



Journées mathématiques X-UPS

Année 1991

Séries divergentes et procédés de resommation

Jean THOMANN

Procédés formels et numériques de sommation de séries solutions d'équations différentielles

Journées mathématiques X-UPS (1991), p. 111-128.

<https://doi.org/10.5802/xups.1991-03>

© Les auteurs, 1991.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

**PROCÉDÉS FORMELS ET NUMÉRIQUES
DE SOMMATION DE SÉRIES
SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**

par

Jean Thomann

Table des matières

1. Préliminaires.....	111
2. Somme d'une série convergente.....	112
3. Somme d'une série divergente.....	114
4. Un exemple particulier.....	117
5. Calculs effectifs.....	119
5.1. Décomposition spectrale formelle.....	120
5.2. Prolongement numérique de la transformée de Borel.....	121
5.3. Séries de factorielles.....	122
5.4. Approximation rationnelle directe.....	125
5.5. Conclusion.....	127
Références.....	127

1. Préliminaires

Une série formelle $\widehat{f}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ est définie si tous les coefficients a_j ($j \in \mathbb{N}$) peuvent être définis par un ou plusieurs algorithmes *numériques*, *formels* ou *formels-numériques* :

- *numériques* au sens où chaque a_j peut être évalué par un calcul numérique classique (par exemple une quadrature), avec nécessairement une erreur de représentation.

Publication originale dans Journées X-UPS 1991. Séries divergentes et procédés de resommation. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1991.

- *formels* au sens où, par exemple :

$$(7+2j)(5+2j)a_j + 2(7+2j)a_{j+1} - (4+2j)a_{j+2} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

et où nous connaissons les conditions initiales : $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$.

Dans ce cas, les a_j sont solutions d'une équation de récurrence avec des coefficients polynomiaux. Ces polynômes ont des coefficients qui appartiennent à \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou qui peuvent être des nombres algébriques (par exemple i , $\sqrt{2}$, \dots , ou beaucoup plus compliqués).

Si les valeurs initiales appartiennent à ces ensembles, nous pouvons calculer *exactement* tous les a_j (même si leur représentation est symbolique pour les nombres algébriques).

Ces définitions sont d'une importance primordiale parce que les valeurs de a_j , si elles sont calculées par des méthodes numériques faisant appel à l'arithmétique de la virgule flottante, peuvent dévier très rapidement de leurs vraies valeurs, pour des raisons d'instabilité bien connues notamment dans les récurrences à 3 termes.

- *formels-numériques*, par exemple, au cas où les conditions initiales sont exprimées par des nombres en virgule flottante et où l'équation de récurrence est *formelle* au sens ci-dessus.

Cette distinction ou synthèse *formelle-numérique* sera utile dans tout calcul concernant les équations différentielles, les solutions sous formes de séries, d'approximants rationnels, etc.

La règle sera : utiliser les algorithmes formels, donc exacts, le plus longtemps possible, puis passer à un calcul numérique *contrôlé*.

2. Somme d'une série convergente

Connaissant une série formelle $\widehat{f}(x)$, le but est de lui associer une fonction *unique* $f(x)$, somme de la série formelle en x .

Si tout va bien, nous pouvons utiliser directement les critères de convergence (Cauchy, d'Alembert, etc.) et constater la convergence d'une série dans un disque de rayon non nul, comme dans le cas trivial :

$$\widehat{f}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

convergente dans un disque de rayon < 1 .

Mais aussitôt, on aimerait connaître la somme $f(x)$ dans le domaine le plus grand possible du plan complexe ; d'où les méthodes de prolongement analytique bien connues (Weierstrass, Borel, Mittag-Leffler, approximants rationnels, etc.).

Dans notre cas simple, la fonction rationnelle $1/(1+x)$ nous donne immédiatement une fonction holomorphe dans tout le plan complexe privé du point singulier -1 .

D'où l'idée d'effectuer un prolongement analytique par des fonctions rationnelles avec l'aide d'algorithmes qui sont plus faciles à mettre en oeuvre que les autres méthodes mentionnées et qui peuvent être entièrement formels.

La série formelle

$$\widehat{f}(x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2 - \frac{267}{128}x^3 + \frac{7563}{2048}x^4 - \frac{54789}{8192}x^5 + \dots$$

semble plus difficile à analyser, à sommer et à prolonger que la précédente.

Par contre, si nous savons que cette série est solution formelle de l'équation fonctionnelle :

$$(1 + 2x)f^2 - 1 - \frac{1}{2}x = 0,$$

nous pouvons constater qu'une singularité se situe en $-1/2$, et que \widehat{f} est convergent dans un disque de rayon $< 1/2$

D'autre part, l'approximant de Padé $[1/1] : \frac{1+7/8x}{1+13/8x}$ (approximant rationnel admettant une série de Taylor coïncidant avec \widehat{f} jusqu'à l'ordre $1+1=2$ inclus et calculé directement à partir de 3 termes de la série \widehat{f}) représente la somme $f(x) = \sqrt{\frac{1+1/2x}{1+2x}}$ avec une précision déjà remarquable, de sorte que $f(1) = 0.707\dots$ et $[1/1](1) = 0.714\dots$, ainsi que $f(\infty) = 0.5$ et $[1/1](\infty) = 0.54$. (Voir [1].)

Dans notre cas simple, il est facile de voir que :

$$\widehat{f}(x) = 1 - x + x^2 \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

est une série formelle, solution formelle de l'équation différentielle :

$$(x + 1)y' + y = 0.$$

Cette série formelle a été obtenue en reportant la série

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n + \dots$$

ainsi que sa dérivée formelle dans l'équation différentielle et en identifiant les coefficients a_j des mêmes termes en x^j .

D'où une équation de récurrence :

$$a_{j+1} + a_j = 0 \quad (j = 0, 1, 2\dots)$$

associée à l'équation différentielle génératrice et permettant le calcul exact de tous les a_j à partir de $a_0 = 1$.

Cette dualité *équation différentielle-équation de récurrence* (utilisée par Frobenius et Pincherle) a été développée et est un élément de base des logiciels de calcul formel des solutions d'équations différentielles linéaires (par exemple le code DESIR développé au LMC de Grenoble [3, 11]).

Il est important de remarquer que nous pouvons lire la singularité -1 sur l'équation différentielle. En effet, l'équation caractéristique $x + 1 = 0$ a comme racine -1 .

3. Somme d'une série divergente

Nous pouvons utiliser le même procédé sur l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x$$

pour trouver la série formelle solution :

$$x \widehat{f}(x) = x[1 - 1!x + 2!x^2 + \dots + (-1)^n n!x^n + \dots].$$

Cette fois-ci, la série $\widehat{f}(x)$ est divergente ; ce qui pouvait être prévu en regardant l'équation différentielle qui présente une singularité irrégulière à l'origine.

La théorie des développements asymptotiques Gevrey, solutions d'équations différentielles linéaires [5], nous permet de dire qu'à l'intérieur d'un secteur *assez petit* V (d'ouverture $< \pi/k$), la sommation au *plus petit terme* de $\widehat{f}(x)$ donne une approximation d'une solution $f(x)$ holomorphe dans V telle que :

$$|f(x) - \sum_{p < L_V |x|^{-k}} a_p x^p| \leq C_V \exp(-K_V |x|^{-k}),$$

où L_V , C_V et K_V sont des constantes liées à V . k vaut 1 dans notre cas particulier.

Cette somme tronquée donne une solution à une fonction exponentiellement décroissante près.

Dans les cas usuels, notamment les séries solutions d'équations de fonctions spéciales, ce procédé revient à tronquer la série juste avant le plus petit terme $|a_n x^n|$.

C'est ainsi qu'on trouve la *somme* de la série, c'est à dire une solution de l'équation différentielle : par exemple en 0.1 : $f(0.1) = 0.91528$ (la valeur exacte de cette fonction connue étant 0.91563).

Au sens de l'analyse numérique classique, ce procédé permet d'avoir une très bonne approximation dans un petit voisinage de O , puisque l'erreur décroît exponentiellement si on tend vers O sur n'importe quel rayon issu de l'origine.

Si on entreprend une analyse plus fine, on peut dans certains cas représenter la solution d'une équation différentielle linéaire, dont le développement de Taylor est une série formelle $\hat{f}(x)$, sous la forme :

$$f(x) = \frac{k}{x^k} \int_d \varphi(t) \exp(-t^k/x^k), t^{k-1} dt$$

où k est un entier positif.

$\varphi(t)$ est le prolongement analytique sur une droite d issue de 0 de la somme de la série formelle

$$\hat{\varphi}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(1 + n/k)} t^n$$

convergente dans un disque de rayon non nul.

Cette représentation est vraie si $\hat{f}(x)$ est *k-sommable* d'après la théorie développée par J.-P. Ramis [5].

Si k est entier (sinon on peut s'y ramener par une ramification, si l'équation est à coefficients polynomiaux), cette intégrale existe dans toute direction sauf un nombre fini de *directions singulières* et $f(x)$ est l'unique solution de l'équation différentielle dans un secteur d'ouverture $> \pi/k$, dont le développement de Taylor est $\hat{f}(x)$.

Toutes les séries solutions d'équations différentielles du premier et du second ordre (fonctions spéciales, etc.) homogènes sont *k-sommables* et bien d'autres encore...

La valeur de k peut être lue directement à partir des coefficients de l'équation différentielle avec l'aide du polygone de Newton.

Définition (polygone N-R-M (Newton, Ramis, Malgrange) en $x = 0$)

Considérons un opérateur différentiel

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} x^j \left(\frac{d}{dx} \right)^i.$$

Si $Q^+(u, v) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq u, y \geq v\}$, est le second quadrant de \mathbb{R}^2 translaté en (u, v) , on définit :

$$M^+(L) = \bigcup_{p_{i,j} \neq 0} Q^+(i, j - i).$$

Le *polygone* N-R-M de L est l'enveloppe convexe inférieure de $M^+(L)$.

Toutes ses pentes finies sont rationnelles. Par exemple, le polygone N-R-M de l'équation :

$$4x^5 y'' + 2x^2 y' + y = 0$$

est représenté sur la figure 1.

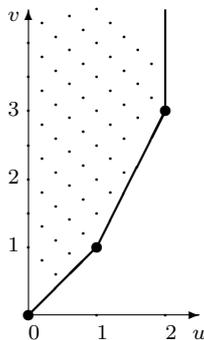


FIGURE 1.

Pour l'équation d'Euler $x^2 y' + y = x$, la série $\widehat{f}(x)$ est 1-sommable parce que le polygone de Newton n'a qu'une seule pente égale à 1.

Le fait que la pente soit différente de 0 nous indique aussi que la singularité à l'origine est *irrégulière* et que par conséquent la série est en général divergente.

La série $\widehat{f}(x)$ a une somme unique définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt$$

où d est toute direction issue de O sauf la direction \mathbb{R}^- .

Pourquoi la direction singulière est-elle \mathbb{R}^- ? Si nous calculons formellement $\widehat{\varphi}(t)$, définie précédemment et appelée transformée formelle de Borel, nous obtenons :

$$1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n \dots = \frac{1}{1+t}$$

et nous connaissons son prolongement sur toute droite d , sauf celle qui correspond à \mathbb{R}^- puisque $1/(1+t)$ a un pôle en -1 .

Si d prend toutes les directions non singulières, les fonctions définies par l'intégrale et holomorphes dans un demi-plan bissecté par d , se recollent pour donner une seule fonction $f(x)$ définie dans un secteur d'ouverture 3π .

Dans le demi-plan bissecté par \mathbb{R}^- , nous voyons que nous obtenons deux déterminations de $f(x)$ en faisant tourner d depuis la position où d forme un angle $-\pi + \varepsilon$ avec \mathbb{R}^+ jusqu'à la position où d forme un angle $+\pi - \varepsilon$ avec \mathbb{R}^+ ; et par un calcul de résidu on trouve que la différence des deux déterminations est $2i\pi \exp(1/x)$.

Nous voyons donc que la notion de disque de convergence est remplacée par la notion de secteurs de convergence.

La transformée de Borel formelle permet de *transposer* l'étude de $f(x)$ dans un nouveau plan complexe où les séries $\widehat{\varphi}(t)$ sont cette fois-ci convergentes comme précédemment avec les mêmes problèmes de prolongement analytique.

Dans cette transposition il y a correspondance entre *directions singulières* de $\widehat{f}(x)$ et *directions sur lesquelles se trouvent les singularités* de $\varphi(t)$.

4. Un exemple particulier

Nous allons illustrer cette démarche sur un exemple un peu plus complexe.

La série formelle

$$\widehat{g}(x) = 1 + 5x + 105/4x^2 + 525/4x^3 \dots$$

est l'une des 2 solutions de l'équation différentielle :

$$4x^3 y'' + 2(14x^2 + 2x - 1)y' + 5(7x + 2)y = 0.$$

Le polygone de Newton de cette équation, représenté sur la figure 2, est composé d'un segment de pente nulle et d'un segment de pente 2. Nous pouvons en déduire que la série formelle $\widehat{g}(x)$, correspondant à la pente nulle, est *2-sommable*.

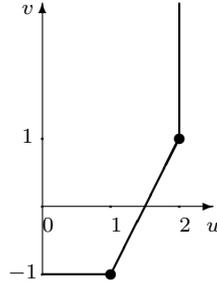


FIGURE 2.

Les coefficients de la série formelle sont obtenus par l'équation de récurrence associée à l'équation différentielle génératrice :

$$(7 + 2j)(5 + 2j)a_j + 2(7 + 2j)a_{j+1} - (4 + 2j)a_{j+2} = 0 \quad (j = 0, 1, 2 \dots),$$

où $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$.

Si nous scindons $\widehat{g}(x)$ en 2 sous-séries : $\widehat{\psi}_1(u) + x\widehat{\psi}_2(u)$, où $u = x^2$, $\psi_1(u)$ et $\psi_2(u)$ sont chacune *1-sommable*.

Les coefficients des transformées de Borel formelles : $\widehat{\varphi}_1(t)$ et $\widehat{\varphi}_2(t)$ seront solutions respectivement des équations de récurrence :

$$\begin{aligned} (5 + 4j)(7 + 4j)(9 + 4j)(11 + 4j)a_j \\ - 2(7 + 4j)(9 + 4j)(11 + 4j)(j + 1)a_{j+1} \\ + (6 + 4j)(8 + 4j)(j + 1)(j + 2)a_{j+2} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (7 + 4j)(9 + 4j)(11 + 4j)(13 + 4j)a_j \\ - 2(9 + 4j)(11 + 4j)(13 + 4j)(j + 1)a_{j+1} \\ + (8 + 4j)(10 + 4j)(j + 1)(j + 2)a_{j+2} = 0. \end{aligned}$$

Si nous calculons formellement l'équation différentielle génératrice de la première équation nous trouvons :

$$16(16t^2 - 8t + 1)t^2 \frac{d^4U}{dt^4 + (3584t^2 - 1248t + 72)t \frac{d^3U}{dt^3}} + (13920t^2 - 2904t + 48) \frac{d^2U}{dt^2} + (15840t - 1386) \frac{dU}{dt} + 3465U = 0.$$

Nous savons que $\widehat{\varphi}_1(t)$ est solution de cette équation.

L'équation caractéristique : $16t^2 - 8t + 1 = (4t - 1)^2 = 0$ a une racine double en $1/4$, qui est donc la seule singularité à distance finie de l'équation différentielle, donc la seule possible à distance finie pour $\varphi_1(t)$. On peut situer de la même manière la seule singularité possible à distance finie de $\varphi_2(t)$, en $1/4$.

En analysant formellement cette équation différentielle, par exemple par le code DESIR, nous constatons que nous nous trouvons en face d'une singularité essentielle.

Nous savons donc dans quelles directions nous pouvons effectuer le prolongement analytique de $\varphi_1(t)$ afin de pouvoir calculer :

$$\psi_1(u) = \frac{1}{u} \int_d \varphi_1(t) \exp(-t/u) dt.$$

Ainsi, la direction d pourra être toute direction sauf \mathbb{R}^+ car elle contient $1/4$.

5. Calculs effectifs.

Nous pouvons donc passer au calcul effectif de ces transformées de Laplace :

$$f(x) = 1/x \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt,$$

où $\varphi(t)$ est la somme d'une série formelle $\widehat{\varphi}(t)$ convergente dans un disque de rayon non nul.

Si $\widehat{f}(x)$ est k -sommable, nous pouvons toujours, comme dans l'exemple précédent, scinder $\widehat{f}(x)$ en sous-séries 1-sommables et nous ramener à ce cas.

Rappelons que les coefficients de la série $\widehat{f}(x)$, donc de la série $\widehat{\varphi}(t)$ sont des nombres algébriques si $\widehat{f}(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, ces polynômes ayant eux-mêmes des coefficients qui sont des nombres algébriques.

Nous connaissons l'équation de récurrence exacte que vérifient les coefficients de $\widehat{\varphi}(t)$, et par conséquent l'équation différentielle que vérifie $\widehat{\varphi}(t)$. Donc ses singularités sont connues ainsi que les directions singulières correspondantes.

De plus la théorie de la *k-sommabilité* nous assure de la croissance au plus exponentielle de $\varphi(t)$ quand t tend vers l'infini dans toute direction non singulière.

5.1. Décomposition spectrale formelle. Une première méthode consiste à prolonger $\varphi(t)$ par un approximant rationnel de type Padé dans les directions non singulières.

Dans le cas où il n'y a qu'une seule direction singulière (équations différentielles homogènes du second ordre, fonctions spéciales, etc.), nous pouvons approcher $\varphi(t)$ par $P_M(t)/Q_N(t)$ où $P_M(t)$ et $Q_N(t)$ sont des polynômes respectivement de degré $M = N + j$, où $j \geq -1$, et de degré N . On choisit $Q_N(t)$ de telle sorte que les racines de $Q_N(t)$ soient situées sur la coupure T correspondant à la demi-droite issue de la singularité la plus proche de O , d'affixe a , et de direction, la direction singulière.

À la différence des approximants de Padé, pour les approximants de *type Padé*, on choisit les dénominateurs $Q_N(t)$, puis on détermine $P_M(t)$ de sorte que le développement de Taylor de $P_M(t)/Q_N(t)$ coïncide avec la série formelle jusqu'à l'ordre M inclus.

On prendra $Q_N(t) = t^N v_N(1/t)$ où v_N sera un polynôme orthogonal (Legendre, Tchebycheff) ayant ses racines situées sur le segment inverse de T .

Dans ce cas, il est démontré [4] que :

$$\frac{1}{x} \int_d \frac{P_M(t)}{Q_N(t)} \exp(-t/x) dt \quad \text{tend vers} \quad \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt,$$

quand N tends vers l'infini et $M = N + j$ où $j \geq -1$.

En décomposant $P_M(t)/Q_N(t)$ en éléments simples, nous obtenons une expression de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Pol}(x) + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{x} \int_d \frac{1}{t - t_i} e^{-t/x} dt \\ &= \text{Pol}(x) + \sum_{i=1}^N -\frac{A_i}{t_i} \text{EXPI}(-x/t_i). \end{aligned}$$

où $\text{Pol}(x)$ est un polynôme en x et où EXPI désigne :

$$\text{EXPI}(x) = \frac{1}{x} \int_d \frac{1}{1+t} e^{-t/x} dt,$$

qui est la solution de l'équation d'Euler.

D'ailleurs dans ce cas simple, nous avons bien exprimé directement $\varphi(t)$ par la fonction rationnelle $1/(1+t)$, qui peut être considérée comme un approximant de type Padé.

Bien plus, comme nous le verrons en 5.4, ces fonctions $\text{EXPI}(x)$ peuvent être calculées par de vrais approximants de Padé, obtenus par un algorithme purement formel. Les coefficients A_i/t_i étant des nombres algébriques, cette méthode peut donc être menée au bout par des algorithmes formels.

L'évaluation de $\psi_1(u) = \psi_1(x^2)$ pour $x = 0.15$ donne le résultat 0.622338 en utilisant cette méthode.

5.2. Prolongement numérique de la transformée de Borel

Une autre manière de concrétiser le prolongement analytique de $\varphi(t)$ est mi-formelle, mi-numérique. En effet, le calcul formel nous fournit l'équation différentielle vérifiée par

$$\varphi(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

Les conditions initiales de $\varphi(t)$ en 0 sont facilement lisibles sur la série elle-même. Cette équation différentielle est transformée en un système différentiel d'ordre 1 par un algorithme formel. À partir de ce système formel, nous pouvons générer un programme numérique classique, par exemple en Fortran ou en Pascal, qui va résoudre le système

différentiel par un sous-programme de bibliothèque de résolution par la méthode de Runge-Kutta, puis l'intégration de

$$\frac{1}{x} \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt$$

par un sous-programme de bibliothèque de quadrature optimale par la méthode de Gauss-Laguerre.

Ces méthodes numériques sont stables dans le plan complexe, sauf à proximité des singularités de $\varphi(t)$, qui sont connues.

C'est ainsi que $\psi_1(x^2)$ vaut 0.622150 au même endroit que précédemment.

5.3. Séries de factorielles. Une troisième méthode numérique particulièrement efficace consiste à transformer $\hat{f}(x)$ en série de factorielles généralisées (ou séries de *facultés* généralisées). Les *nombre de Stirling généralisés de 1^{ère} espèce* $S_t(n, k)$ sont définis par la formule de récurrence :

$$S_t(n+1, k) = S_t(n, k-1) - t_n S_t(n, k) \quad (n, k \geq 1)$$

$S_t(0, 0) = 1$, $S_t(n, 0) = 0$ si $n \neq 0$ et $S_t(n, k) = 0$ si $k \geq n+1$ où $n, k \in N$ et $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ est une suite quelconque de nombres complexes, que nous supposerons situés sur $1/d$.

Toute série formelle :

$$\hat{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

peut être transformée formellement, telle que :

$$\frac{1}{z} \hat{f}(1/z) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z+t_1) \dots (z+t_n)},$$

où

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S_t(n, k) a_k,$$

et où $z = 1/x$ ([5]).

On appellera SFG (comme série de factorielle généralisée) formelle, la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z+t_1)(z+t_2) \dots (z+t_n)}.$$

Remarque. Par récurrence, on peut construire les formules de passage entre SFG formelles, correspondant à des suites $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ différentes.

On a vu que, si une série $\widehat{f}(x)$ était 1-sommable dans une direction d , d'angle θ avec le demi-axe positif, sa somme s'exprimait par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) e^{-t/x} dt = \frac{1}{x^*} \int_0^\infty \varphi(te^{i\theta}) e^{-t/x^*} dt \quad \text{où } x^* = x e^{-i\theta}$$

ou par :

$$\frac{1}{z} \widehat{f}(1/z) = e^{i\theta} \int_0^\infty \varphi(te^{i\theta}) e^{-tz^*} dt \quad x = 1/z \quad \text{et} \quad x^* = 1/z^*$$

En situant $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sur la demi-droite de direction $-\theta$, on a l'équivalence formelle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \widehat{f}(1/z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z+t_1) \dots (z+t_n)} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}^*}{z e^{i\theta} (z e^{i\theta} + \tau_1) \dots (z e^{i\theta} + \tau_n)}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S_t(n, k) a_k, \\ b_{n+1}^* &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S_\tau(n, k) a_k e^{i(k+1)\theta}, \end{aligned}$$

et $\tau_l = t_l \exp(i\theta)$ ($l = 1, 2, \dots, n$).

Les τ_l sont alors situés sur la demi-droite \mathbb{R}^+ .

En posant :

$$u_1 = \frac{a_0}{z}, \quad u_2 = \frac{a_1}{z^2}, \dots, \quad u_m = \frac{a_{m-1}}{z^m} \quad \text{et} \quad y = z e^{i\theta},$$

il vient

$$\frac{1}{z} \widehat{f}(1/z) = \sum_{n \geq 0} v_{n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{\sum_{k=0}^n u_{k+1} y^{k+1} |S_\tau(n, k)|}{y(y + \tau_1) \dots (y + \tau_n)}.$$

L'évaluation directe des termes v_{n+1} est impossible à cause de la croissance explosive des $S_\tau(n, k)$. En utilisant la récurrence définissant les nombres de Stirling généralisés de 5.3, on peut construire un

algorithme récursif où les termes :

$$v_{n+1}^{(j)} = \frac{\tau_{n-1}v_n^{(j)} + yv_n^{(j+1)}}{y + \tau_n}$$

sont calculés par colonnes dans le tableau :

$$\begin{array}{ccccccc} v_1^{(1)} = u_1 & & & & & & \\ & v_2^{(1)} = \frac{yu_2}{y+\tau_1} & & & & & \\ v_1^{(2)} = u_2 & & v_3^{(1)} = \frac{\tau_1v_2^{(1)}+yv_2^{(2)}}{y+\tau_2} & & & & \\ & v_2^{(2)} = \frac{yu_3}{y+\tau_1} & & v_4^{(1)} = \frac{\tau_2v_3^{(1)}+yv_3^{(2)}}{y+\tau_3} & & & \\ v_1^{(3)} = u_3 & & v_3^{(2)} = \frac{\tau_1v_2^{(2)}+yv_2^{(3)}}{y+\tau_2} & & & \dots & \\ & v_2^{(3)} = \frac{yu_4}{y+\tau_1} & & & & & \\ v_1^{(4)} = u_4 & & & & & & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

Les termes diagonaux : $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}, v_{n+1}^{(1)} \dots$ sont les termes de la SFG cherchée : $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$. D'après la théorie de la k -sommabilité développée par J.-P. Ramis [5], reprenant un résultat de Watson, nous avons correspondance entre les résultats suivants :

- d'une part :

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_d \varphi(t) e^{-t/x} dt$$

- d'autre part :

$$\frac{1}{z} f(1/z) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{z(z+t_1) \cdots (z+t_n)},$$

où les coefficients b_{n+1} sont définis précédemment, et où la SFG est uniformément convergente dans le demi-plan $\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) \geq \lambda$ ($\lambda > 0$), à condition que :

$$t_\ell = \ell\omega \exp(-i\theta) \quad (\ell = 1, \dots, n),$$

où $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, est tel que $\omega > \omega_0 > 0$. Ici, ω_0 est la valeur critique liée au type de \hat{f} et aux singularités de φ .

La valeur de ω_0 , qui dépend de θ , peut s'évaluer simplement à partir des situations des singularités de φ dans le plan complexe.

La démonstration, d'après Watson, Nörlund, Nevanlinna, de la convergence uniforme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}^*}{z^*(z^* + \omega) \dots (z^* + n\omega)} \quad \text{où } z^* = z \exp(i\theta)$$

utilise la transformation conforme $s = \exp(-\omega t)$.

L'image réciproque du cercle $\{|1 - s| = 1\}$ est la courbe C constituée des $t = \omega(u + iv)$, où : $u = -\log(2 \cos(v))$, $v \in]-\pi/2, \pi/2[$. L'étude de $\varphi(te^{i\theta})$ dans l'image réciproque U du disque ouvert $\{|1 - s| < 1\}$ est ainsi remplacée par l'étude du développement de Taylor de $\varphi(-\log(s)e^{i\theta}/\omega)$ au centre de ce disque. Ce changement de variable permet d'ailleurs d'écrire la transformée de Laplace sous forme de transformée de Mellin, puis de série de factorielle convergente.

Tout ceci dépend de la condition d'holomorphicité de $\varphi(\widehat{te^{i\theta}})$ dans U . La valeur maximale ω_0 de ω est telle que C passe par la première singularité rencontrée de $\varphi(te^{i\theta})$.

Comme nous pouvons localiser les singularités de $\varphi(t)$ dans le plan complexe, nous pouvons donc calculer facilement ω_0 par un algorithme numérique.

Remarque. Des expériences numériques montrent que la convergence de la SFG est d'autant plus rapide que ω est proche de ω_0 .

5.4. Approximation rationnelle directe. Si nous examinons les séries de factorielles généralisées, nous constatons que l'approximant de type Padé $P_n(x)/Q_n(x)$ de la série formelle $\widehat{f}(x)$, où :

$$Q_n(x) = \left(x + \frac{1}{t_1}\right) \left(x + \frac{1}{t_2}\right) \dots \left(x + \frac{1}{t_n}\right),$$

coïncide formellement avec la somme des $n + 1$ premiers termes de la SFG divisée par x (ou multipliée par $z = 1/x$).

Si $\widehat{f}(x)$ n'a qu'une direction singulière, nous pouvons démontrer que, d'une manière plus générale [10], $\frac{1}{x} \int_d \varphi(t) \exp(-t/x) dt$ où d forme avec \mathbb{R}^+ un angle θ et avec $\sum(D)$ un angle θ_s supérieur à $\pi/2$, peut être approché indéfiniment quand n tend vers l'infini, pour x fixé, par l'approximant de type Padé $P_m(x)/Q_n(x)$ de $\widehat{f}(x)$, où $m =$

$n + j$ ($j \geq 0$) et où nous avons choisi le dénominateur :

$$Q_n(x) = \left(x + \frac{1}{t_1^{(n)}}\right) \left(x + \frac{1}{t_2^{(n)}}\right) \cdots \left(x + \frac{1}{t_n^{(n)}}\right).$$

Les $t_j^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) sont cette fois dépendants de n :

$$t_j^{(n)} = A\tau_j^{(n)} \exp(-i\theta);$$

les $\tau_j^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) sont les racines du polynôme de Laguerre $L_n(x)$ de degré n et A est un scalaire $> 1/2|a \cos(\theta_s)|$, a étant la singularité de $\varphi(t)$ la plus proche de O .

En pratique, cette approximation rationnelle revient à accumuler, de plus en plus près de l'origine, les racines $-1/t_j$ de Q_n sur $-d$, d'une part si n augmente, mais aussi si d tend vers les positions limites, où d forme un angle de valeur absolue $\pi/2$ avec la direction singulière. Entre ces positions d peut prendre toutes les directions dans le demi-plan complémentaire au demi-plan bissecté par cette direction singulière.

Autrement dit, nous pouvons encore construire une approximation rationnelle de $f(x)$, qui réalise une généralisation du prolongement analytique, en *simulant* la direction singulière par une accumulation de pôles dans cette direction.

L'évaluation de $\psi_1(x^2)$ en $x = 0.15$ donne cette fois-ci : 0.622166.

Soit la fonctionnelle linéaire c telle que :

$$c(1) = a_0, c(x) = a_1, \dots, c(x^n) = a_n \dots$$

Un choix de $v(x)$, s'il existe, tel que :

$$c(x^\ell v(x)) = 0 \quad \text{pour } \ell = 0, 1, \dots, n-1,$$

nous conduit à un choix des $t_\ell^{(n)}$ ($\ell = 1, 2, \dots, n$) du dénominateur $Q_n(x) = x^n v(1/x)$ tels que l'approximant de type Padé $P_n(x)/Q_n(x)$ devienne l'approximant de Padé tout court.

Malheureusement, dans ce cas, on ne peut plus rien conclure sur la convergence de ces approximants de Padé vers $f(x)$, sauf si la série $\widehat{f}(x)$ est du type Stieltjes.

Dans le cas de la série d'Euler $1 - 1!x + 2!x^2 \dots$, l'approximant de Padé, construit à partir du dénominateur où $v_n(x)$ est un polynôme de Laguerre, converge bien vers la somme $f(x)$ sauf si $x \in \mathbb{R}^-$.

Pour $x = 0.1$, comme dans le paragraphe 3, nous obtenons $f(0.1) = 0.91563333$ avec 8 chiffres significatifs exacts.

Dans les cas où on peut établir la convergence des approximants de Padé vers $f(x)$, on dispose ainsi d'un algorithme formel permettant de calculer cet approximant, alors qu'en 5.3 et 5.4, on dispose d'un algorithme essentiellement numérique.

5.5. Conclusion. Nous constatons que l'évaluation de la fonction $\psi_1(x^2)$ pour $x = 0.15$, par les 3 méthodes décrites, donne un résultat stable sur 3 chiffres significatifs, ce qui peut être considéré comme acceptable en tenant compte de la divergence très forte de $\hat{g}(x)$, donc de $\hat{\psi}_1(x^2)$.

D'ailleurs la seule façon de vérifier la validité des résultats est de confronter, en diverses régions du plan complexe, les valeurs obtenues par différentes méthodes.

Un logiciel complet de sommation de séries divergentes, solutions d'équations différentielles, doit être interactif, et utiliser toutes les ressources données par ces équations, pour analyser les régions de stabilité des différentes méthodes de calcul utilisées, et confronter ces méthodes par recoupement des résultats.

L'outil graphique interactif est alors indispensable et le seul moyen d'avoir une vision d'ensemble (comme dans le logiciel développé par F. Richard-Jung [9]).

Cette analyse est caractérisée par le *contrôle formel*, qui, suivant des choix prévus ou donnés interactivement, engendre les différentes parties numériques.

Références

- [1] G. A. BAKER, JR. & P. GRAVES-MORRIS – *Padé approximants*, second éd., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 59, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [2] C. BREZINSKI – *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*, Birkhäuser, 1980.

- [3] J. DELLA-DORA, C. DICRESCENZO & E. TOURNIER – « An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogenous differential equation at an irregular singular point », (J. Calmet, éd.), *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1982.
- [4] M. F. MARZIANI – « Convergence of a class of Borel-Padé-type approximants », *Il Nuovo Cimento* **99** (1987), no. 2, p. 145–154.
- [5] J.-P. RAMIS – « Les séries k -sommables et leurs applications », in *Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory (Les Houches 1979)* (D. Iagolnitzer, éd.), *Lectures Notes in Physics*, vol. 126, Springer, 1980, p. 178–199.
- [6] ———, *Théorèmes d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, vol. 48 n° 296, American Mathematical Society, Providence RI, 1984.
- [7] ———, « Phénomène de Stokes et resommation », *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **301** (1985), no. 4, p. 99–102.
- [8] J.-P. RAMIS & J. THOMANN – « Some comments about the numerical utilization of factorial series », in *Numerical methods in the study of critical phenomena* (J. Della-Dora, J. Demongeot & B. Lacolle, éd.), Springer, 1980.
- [9] F. RICHARD-JUNG – Thèse, Université de Strasbourg, 1988.
- [10] J. THOMANN – « Resommation des séries formelles solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières », *Numer. Math.* **58** (1990), p. 503–535.
- [11] E. TOURNIER – « Solutions formelles d'équations différentielles », Thèse d'état, Université de Grenoble, 1988.

Jean Thomann, Centre de Calcul du CNRS, BP20 Cro, 67037 Strasbourg Cedex, France