho_i(c)$, ils s'expriment comme polynômes symétriques en les $\xi_i(c)$, donc comme polynômes en $e_0(c), \dots, e_5(c)$, et finalement comme polynômes en c .

Mais les trois ξ_i d'un même cycle donnent le même ρ , qui est racine triple de $z \mapsto H(c, z)$. On a donc

$$H(c, z) = (z^2 - s_1(c)z + s_0(c))^3.$$

Ceci donne en particulier

$$h_5(c) = -6s_1(c)$$

$$h_4(c) = 6s_0(c) - 15s_1(c).$$

Comme h_4 et h_5 sont polynomiales en c , il en est de même de s_1 et s_0 . \square

Lemme 2. *Le polynôme s_0 est de degré 3 en c , et s_1 est de degré ≤ 1 .*

Considérons pour chaque c l'ensemble K_c des z tels que $f_c^n(z)$ ne tende pas vers ∞ .

Sous-lemme. *Pour $|c| \geq 10$, l'ensemble K_c est contenu dans l'anneau*

$$\mathbb{D}_{2\sqrt{|c|}} - \mathbb{D}_{1/2\sqrt{|c|}}.$$

Démonstration. Pour $|c| \geq 2$ et $|z| > 2\sqrt{|c|}$ on a

$$|z^2| > 2\sqrt{|c|}, \quad |c| < \frac{1}{2}\sqrt{|c|} \cdot |z|$$

d'où

$$|z^2 + c| \geq \frac{3}{2}\sqrt{|c|}|z| \geq 3|z|.$$

Par suite l'orbite (z_n) de z reste dans $\mathbb{C} - \mathbb{D}_{2\sqrt{|c|}}$, et satisfait

$$|z_{n+1}| \geq 3|z_n|.$$

Par suite $K_c \subset \mathbb{D}_{2\sqrt{|c|}}$.

Si $|z| < 1/2 \cdot \sqrt{|c|}$, on a $|z^2 + c| \geq 3/4 \cdot |c|$ et $3/4 \cdot |c| > 2\sqrt{|c|}$ si $|c| \geq 10$, d'où $z \notin K_c$. \square

Démonstration du lemme 2. Tout point périodique de f_c est dans K_c . Pour $|c| \geq 10$, les multiplicateurs

$$\rho' = 8\xi_1\xi_2\xi_3 \quad \text{et} \quad \rho'' = 8\xi_4\xi_5\xi_6$$

(en choisissant bien les indexations) vérifient donc

$$|c|^{3/2} \leq |\rho| \leq 64|c|^{3/2}.$$

et on a

$$\begin{aligned} |c|^3 &\leq |s_0| \leq 2^{12}|c|^3 \\ |s_1| &\leq 128|c|^{3/2}. \end{aligned}$$

Comme s_1 et s_0 sont des polynômes, le lemme 2 en résulte. \square

Démonstration de la proposition. Il faut montrer que le discriminant $\Delta(c) = s_1(c)^2 - 4s_0(c)$ est < 0 pour $c \in]-1/4, 1/4[-\{0\}$.

On sait déjà que ρ' et ρ'' sont conjugués, donc que $\Delta(c) \leq 0$ pour $c \in]-1/4, 1/4[$. Pour $c = 0$, on a $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$,

$$\gamma(1/7) \cdot \gamma(2/7) \cdot \gamma(4/7) = 1, \quad \rho' = \rho'' = 8, \quad \Delta(0) = 0.$$

Mais Δ est un polynôme de degré 3 en c . La racine en 0 est forcément double puisque $\Delta(c) \leq 0$ pour c voisin de 0. Il ne peut y avoir une autre racine dans l'intervalle $] - 1/4, 1/4[$ car elle serait simple et entraînerait un changement de signe. \square

Remarque. La troisième racine de Δ est en $-7/4$. Pour cette valeur de c , le polynôme $z \mapsto E(c, z)$ a 3 racines doubles ξ_1, ξ_2, ξ_3 , avec

$$f_c(\xi_1) = \xi_2, \quad f_c(\xi_2) = \xi_3, \quad f_c(\xi_3) = \xi_1.$$

2.4. Densité des points sans tangente. Soient z un point de J_c et $z' \in f_c^{-1}(z)$. Alors $z' \in J_c$, et si J_c n'a pas de tangente en z elle n'en a pas non plus en z' . Par récurrence, J_c n'a alors de tangente en aucun point de $\bigcup f_c^{-n}(z)$.

Lemme. Pour tout $z \in J_c$, l'ensemble $\bigcup f_c^{-n}(z)$ est dense dans J_c .

Démonstration. Comme γ est un homéomorphisme de \mathbb{T} sur J_c qui conjugue q à f_c , il suffit de montrer que, pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'ensemble $\bigcup q^{-n}(t)$ est dense dans $\mathbb{T}(\ast)$. \square

Nous avons montré :

Proposition 2. *Si J_c possède un point où elle n'a pas de tangente, l'ensemble des points où elle n'a pas de tangente est dense dans J_c .*

Cela a lieu en particulier pour tout $c \in \mathbb{D}_{1/4} - \{0\}$.

3. Distorsion bornée

3.1. Introduction, fonctions holomorphes. Dans cette partie nous indiquons comment on démontre le théorème 2. Nous utiliserons pour cela un théorème de distorsion bornée (théorème 3 ci-dessous).

Nous aurons besoin de la notion de fonction holomorphe, mais nous évitons l'usage de l'analyse complexe. Pour nous, une fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} est une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ admettant une dérivée

$$f'(z) = \lim_{z' \rightarrow z, z' \neq z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

continue. Nous n'aurons pas besoin de l'équivalence avec d'autres définitions. Nous n'utiliserons pas le fait qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe, mais seulement le fait, beaucoup plus élémentaire, que si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes sur U convergeant uniformément vers f et si f'_n converge uniformément vers g , alors f est holomorphe et $f' = g$ (en effet

$$f(z_1) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z_1} g(z) dz$$

s'obtient par passage à la limite).

Nous utiliserons le théorème d'Ascoli (voir page suivante pour la définition de diam^*) : Soient U un ouvert connexe vérifiant $\text{diam}^*(U) < \infty$ et (f_n) une suite de fonctions sur U , lipschitziennes avec une constante M indépendante de n . On suppose qu'il existe un point $x_0 \in U$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge. Alors on peut extraire de la suite (f_n) une suite convergeant uniformément sur U .

3.2. Distorsion. Soient U et V deux ouverts connexes de \mathbb{C} , et f un homéomorphisme holomorphe de U sur V , c'est-à-dire admettant une dérivée $f'(z) \in \mathbb{C}$ pour tout $z \in U$ dépendant continûment de z (par exemple f peut être induite par un polynôme). Si f' est constante sur U , f est affine, c'est-à-dire induite par une transformation $z \mapsto az + b$.

Définition. On appelle distorsion de f sur U et on note $\text{dist}_U(f)$ la quantité

$$\sup_{z_0, z_1 \in U} \left\| \log \frac{f'(z_1)}{f'(z_0)} \right\|.$$

Remarques

(1) Pour choisir la détermination du \log on prend un chemin de z_0 à z_1 , et on suit, pour z parcourant ce chemin, la détermination de $\log(f'(z)/f'(z_0))$ qui prend la valeur 0 pour $z = z_0$.

(2) La définition fait intervenir le module du \log et non le \log du module. Cela permet de prendre en compte dans la distorsion le fait que f courbe les segments de droite.

Propriétés

- On a $\text{dist}_V(f^{-1}) = \text{dist}_U(f)$.
- Si $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ sont des homéomorphismes holomorphes, on a $\text{dist}_U(g \circ f) \leq \text{dist}_U(f) + \text{dist}_V(g)$.
- Pour z_0 et z_1 dans U , on note $d_U(z_0, z_1)$ la longueur minimum d'un chemin de z_0 à z_1 dans U , et on définit le *diamètre interne* $\text{diam}^*(U)$ comme la borne supérieure de $d_U(z_0, z_1)$ quand z_0 et z_1 varient dans U . Si U est convexe, le diamètre interne de U coïncide avec son diamètre au sens ordinaire. On a

$$\text{dist}_U(f) \leq \text{diam}^*(U) \cdot \sup_U \|f''/f'\|.$$

En effet $(f'(z_1)/f'(z_0))$ est l'intégrale curviligne $\int_{z_0}^{z_1} f''(z)/f'(z) dz$ sur un chemin de z_0 à z_1 .

3.3. Majoration de la distorsion. Revenons à la situation qui nous intéresse, avec les notations des sections 1.1 et 1.2. En particulier

$$\lambda = \left(\inf_{z \in A_1} |f'_c(z)| \right)^{-1} < 1.$$

Pour tout ouvert connexe $W \subset A_0$ de diamètre < 1 , l'image réciproque $f_c^{-1}(W)$ est réunion de deux ouverts W' et W'' contenus dans A_1 , l'application f_c induisant un homéomorphisme de chacun d'eux sur W ; on a (*)

$$\text{diam}^* W' = \text{diam}^* W'' \leq \lambda \text{diam}^* W.$$

Soient z_0 un point de A_0 et n un entier tel que $z_i = f_c^i(z)$ appartienne à A_0 pour $i \leq n$. Choisissons $\rho > 0$ tel que le disque $W_0 = \mathbb{D}_{z_n, \rho}$ soit contenu dans A_0 , et définissons W_i pour $1 \leq i \leq n$ en prenant pour W_i la composante connexe de $f_c^{-1}W_{i-1}$ qui contient z_{n-i} . L'application f_c induit pour $1 \leq i \leq n$ un homéomorphisme holomorphe de W_i sur W_{i-1} , et f_c^n induit un homéomorphisme holomorphe de $\Omega = W_n$ sur W_0 .

On a $\text{diam}^* W_i \leq 2\rho\lambda^i$. Sur A_0 on a $|f'_c| \geq 1$ et $f''_c = 2$, d'où $\|f''_c/f'_c\| \leq 2$. Par suite $\text{dist}_{W_i}(f_c) \leq 4\rho\lambda^i$ et

$$\text{dist}_\Omega(f_c^n) \leq \sum_{i=1}^n \text{dist}_{W_i}(f_c) \leq 4\rho \sum_{i=1}^n \lambda^i \leq 4\rho \sum_1^\infty \lambda^i = \frac{4\rho\lambda}{1-\lambda}.$$

Cette inégalité montre que, pour l'application $f_c^{-n} : W_0 \rightarrow \Omega$, on a que $\log((f_c^{-n})')$ est lipschitzienne de rapport $2\lambda/(1-\lambda)$. En effet, pour w', w'' dans W_0 , on peut considérer $w = (w' + w'')/2$, $W'_0 = \mathbb{D}_{w, \rho'}$ où $\rho' = (1 + \varepsilon)|w' - w''|/2$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et définir W'_i pour $i \leq n$ par $W'_i = W_i \cap f_c^{-1}W'_{i-1}$.

Nous avons obtenu le résultat suivant, qui est l'application à notre situation d'un théorème plus général de distorsion bornée :

Théorème 3. *La valeur de c étant fixée dans $\mathbb{D}_{1/4}$, il existe un $\rho_0 > 0$ et un $M < \infty$ tels que, pour tout $z \in J_c$, tout n et tout ρ tel que $0 < \rho \leq \rho_0$, il existe un voisinage Ω de z dans \mathbb{C} tel que f_c^n induise un homéomorphisme holomorphe de Ω sur $\mathbb{D}_{f_c^n(z), \rho}$ avec*

$$\text{dist}_\Omega(f_c^n) \leq M\rho.$$

L'application $f_c^{-n} : \mathbb{D}_{f_c^n(z), \rho} \rightarrow \Omega$ satisfait la propriété suivante : $\log((f_c^{-n})')$ est lipschitzienne de rapport $M/2$.

Ceci s'obtient en prenant pour ρ_0 la distance de J_c au bord de A_0 , et $M = 4\lambda/(1 - \lambda)$. L'intérêt du théorème réside que ces valeurs sont indépendantes de $z \in J_c$ et surtout de n .

3.4. Contradiction en supposant l'existence d'une tangente

Soient $c \in \mathbb{D}_{1/4}$ et $z_0 \in J_c$. Posons $z_n = f_c^n(z_0)$ et soit (n_k) une suite d'entiers telle que la suite extraite (z_{n_k}) converge vers un point w . Soient M et ρ_0 satisfaisant aux conditions du théorème 3. Pour tout k il existe un voisinage Ω_k de z_0 tel que $f_c^{n_k}$ induise un homéomorphisme holomorphe de Ω_k sur $\mathbb{D}_{z_{n_k}, \rho_0}$.

Choisissons $\rho < \rho_0$. Le disque $\mathbb{D}_{w, \rho}$ est contenu dans $\mathbb{D}_{z_{n_k}, \rho_0}$ pour k assez grand ; considérons

$$f_c^{-n_k} : \mathbb{D}_{w, \rho} \longrightarrow \Omega_k \quad \text{et} \quad \varphi_k = H_k \circ f_c^{-n_k} : \mathbb{D}_{w, \rho} \longrightarrow \mathbb{C},$$

où H_k est l'homothétie de centre z_0 et de rapport $h_k = (f_c^{n_k})'(z_0)$, restreinte à Ω_k . La fonction $\log(\varphi_k')$ diffère de $\log((f_c^{-n_k})')$ par une constante, donc est lipschitzienne de rapport $M/2$ indépendant de k . On a $\varphi_k'(z_{n_k}) = 1$, donc $|\log(\varphi_k'(w))| \leq M/2|w - z_{n_k}| \rightarrow 0$. Par le théorème d'Ascoli, quitte à extraire encore une suite, $\log \varphi_k'$ tend uniformément vers une fonction lipschitzienne $g : \mathbb{D}_{w, \rho} \rightarrow \mathbb{C}$.

Alors φ_k tend uniformément vers la fonction $\phi : \mathbb{D}_{w, \rho} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\phi(w') = z_0 + \int_w^{w'} e^{g(\zeta)} d\zeta,$$

qui est holomorphe de dérivée e^g ne s'annulant en aucun point.

On a $f_c(J_c) = f_c^{-1}(J_c) = J_c$, et par suite

$$J_c \cap \mathbb{D}_{w, \rho} = \varphi_k^{-1}(\Gamma_k) \quad \text{où} \quad \Gamma_k = H_k(J_c \cap \Omega_k).$$

On a $|h_k| \geq 1/\lambda^{n_k}$, donc $|h_k|$ tend vers l'infini et Γ_k peut être considéré comme un « zoom » de J_c sur z_0 . Les fonctions φ_k sont bornées indépendamment de k , donc $\text{diam } \Omega_k \rightarrow 0$.

Quitte à extraire encore une fois une suite, on peut supposer que l'argument de h_k a une limite θ . Supposons que J_c ait en z_0 une tangente L , et soit L' la droite déduite de L par une rotation d'angle θ .

Lemme. $J_c \cap \mathbb{D}_{w, \rho} \subset \phi^{-1}(L')$.

Démonstration. Soit $w' \in J_c \cap \mathbb{D}_{w,\rho}$. Pour tout k , l'angle (mod π) de $\varphi_k(w') - z_0$ avec L' est majoré par la borne supérieure α_k pour $z' \in \Omega_k \cap J_c$ de l'angle de $z' - z_0$ avec L . Mais α_k tend vers 0 par définition des tangentes. Par suite $\phi(w') \in L'$. \square

Comme ϕ est dérivable en tout point de $\mathbb{D}_{w,\rho}$, ceci entraîne que J_c a une tangente en tout point de $J_c \cap \mathbb{D}_{w,\rho}$.

On a vu que ceci est impossible si $c \neq 0$, et cela achève la démonstration du théorème 2. \square

Adrien Douady, Département de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France