Journées mathématiques X-UPS

Année 1991

Séries divergentes et procédés de resommation

Michèle LODAY-RICHAUD

Séries formelles provenant de systèmes différentiels linéaires méromorphes

Journées mathématiques X-UPS (1991), p. 75-110.
https://doi.org/10.5802/xups.1991-02

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1991, p. 75–110 doi: 10.5802/xups.1991-02

SÉRIES FORMELLES PROVENANT DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES MÉROMORPHES

par

Michèle Loday-Richaud

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 1991. Séries divergentes et procédés de resommation. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1991.

Introduction

L'étude qui suit est une étude locale au voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{C}$ que, sauf précision contraire, nous placerons toujours à l'origine ($x_0 = 0$). Les systèmes différentiels considérés sont de la forme

$$[A] \qquad \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où d/dx est la dérivation usuelle par rapport à la variable complexe x, où $A(x) = [a_{(j,\ell)}(x)]_{1\leqslant j,\ell\leqslant n}$ est une matrice $n \times n$ à coefficients méromorphes en $x_0 = 0$ et où

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

est le vecteur inconnu. Ainsi le vecteur dérivée de Y s'écrit

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} dy_1/dx \\ \vdots \\ dy_n/dx \end{bmatrix}$$

Les équations différentielles considérées sont des équations différentielles linéaires analytiques en $x_0 = 0$ c'est-à-dire de la forme

$$(D) \qquad a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \cdots + a_0(x)y = 0$$

où les coefficients $a_j(x)$ sont analytiques en 0 et où $d^j y/dx^j$ désigne la dérivée $j^{ème}$ de l'inconnue y. Quitte à diviser ces équations par une puissance convenable de x nous supposerons en outre que les coefficients a_j ne s'annulent pas simultanément en 0.

Dans une première partie nous décrivons les solutions formelles en $x_0 = 0$ des systèmes différentiels. Celles-ci sont calculables par des algorithmes explicites qui reposent de façon essentielle sur la notion de polygone de Newton. Le polygone de Newton d'un *système* étant difficile à définir nous passerons ici par l'intermédiaire de polygones de Newton d'*équations différentielles* associées au système étudié. Bien que disposant d'algorithmes, les calculs sont en général longs et difficiles à mener jusqu'à leur terme. Ils contiennent entre autres la résolution d'équations algébriques quelconques. Ceci n'exclut pas le traitement à la main d'exemples « simples » mais justifie de l'utilisation d'un système de calcul formel ; les codes DESIR et DESIR2 bientôt opérationnels feront de tels calculs. Nous indiquons l'origine de chacun des facteurs des solutions formelles et succinctement comment les calculer. Nous indiquons en outre dans quels cas ces solutions contiennent des séries convergentes (cas où 0 est un point ordinaire ou singulier régulier) et dans quel cas elles peuvent contenir des séries divergentes (cas où 0 est un point singulier irrégulier).

La deuxième partie traite de la sommation de celles des séries obtenues qui sont divergentes. Une série sommable sur tout un voisinage de 0 est une série convergente par définition. Il s'agit donc de sommer ces séries divergentes sur des secteurs de sommet 0. La position de ces secteurs est à peu près indifférente mais leur ouverture est importante : sur des secteurs trop petits une telle série divergente admet une infinité de sommes possibles ; sur des secteurs trop gros elle n'en n'admet aucune. Et dans les cas compliqués dits à plusieurs niveaux il n'y a pas de bonne taille intermédiaire assurant l'existence d'une somme unique. Il faut faire intervenir d'autres critères de choix que nous n'aborderons pas ici. Disons simplement que d'une part, toutes les sommes possibles sont faciles à décrire à partir de l'une d'elles et que d'autre part le consensus sur le choix à faire est actuellement général. Nous indiquons les outils, transformations de Borel et de Laplace, ramification, accélération d'Ecalle et les formules intégrales construites avec ces outils qui définissent « les » sommes de ces séries divergentes.

Enfin en appendice, nous démontrons dans un cas simple mais significatif, dit cas de niveau un, que les formules proposées donnent bien des sommes des séries divergentes associées au système différentiel. La démonstration proposée suit la méthode d'Ecalle [5] qui repose sur des arguments de perturbation et de séries majorantes. Elle a l'avantage d'être courte tout en n'utilisant que des résultats élémentaires sur les systèmes différentiels et le produit de convolution. Une autre démonstration due à Martinet et Ramis repose sur des arguments de type asymptotique. Mentionnons enfin que l'existence de ces sommes mais sans formules de définition a été établie préalablement par Ramis par des arguments cohomologiques [15].

Première partie

1. Système différentiel ou équation différentielle ? L'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients méromorphes est équivalente à celle des équations différentielles linéaires analytiques. Nous choisissons de travailler avec des systèmes plutôt qu'avec des équations parce que l'écriture matricielle se prête mieux à la description des espaces de solutions.

Rappelons qu'on passe facilement d'une équation à son système compagnon

$$[A_D] \quad \frac{dY}{dx} = A_D Y$$

$$\text{avec} \quad A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & \cdots & -a_{n-2}/a_n & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}$$

en prenant pour inconnue

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad y_1 = y,\ y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \dots,\ y_n = \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$$

Réciproquement, on peut passer d'un système à une équation en ramenant le système à la forme compagnon. Et ceci peut se faire par un changement linéaire d'inconnue $Y = PZ$ à coefficients méromorphes (il s'agit des coefficients de la matrice P). Ce changement est algorithmique mais si lourd qu'il reste plus théorique que pratique.

Nous notons (A_j) l'équation différentielle associée au système $[A]$ par élimination de toutes les inconnues sauf la $j^{ème}$ y_j.

2. Point ordinaire et point singulier. Le point $x_0 = 0$ est un *point singulier* d'un système $[A]$: $dY/dx = A(x)Y$ si c'est un pôle de l'un au moins des coefficients de la matrice A. Dans le cas d'une équation

$$(D) \qquad a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \cdots + a_0(x)y = 0$$

le point $x_0 = 0$ est un point singulier si c'est un zéro du coefficient $a_n(x)$. Lorsque $x_0 = 0$ n'est pas singulier on dit qu'il est *ordinaire.*

3. Polygone de Newton. Le polygone de Newton d'une équation (D) est facile à construire et il est l'outil essentiel pour le calcul des solutions formelles. Dans le cas d'un système $[A]$ on utilise le polygone de Newton de l'une quelconque des équations (A_j) associée au système par élimination de toutes les inconnues sauf une, y_j.

On opère comme suit : on détermine la partie principale des coefficients de (D)

$$a_j(x) = a_{j,\ell(j)}x^{\ell(j)} + O(x^{\ell(j)+1})$$

et on marque dans le demi-plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbf{R}$ les points de coordonnées $(j, \ell(j) - j)$. Le *polygone de Newton* de (D) est l'enveloppe convexe de la famille des deuxièmes quadrants $\{(u, v) | u \leqslant j \text{ et } v \geqslant \ell(j) - j\}$ de sommets chacun des points marqués (voir exemples et dessins en encadré).

4. Point singulier régulier et point singulier irrégulier

Lorsque le point $x_0 = 0$ est singulier on distingue deux cas dits *singulier régulier* ou *singulier irrégulier* suivant que le polygone de Newton est réduit ou non à un seul côté horizontal. Nous allons voir que la forme et le comportement des solutions sont tout à fait différents suivant que l'on est dans l'un ou l'autre cas.

5. Étude locale au point ordinaire $x_0 = 0$. Les résultats sont classiques, connus depuis le XIX^e siècle ([3, chap. VII], [4], [8, Th. 9.3.c et d, p. 94]). Nous énonçons les résultats sous une forme qui prépare la suite et dans le contexte des systèmes différentiels ; une solution est alors un vecteur de dimension n, la dimension du système.

Les solutions séries formelles $\sum_{p\in\mathbb{N}} C_p x^p$ forment un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et elles sont en « nombre suffisant » pour que la dimension de cet espace soit égale à n. En outre, elles sont convergentes et leur domaine de convergence contient au moins un disque commun de centre 0, en fait n'importe quel disque qui ne contient aucun point singulier autre que 0. Sur ce disque commun les sommes de ces séries formelles (sommes au sens usuel de la sommation des séries convergentes) forment un espace vectoriel de dimension n de vraies solutions du système.

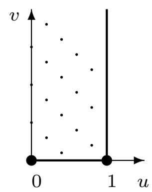
On appelle *matrice fondamentale de solutions* du système ou plus simplement, *solution fondamentale* du système toute matrice dont les vecteurs colonnes sont n solutions linéairement indépendantes. Pour être précis on parlera de solution fondamentale formelle ou analytique suivant le contexte choisi. Étant donné deux solutions fondamentales F et H, toutes deux soit formelles soit analytiques sur un même domaine de définition, il existe une matrice constante inversible C faisant passer de l'une à l'autre :

$$H = FC, \qquad C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}).$$

6. Étude locale au point singulier régulier $x_0 = 0$. Ces résultats sont eux aussi classiques depuis le XIX^e siècle. Les solutions séries formelles, s'il en existe, ne sont en général pas assez nombreuses pour

Exemples commentés dans le texte et dessins de polygones de Newton

Exemple 0 : La singularité $x_0 = 0$ est régulière.

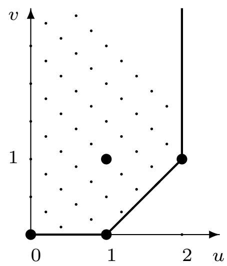


$$(E_0) \qquad xy' - ay = 0$$

où on note $y' = dy/dx$ et on a $a \in \mathbb{C}$

Les solutions sont proportionnelles à $y(x) = x^a$. Lorsque le coefficient a est un entier positif la singularité du système en 0 ne se répercute pas sur les solutions. On dit dans ce cas que 0 est un point singulier apparent *au sens de « qui a l'apparence d'un point singulier ».*

Exemple 1 : Équation d'Euler ; la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière de niveau 1.



$$x^2y' + y = x$$

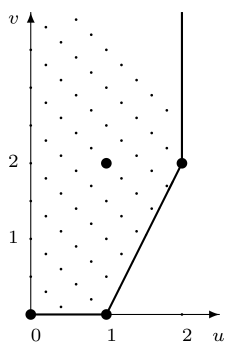
Elle n'est pas de la forme étudiée ici mais elle le devient si on la dérive après l'avoir écrite $xy' + \frac{1}{x}y = 1$. On obtient l'équation

$$(E_1) \qquad x^3y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$$

qui admet pour solutions celles de l'équation d'Euler et celles de l'équation sans second membre associée $x^2y' + y = 0$. Son système compagnon s'écrit

$$[E_1] \qquad \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x^3 & -(1/x + 1/x^2) \end{bmatrix} Y \qquad \text{où} \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

Exemple 2 : Équation d'Euler-bis ; la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière de niveau 2.



$$\frac{x^3}{2}y' + y = x^2$$

Elle est obtenue à partir de l'équation d'Euler par le changement de variable $x \mapsto x^2$. Sous forme homogène elle s'écrit

$$(E_2) \qquad x^4y'' + (x^3 + 2x)y' - 4y = 0$$

et sous forme de système

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4/x^4 & -(1/x + 2/x^3) \end{bmatrix} Y.$$

constituer une solution fondamentale : elles forment toujours un espace vectoriel mais celui-ci est en général de dimension inférieure à n, voire nulle.

Mais on obtient le résultat espéré en leur adjoignant simplement des puissances de x et des logarithmes. De façon précise le système différentiel admet une solution fondamentale de la forme $Y(x) = F(x)x^L$ où $F(x)$ est une matrice inversible à coefficients séries formelles ou séries méromorphes formelles et où L est une matrice constante. On note $x^L := e^{L\log(x)}$.

On peut imposer, si on le désire, que la matrice L, appelée *matrice des exposants de monodromie formelle* soit sous forme de Jordan. Nous notons désormais par la même lettre Y aussi bien le vecteur inconnu qu'une matrice fondamentale de solutions, le contexte ne prêtant jamais à confusion.

Une propriété remarquable de ces solutions est que toutes les séries formelles contenues dans F sont convergentes. Ici encore, elles convergent dans un même disque de centre 0 dès que celui-ci ne contient pas d'autre point singulier que 0. Par ailleurs, l'expression formelle x^L est une vraie fonction multivaluée c'est-à-dire une fonction définie non pas sur $\mathbb{C}$ mais sur la surface de Riemann du logarithme au voisinage de 0. Ainsi, l'expression

$$Y(x) = F(x)x^L$$

définit une solution fondamentale analytique au voisinage de 0 (0 exclu) sur la surface de Riemann du logarithme. Les autres solutions fondamentales sont toutes les matrices de la forme $Z(x) = Y(x)C$ avec C matrice constante inversible.

7. Étude locale au point singulier irrégulier $x_0 = 0$. La situation dans ce cas est beaucoup plus compliquée. Elle fait apparaître des phénomènes nouveaux désignés globalement sous le nom de *phénomène de Stokes* et qui se traduisent dans la réalité par des dilatations ou des compressions brutales alors même que les quantités étudiées sont très régulières puisqu'analytiques. Les avatars techniques de ce phénomène sont d'une part que la variable x ne suffit plus toujours aux calculs — il faut en prendre une racine $t = x^{1/\nu}$ —, d'autre part que les séries entières qui apparaissent dans les calculs sont en

Exemples commentés dans le texte et dessins de polygones de Newton (suite)

Exemple 3 : Équation de Ramis-Sibuya ;
la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière des niveaux 1 et 2.

$$Dy = 4x + 2x^2 + 10x^3 - 3x^4$$

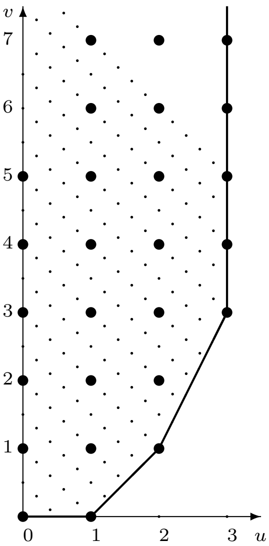
où

$$D = x^5(2-x)\frac{d^2}{dx^2} + x^2(4+5x^2-2x^3)\frac{d}{dx} + 2(2-x+x^2)$$

Sous forme homogène elle s'écrit

$$(E_3) \qquad D_3 y = 0 \qquad \text{avec}$$

$$D_3 = (8x^6 + 18x^8 - 16x^9 + 3x^{10})\frac{d^3}{dx^3} + (16x^3 + \cdots + 12x^9)\frac{d^2}{dx^2} + (16x + \cdots + 6x^8)\frac{d}{dx} + (-16 + \cdots + 12x^5).$$

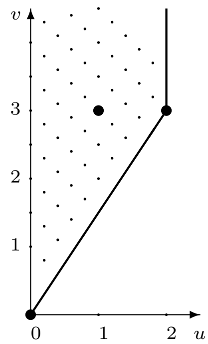


Exemple 4 : Équation d'Airy ; la singularité $x_0 = 0$ est irrégulière de niveau 3/2.

$$y'' - zy = 0$$

Traditionnellement son point singulier est placé à l'infini. On le ramène à l'origine par le changement de variable $z = 1/x$. Elle s'écrit alors

$$(E_4) \qquad x^5 y'' + 2x^4 y' - y = 0.$$



Les niveaux, contrairement aux apparences ici, ne sont pas les pentes non nulles du polygone de Newton de l'équation ou du système lui-même. Ce sont exactement les pentes du polygone de Newton d'un système associé dit système des endomorphismes. Mais on peut déjà les deviner sur le polygone de Newton de l'équation elle-même.

général divergentes. Mentionnons que le degré de ramification ν est facile à « lire » sur le polygone de Newton : c'est le p.p.c.m. des dénominateurs des pentes non nulles des différents côtés du polygone de Newton. En particulier, il divise $n!$. Lorsque $\nu = 1$ on dit qu'on est dans *le cas sans ramification* et lorsque $\nu \neq 1$ dans *le cas avec ramification.*

Ce phénomène s'accompagne d'une grande instabilité numérique au voisinage du point singulier qui exclut toute approche numérique de tels points singuliers de l'extérieur. C'est pourquoi, si l'on veut analyser en détail ce qui se passe à proximité de ces points on est amené à la démarche opposée qui consiste à commencer par une étude formelle c'est-à-dire une étude au point singulier lui-même puis à concrétiser les solutions formelles en de vraies fonctions solutions qui nous permettent de nous éloigner du point singulier. C'est ainsi que nous avons présenté l'étude dans le cas où 0 est un point ordinaire ou singulier régulier, la concrétisation des solutions formelles se faisant alors naturellement et globalement sur tout un voisinage de 0 en remplaçant les séries formelles obtenues par leur somme au sens usuel du terme. Dans le cas d'un point singulier irrégulier celles des séries à sommer qui sont divergentes n'admettent pas, par définition, de somme sur un vrai voisinage de 0. Il faut introduire une sommation directionnelle c'est-à-dire sur des secteurs de sommet 0 et de bissectrice une direction donnée. Dans le cas de séries convergentes la série apparaît comme le développement de Taylor de sa somme. Il est naturel de demander aux séries divergentes à sommer d'être de même le développement de Taylor de leur « somme » : on dit alors *développement asymptotique.*

Dans le cas de séries convergentes la somme est unique et vérifie automatiquement les mêmes équations différentielles que la série. Dans le cas de séries divergentes l'unicité n'est jamais assurée et les contraintes différentielles ne sont pas automatiquement transmises. Il est légitime de vouloir imposer aux sommes de satisfaire aux mêmes équations différentielles que les séries qu'elles sont supposées concrétiser. Ce faisant on n'acquiert pas nécessairement l'unicité même par des choix adaptés des secteurs d'asymptoticité et on perd l'existence dès lors que les secteurs deviennent trop gros. Mais comme toujours, le plus gênant dans la théorie est le défaut d'unicité qui contraint à d'autres critères de choix, mais quels critères ? Nous décrivons dans la deuxième partie une solution possible et depuis peu unanimement privilégiée à ce problème de sommation pour les séries divergentes provenant de systèmes différentiels linéaires méromorphes. Ce problème qui doit de façon substantielle son avancement à divers auteurs, J.-P. Ramis, B. Malgrange, J. Martinet, Y. Sibuya, pour n'en citer que quelques uns, a atteint la fin d'une étape avec la théorie de la résurgence et de l'accélération de J. Ecalle dans les années 1985-90. Ce sont les formules intégrales qui résultent de cette théorie dans le cas linéaire que nous décrivons dans cette deuxième partie. Mais auparavant, nous terminons la première partie avec la description des solutions formelles et des formes particulières qu'on peut leur donner pour faciliter la démonstration de leur sommabilité.

Un résultat classique, connu depuis le début du siècle (Poincaré, Fabry) affirme qu'un système différentiel linéaire admet une solution fondamentale de la forme

$$\widehat{Y} = \widehat{\phi} t^{\nu L} e^{Q(1/t)}$$

où ν est le degré de ramification défini ci-dessus ($t^\nu = x$), $Q = \operatorname{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont des polynômes de la variable $1/t$ sans terme constant, où L est la matrice constante des exposants de monodromie formelle et où $\widehat{\phi}$ est une matrice inversible à coefficients séries formelles en t.

Une amélioration relativement récente de ce résultat [1] permet de supprimer la ramification dans le facteur série formelle $\widehat{\phi}$ par un choix adéquat de la matrice L.

La détermination des solutions formelles est algorithmique : pour déterminer les polynômes $q_1, \dots, q_n$ de la diagonale de Q on résout les équations caractéristiques du système. Ces équations associées à chaque côté oblique du polygone de Newton généralisent les classiques équations caractéristiques des équations différentielles à coefficients constants. Les exposants de monodromie formelle s'obtiennent par la méthode de Frobenius [7] : les valeurs propres sont les racines des équations indicielles associées au côté horizontal de divers polygones

Le système compagnon de l'équation d'Euler admet pour solution fondamentale formelle

$$\widehat{Y} = \widehat{\phi}(x)e^{Q}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\phi}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \widehat{f}_1 \\ -1/x^2 & \widehat{f}_1' \end{bmatrix}$$

avec $\widehat{f}_1 = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n n! x^{n+1}$ *et* $\widehat{f}_1'$ *la série dérivée de* $\widehat{f}_1$.
La série $\widehat{f}_1$ *est la série d'Euler c'est-à-dire l'unique solution formelle de l'équation d'Euler* $x^2y' + y = x$ *qui vérifie* $y(0) = 0$.
Cet exemple appartient au cas sans ramification : il n'est pas nécessaire d'introduire une variable t*, racine de* x $(\nu = 1)$.

Exemple 1. Équation d'Euler

de Newton ; les logarithmes qui peuvent apparaître lorsque certaines de ces valeurs propres diffèrent d'un entier sont plus difficiles à déterminer. Par identification on obtient enfin les coefficients des séries formelles comme solutions d'équations de récurrence linéaires.

8. Forme normale. Supposons que $\widehat{Y} = \widehat{\phi}(x)x^L e^{Q(1/t)}$ soit une solution fondamentale formelle dans laquelle le facteur $\widehat{\phi}(x)$ soit non ramifié. Alors le système

$$[A_0] \qquad \frac{dY}{dx} = A_0 Y$$

qui admet la matrice $Y_0 = x^L e^{Q(1/t)}$ pour solution fondamentale est à coefficients méromorphes. On l'appelle *une forme normale* du système considéré. Et le facteur $\widehat{\phi}(x)$ est une solution du système différentiel linéaire méromorphe de dimension n^2

$$[A_0; A] \qquad \frac{dF}{dx} = A(x)F - FA_0(x)$$

9. Forme préparée. Un changement linéaire d'inconnue $X = PY$ à coefficients méromorphes n'affecte ni la convergence ni la sommabilité des séries apparaissant dans les solutions formelles. Et un tel changement permet de modifier arbitrairement un nombre arbitrairement grand de termes dans $\widehat{\phi}(x)$. En particulier, on peut toujours se

Le système compagnon de l'équation d'Airy admet pour solution fondamentale formelle

$$\widehat{Y} = \begin{bmatrix} A & B \\ A' & B' \end{bmatrix}$$

où A et B sont les « séries » d'Airy, A' et B' leur dérivée par rapport à x, c'est-à-dire, en notant $t = x^{1/2}$:

$$A = \Big(\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n t^{3n}\Big) t^{-1/2} \exp\big(-2/3t^3\big)$$

$$B = \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n t^{3n}\Big) t^{-1/2} \exp\big(2/3t^3\big)$$

avec $a_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+1)(2n+3)\,\cdots\,(6n-1)}{144^n n!} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,(3/4)^n\,\frac{1}{n!}\Gamma(n+5/6)\Gamma(n+1/6). \end{aligned}$$

Cet exemple appartient au cas avec ramification avec pour ordre de ramification $\nu = 2$.

On a $L = 0$ et $Q = \begin{bmatrix} -2/3t^3 & 0 \\ 0 & 2/3t^3 \end{bmatrix}$.

Exemple 4. Équation d'Airy

ramener au cas où $\widehat{\phi}$ s'écrit $\widehat{\phi}(x) = I + O(x^p)$ avec p entier quelconque fixé à l'avance. Nous notons $\widehat{F}$ le facteur $\widehat{\phi}$ ainsi normalisé.

Il est en outre possible de normaliser la forme normale $[A_0]$ de telle sorte que le système $[A_0; A]$ admette une solution série formelle $\widehat{F}$ déterminée de manière unique par la condition initiale $\widehat{F}(0) = I$. L'idée consiste à réduire les valeurs propres de L modulo les entiers $(0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant 1)$ par un changement linéaire d'inconnue qui multiplie Y_0 à gauche par des puissances convenables de x. Ainsi, le contre-exemple ci-dessus n'a plus cours.

10. Phénomène de Stokes. Notons $\check{\phi}(x)x^{\check{L}}e^{\check{Q}}$ une solution fondamentale formelle du système $[A_0; A]$ de dimension n^2. Les polynômes $\check{q}$

Le système compagnon de l'équation d'Airy admet pour solution fondamentale formelle

$$\widehat{Y} = \widehat{F}(x) x^J U e^Q$$

où Q est comme précédemment, où

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad \widehat{F} = \begin{bmatrix} \widehat{F}_1 & \widehat{F}_2 \\ \widehat{F}_3 & \widehat{F}_4 \end{bmatrix}$$

avec

$$\widehat{F}_1 = \sum_{n \geqslant 0} a_{2n} x^{3n}$$

$$\widehat{F}_2 = \sum_{n \geqslant 0} -a_{2n+1} x^{3n+1}$$

$$\widehat{F}_3 = \frac{1}{x} \sum_{n \geqslant 0} \big(-a_{2n+1} + (3n + 1/4) a_{2n}\big) x^{3n}$$

$$\widehat{F}_4 = \frac{1}{x^3} \Big(a_0 + \sum_{n \geqslant 0} \big(a_{2n+2} - (3n + 7/4) a_{2n+1}\big) x^{3n+3} \Big)$$

Seul le facteur e^Q contient la variable ramifiée t ; les séries sont de vraies séries formelles en x.

Exemple 4. Équation d'Airy

non nuls de la diagonale de $\check{Q}$ sont exactement les polynômes $q_j - q_\ell$ pour tous les couples (q_j, q_ℓ), $q_j \neq q_\ell$ extraits de la diagonale de Q. Ce sont ces polynômes qui jouent le rôle fondamental dans le phénomène de Stokes. Leurs degrés sont appelés *les niveaux* du système. Les directions pour lesquelles l'une des exponentielles $e^{\check{q}}$ au moins est à décroissance maximale (le terme dominant de $\check{q}(1/x)$ est réel négatif) sont appelées les *directions anti-Stokes* du système. Celles pour lesquelles le terme dominant est purement imaginaire sont appelées les *directions de Stokes* du système.

Les directions anti-Stokes sont celles qui régissent le phénomène de Stokes : nous verrons que les sommes de $\widehat{F}$ déterminées suivant deux directions voisines se recollent analytiquement sur leur domaine commun de définition, sauf éventuellement quand ces deux directions

Sans précautions particulières le facteur $\widehat{\phi}$ qui relie le système $[A_0]$ au système $[A]$ n'est pas unique même si on lui impose une valeur initiale en 0*. Ainsi le système*

$$\frac{dY}{dx} = AY, \quad A = \begin{bmatrix} -k/x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

qui a pour solution fondamentale

$$Y_0 = x^L, \quad L = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

peut être choisi comme forme normale. Le système de passage est alors $[A;A] : dY/dx = FA - AF$ *et il admet les deux solutions linéairement indépendantes*

$$\widehat{\phi} = I \ \text{(l'identité)} \quad \text{et} \quad \widehat{\phi} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x^k & 0 \end{bmatrix}$$

qui toutes deux vérifient la condition initiale $\widehat{\phi}(0) = I$*.*

Contre-exemple d'unicité

sont situées de part et d'autre d'une direction anti-Stokes ; on dit alors que cette direction anti-Stokes est une *direction singulière* pour $\widehat{F}$.

L'équation différentielle

$$x^2y' - y = 0$$

admet la série nulle $\widehat{f}(x) = 0$ *comme solution formelle.*

La fonction nulle $f_1(x) \equiv 0$ *et la fonction* $f_2(x) = \exp(-1/x)$ *sont toutes deux des solutions de cette équation asymptotiques à* $\widehat{f}$ *sur le demi-plan* $\operatorname{Re} x > 0$*. Mais lorsqu'on franchit l'un ou l'autre des demi-axes imaginaires, alors que* f_1 *reste asymptotique à* 0*, la fonction* f_2 *devient fortement non bornée puisqu'à croissance exponentielle. Numériquement, pour* x *proche de l'origine dans le demi-plan* $\operatorname{Re} x > 0$ *les deux fonctions* f_1 *et* f_2 *sont indiscernables mais leurs prolongements analytiques apparaissent comme fort différents.*

Ceci explique les difficultés rencontrées lors de la résolution numérique des équations différentielles : des erreurs exponentiellement petites se transforment tout naturellement en des erreurs exponentiellement grandes !

Les directions de Stokes sont les directions en lesquelles se manifeste le phénomène de Stokes : c'est en franchissant ces directions qu'une « solution » $F(x)$ asymptotique à $\widehat{F}$, donc parfaitement bornée, peut présenter brutalement une forte croissance exponentielle qui sera instantanément signalée par un « overflow » sur votre ordinateur ! La raison en est la possible présence d'exponentielles $e^{\tilde{q}}$ asymptotiquement indiscernables tant que celles-ci sont plates (asymptotiques à la série nulle) et qui apparaissent brutalement lorsqu'elles cessent d'être plates, précisément lorsqu'on traverse une direction de Stokes.

Deuxième partie

Nous nous proposons maintenant de décrire des formules de sommation pour les séries formelles $\widehat{F}$ qui apparaissent dans la résolution formelle en 0 de systèmes différentiels linéaires méromorphes. Seul pose problème le cas des séries divergentes. Nous avons vu qu'alors 0 est nécessairement un point singulier irrégulier du système différentiel considéré et que la sommation est nécessairement polarisée : dans chaque direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes on définit un opérateur de sommation S_θ. Ceci signifie que la fonction $S_\theta(\widehat{F})$ est définie sur un secteur contenant θ, qu'elle y est asymptotique à $\widehat{F}$ et que substituée à $\widehat{F}$ dans la solution formelle elle en fait une vraie solution du système. Ces opérateurs sont en outre des homomorphismes d'algèbres différentielles (cf. [16]).

Dans une direction singulière, on peut considérer deux opérateurs naturels, un opérateur à gauche S_θ^- défini par la sommation $S_{\theta+\varepsilon}$ à gauche de θ et « arbitrairement » proche de θ et un opérateur à droite S_θ^+ défini par la sommation $S_{\theta-\varepsilon}$ à droite de θ et « arbitrairement » proche de θ. La matrice faisant passer de la solution obtenue par sommation à gauche à celle obtenue par sommation à droite est appelée une *matrice de Stokes.* Plus précisément, si $\widehat{Y} = \widehat{F}Y_0$ est une solution fondamentale formelle et θ une direction singulière, on a une relation du type

$$S_\theta^+(\widehat{F})Y_{0,\theta} = S_\theta^-(\widehat{F})Y_{0,\theta}C_\theta$$

où $Y_{0,\theta}$ est la vraie fonction associée à la solution formelle Y_0 de la forme normale par le choix d'un argument (on choisit en général l'argument principal $0 \leqslant \theta < 2\pi$). La matrice constante inversible C_θ est la matrice de Stokes (principale) de $\widehat{Y}$ dans la direction θ.

L'équation d'Euler admet pour solution formelle la série d'Euler

$$\widehat{f}_1(x) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n n! x^{n+1}.$$

Cette série est divergente et ses coefficients ont une croissance de type $n!A^n$ (avec ici $A = 1$) : on dit que cette série est Gevrey de niveau 1*.*
Nous allons voir qu'elle est même 1-sommable*.*

EXEMPLE 1. Équation d'Euler

On montre que pour une forme normale donnée la famille des matrices de Stokes en les différentes directions singulières caractérise la singularité à changement d'inconnue $Y = PX$ linéaire méromorphe près. Nous n'abordons pas dans ce qui suit ces questions de classification des singularités. Nous nous bornons à décrire les opérateurs de sommation S_θ. Ces opérateurs dépendent des niveaux du système que nous supposons entiers (cas sans ramification). En effet, le changement de variable $t = x^{1/\nu}$ multiplie les niveaux par ν ; on peut donc toujours se ramener au cas sans ramification.

L'équation d'Euler-bis admet pour solution formelle la série d'Euler-bis

$$\widehat{f}_2(x) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n n! x^{2n+2}$$

Cette série est divergente mais ses coefficients ont une croissance beaucoup moins rapide puisque de type $\sqrt{n!}\,A^n$ (avec $A = 1$) : on dit que cette série est Gevrey de niveau 2*. Elle n'est pas 1-sommable mais elle est*
2-sommable*.*

EXEMPLE 2. Équation d'Euler-bis

Avant d'expliciter ces opérateurs nous introduisons les outils sur lesquels ils reposent.

L'équation de Ramis-Sibuya admet pour solution formelle la série

$$\widehat{f}_3 = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$$

somme de la série d'Euler et de la série d'Euler-bis. Comme $\widehat{f}_1$ *et* $\widehat{f}_2$ *elle est Gevrey de niveau* 1 *mais elle n'est pas de niveau* 2*. Elle n'est ni* 1*-sommable ni* 2*-sommable mais elle est* $(1,2)$*-sommable.*

EXEMPLE 3. Équation de Ramis-Sibuya

---

11. Transformée de Borel formelle d'une série $\widehat{f} = \sum_{p\geqslant 0} f_p x^{p+1}$ sans terme constant. On pose

$$\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f}(x) := \sum_{p\geqslant 0} \frac{f_p}{\Gamma(p+1)}\,\xi^p \qquad \Gamma(p+1) = p!$$

12. Transformée de Borel dans la direction θ d'une fonction f définie près de 0 sur un secteur de sommet 0 bissecté par θ et d'ouverture $\omega > \pi$. On pose (voir la figure 1)

$$\mathcal{B}_\theta f(\xi) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(x)e^{\xi/x}\frac{dx}{x^2}$$

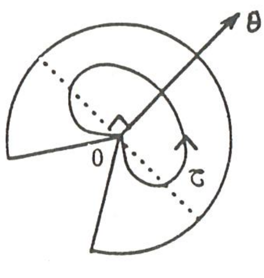


FIGURE 1.

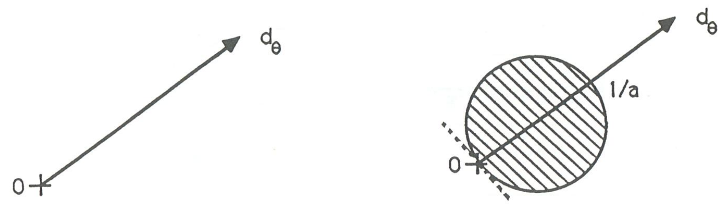
On notera aussi $\mathcal{B}_\theta = \mathcal{B}_{1;\theta}$ pour indiquer le niveau 1. Pour $f(x) = x^{p+1}$ on a $\mathcal{B}f(\xi) = (1/\Gamma(p+1))\xi^p$ (c'est la formule de Hankel).

La transformée de Borel d'une constante nécessite une définition particulière : on est conduit à prendre pour transformée de Borel, formelle ou non, de 1 la distribution δ de Dirac à l'origine. On fait ainsi correspondre à l'élément neutre 1 de la multiplication, l'élément neutre δ du produit de convolution. Mais on peut toujours si on le désire éliminer les constantes.

Sous de bonnes hypothèses qui seront réalisées pour les séries provenant de systèmes de niveau 1, la série $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f}(x)$ est convergente (i.e., . $\widehat{f}$ est Gevrey de niveau 1) et elle peut être prolongée analytiquement jusqu'à l'infini dans certaines directions θ, plus précisément à certains secteurs de sommet 0 contenant la direction θ. On peut de même prolonger la transformée de Borel $\mathcal{B}_\theta f(x)$ de certaines fonctions f. Par abus, nous noterons encore $\mathcal{B}_\theta f$ ou $\widetilde{f}$ cette fonction prolongée et nous la désignerons encore par transformée de Borel de $\widehat{f}$ ou de f dans la direction θ.

13. Transformée de Laplace dans la direction θ d'une fonction f définie sur la demi-droite d_θ issue de 0 et de direction θ. On pose (voir la figure 2)

$$\mathcal{L}_\theta(f)(x) := \int_{d_\theta} f(\xi)e^{-\xi/x}d\xi.$$



$|f(\xi)| \leqslant C^{te} \exp(a\,|\xi|)$
(Plan des ξ)

Disque d'analyticité de $\mathcal{L}_\theta f(x)$
(Plan des x)

FIGURE 2.

Lorsque f est à croissance exponentielle d'ordre 1 sur la demi-droite d_θ la fonction $\mathcal{L}_\theta(f)(x)$ est définie sur au moins un disque de diamètre porté par d_θ et contenant 0 sur son bord. Plus précisément si $|f(\xi)| \leqslant C^{te} \exp(a|\xi|)$ ce disque a un diamètre de longueur $1/a$. On l'appelle un *disque de Borel* dans la direction θ.

14. Opérateurs de ramification ρ_k et $\rho_{1/k}$, $k \in \mathbb{N}$. Notons $\mathbb{C}_x^*$ un exemplaire de $\mathbb{C}^*$ dont la variable est appelée x et $\widetilde{\mathbf{C}_x^*}$ son revêtement par les coordonnées polaires ou surface de Riemann de $\log x$. L'application

$$\begin{array}{cc} \widetilde{\mathbb{C}_x^*} & x = t^{1/k} \\ \big\downarrow & \big\downarrow \\ \widetilde{\mathbb{C}_t^*} & t = x^k \end{array}$$

est un changement de variable analytique. L'opérateur de ramification ρ_k est l'action de ce changement de variable sur les séries ou les fonctions de x. Ainsi on a

$$\rho_k(f)(t) = f(x) \quad \text{avec} \quad x = t^{1/k}.$$

L'opérateur réciproque $\rho_{1/k}$ agit sur les séries ou les fonctions de t et il est défini par $\rho_{1/k}(\varphi)(x) = \varphi(x^k)$.

15. Opérateurs d'accélération $\boldsymbol{\rho}_{(k,k');\theta}$. Pour $a > 1$ on définit le *noyau d'accélération* $\mathcal{C}_a$ de puissance a par

$$\mathcal{C}_a(\xi) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} e^{u - u^{1/a}\zeta} du$$

où $\mathcal{H}$ désigne un contour de Hankel « autour » de $\mathbb{R}^-$ (voir la figure 3).

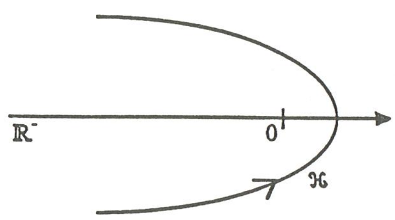


FIGURE 3.

Les noyaux $\mathcal{C}_a$ ont dans toute direction vérifiant $|\arg\zeta| < (1 - 1/a)\pi/2$, une croissance à l'infini du type

$$(*) \qquad \zeta^{b/2} e^{\frac{1}{b} a^{-b/a} \zeta^b} \quad \text{où } b \text{ vérifie } \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Le noyau $\mathcal{C}_2$ est le seul à être une fonction classique :

$$\mathcal{C}_2(\zeta) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\zeta^2/4}$$

Dans le cas où a est rationnel, qui est le seul cas que nous rencontrerons, les noyaux $\mathcal{C}_a$ sont des fonctions G de Meijer. En particulier, ils vérifient des équations différentielles linéaires.

Les opérateurs d'accélération sont définis par

$$\boldsymbol{\rho}_{(k,k');\theta}(\varphi)(\tau) := \frac{2i\pi}{\tau} \int_{d_\theta} \mathcal{C}_{k'/k}\big(\xi/\tau^{k/k'}\big)\varphi(\xi)d\xi \qquad (k < k').$$

On a $\mathcal{L}_{k'\theta} \circ \rho_{k'/k} \circ \mathcal{B}_{k\theta} = \boldsymbol{\rho}_{(k,k');k\theta}$. Mais alors que l'opérateur écrit au premier membre ne s'applique qu'aux fonctions à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini, l'opérateur d'accélération au second membre est applicable aux fonctions à croissance exponentielle d'ordre $k'/(k'-k) > 1$ (cf. formule $(*)$ ci-dessus). C'est là son intérêt majeur.

On préfère parfois utiliser les *opérateurs d'accélération « redressés »* définis par

$$\boldsymbol{A}_{(k,k');\theta} := \rho_{1/k'} \circ \boldsymbol{\rho}_{(k,k');k\theta} \circ \rho_k.$$

Ceux-ci sont applicables aux fonctions à croissance exponentielle à l'infini d'ordre κ avec $1/\kappa = 1/k - 1/k'$. La justification du qualificatif « redressé » apparaîtra dans les diagrammes qui suivent : ils correspondent à des flèches horizontales alors que les opérateurs $\boldsymbol{\rho}$ correspondent à des flèches obliques.

16. Quelques propriétés de la transformation de Borel

Il s'agit de propriétés communes à la transformation formelle ou fonctionnelle ainsi qu'au prolongement analytique.

Fonction ou série $f(x)$	Transformée de Borel $\widetilde{f}(\xi)$
x^{p+1}, $(p \in \mathbb{N})$	$\xi^p/p!$
1	δ (distribution de Dirac)
x^α $(\alpha \in \mathbb{C},\ -\alpha \notin \mathbb{N})$	$\xi^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$
$f \cdot g$	$\widetilde{f} * \widetilde{g}(\xi) = \int_0^\xi \widetilde{f}(t)\widetilde{g}(\xi - t)dt$
$x^2(d/dx)f(x)$	$\xi\widetilde{f}(\xi)$
$g(x) = f(x)/x$ avec $g(0) = a_0$	$a_0\delta + (d/d\xi)\widetilde{f}(\xi)$

17. Quelques propriétés de la transformation de Laplace

Fonction $\varphi(x)$	Transformée de Laplace $\mathcal{L}(\varphi)(x)$
$\varphi * \psi(\xi)$	$\mathcal{L}(\varphi)(x) \cdot \mathcal{L}(\psi)(x)$
$\int_0^u \varphi(u)du$	$(1/x)\mathcal{L}(\varphi)(x)$
$(d/d\xi)\varphi(\xi)$	$\varphi(0) + (1/x)\mathcal{L}(\varphi)(x)$
$\xi\varphi(\xi)$	$x^2(d/dx)\mathcal{L}(\varphi)(x)$

Nous fixons désormais une forme normale $[A_0]$ du système $[A]$ étudié et une solution fondamentale normale $Y_0 = x^L e^Q$ de celui-ci. Il s'agit de sommer le facteur série formelle $\widehat{F}(x)$ d'une solution formelle $\widehat{F}Y_0$ de $[A]$. Nous avons vu que $\widehat{F}$ est une solution du système de passage

$$[A_0; A] \qquad \frac{dF}{dx} = AF - FA_0$$

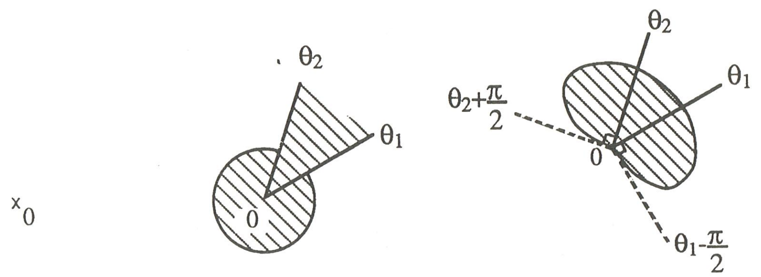
et qu'on peut imposer $\widehat{F}(0) = I$.

18. Sommation dans le cas d'un système de niveau unique $k = 1$

Supposons que le système $[A]$ n'admette qu'un seul niveau $k=1$. Alors la série $\widehat{F}$ est sommable par le procédé de sommation de niveau 1 :

$$\widehat{F}(x) \xrightarrow{\mathcal{B}_\theta} \widetilde{F}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(x)$$

dans toute direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes du système. On dit alors que $\widehat{F}$ est 1-*sommable*. Domaines de définition de $\widehat{F}$, $\widetilde{F}$ et F :



$\widehat{F}$ (Plan des x) $\widetilde{F}$ (Plan des ξ) F (Plan des x)

Figure 4.

Cet énoncé a le sens suivant :

(a) la transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ de $\widehat{F}$ est convergente ;

(b) dans une direction θ quelconque qui n'est pas une direction anti-Stokes, la somme de la série $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ admet un prolongement analytique complexe jusqu'à l'infini. Nous le notons $\mathcal{B}_\theta(\widehat{F}) = \widetilde{F}$;

(c) $\widetilde{F}$ est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini au voisinage de la direction θ, i.e., . il existe des constantes C et $\alpha > 0$ et des arguments θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ tels que

$$|\widetilde{F}(\xi)| \leqslant C \exp \alpha |\xi|$$

pour tout ξ dont l'argument vérifie $\theta_1 \leqslant \arg(\xi) \leqslant \theta_2$;

(d) La transformée de Laplace $F(x) = \mathcal{L}_{\theta'}(\widetilde{F})(x)$ de $\widetilde{F}$ existe dans toutes les directions θ', $\theta_1 \leqslant \theta' \leqslant \theta_2$ et elle est analytique sur la réunion $\mathcal{D}_{\theta_1,\theta_2}$ des disques de Borel de diamètre de longueur $\frac{1}{\alpha}$ dirigé par θ' ;

(e) la fonction F est asymptotique à $\widehat{F}$ en 0 sur $\mathcal{D}_{\theta_1,\theta_2}$ et elle est solution du système $[A_0; A]$. C'est donc une somme de $\widehat{F}$ sur $\mathcal{D}_{\theta_1,\theta_2}$.

Nous donnons en appendice les détails d'une démonstration de ce résultat dans le cas où la monodromie formelle $\widehat{M} = e^{2i\pi L}$ est triviale i.e., . $\widehat{M} = I$. La démonstration du cas général est très voisine.

La série d'Euler est un exemple de série sommable de niveau 1. *On pourra remarquer que la classique méthode de variation de la constante appliquée à l'équation d'Euler correspond exactement à ce procédé. Prenons par exemple la direction* $\theta = 0$ *ou demi-axe réel positif. Les solutions de l'équation homogène* $x^2y' + y = 0$ *sont de la forme* $y = C^{te}e^{1/x}$. *La méthode de variation de la constante donne directement la solution*

$$f_1(x) = \int_0^x e^{1/x}e^{-1/t}\ \frac{dt}{t}$$

et après le changement de variable $t \mapsto \xi$ *défini par* $1/t - 1/x = \xi/x$

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\xi}e^{-\xi/x}\ d\xi.$$

On obtient donc exactement $f_1(x) = \mathcal{L}_0(\mathcal{B}_0(\widehat{f}_1))(x)$ *puisque* $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f}_1)(\xi) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\xi^n$ *et que cette série a pour somme* $1/(1+\xi)$. *Observer en outre que, bien que la série* $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f}_1)$ *ait un rayon de convergence égal à* 1, *sa somme peut être prolongée analytiquement jusqu'à l'infini au voisinage de la direction* $\theta = 0$. *Cette propriété vaut pour toute direction* θ *sauf* $\theta = \pi$ *qui est la seule direction singulière de la série d'Euler.*

Exemple 1.

19. Sommation dans le cas d'un système de niveau unique k quelconque. Supposons que le système $[A]$ n'admette qu'un seul niveau k. Alors la série $\widehat{F}$ est sommable par le procédé de sommation de niveau k

$$\begin{array}{ccccccc}
x = t^{1/k} & & \widehat{F}(x) & & & & F(x) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_k} & & & & \big\uparrow{\scriptstyle \rho_{1/k}} \\
t = x^k & & \widehat{f}(t) & \xrightarrow{\ \mathcal{B}_{k\theta}\ } & \widetilde{f}(\tau) & \xrightarrow{\ \mathcal{L}_{k\theta}\ } & f(t)
\end{array}$$

dans toute direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes du système. On dit alors que $\widehat{F}$ est *k-sommable.*

On a $\widehat{f}(t) = \rho_k(\widehat{F})(x) = \widehat{F}(t^{1/k})$ et $F(x) = f(x^k)$. On peut si on le préfère rester dans les « plans » des variables x et ξ. En notant $\mathcal{B}_{k;\theta} := \rho_{1/k}\circ\mathcal{B}_{k\theta}\circ\rho_k$ et $\mathcal{L}_{k;\theta} := \rho_{1/k}\circ\mathcal{L}_{k\theta}\circ\rho_k$ on a alors le diagramme

La série d'Euler-bis est une série 2-sommable. Ses directions singulières sont les deux demi-axes imaginaires. On vérifie aisément qu'on ne peut lui appliquer le procédé de sommation de niveau 1 dans aucune des directions $\theta \in]-3\pi/4, -\pi/4[\,\cup\,]\pi/4, 3\pi/4[$. Elle n'est donc pas 1-sommable [9]. Dans les autres directions θ on peut lui appliquer à la fois le procédé de niveau 1 et le procédé de niveau 2. La somme de niveau 1 est définie sur un demi-plan, celle de niveau 2 sur un quart de plan tous deux bissectés par θ. Mais naturellement, sur la partie commune de leur domaine de définition, les deux sommes coïncident. Ce phénomène est général : lorsque dans une direction θ on peut appliquer plusieurs des opérateurs de sommation S_θ les sommes obtenues coïncident sur la partie commune de leur domaine de définition.

Exemple 2.

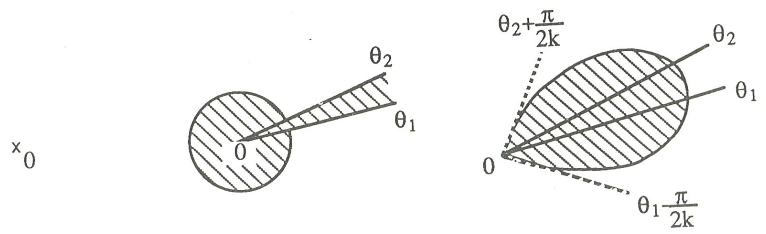
de sommation

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}(x) \arrow[r, "\mathcal{B}_{k;\theta}"] \arrow[d, "\rho_k"'] & \widetilde{F}^k(\xi) \arrow[r, "\mathcal{L}_{k;\theta}"] \arrow[d, shift left, "\rho_k"] & F(x) \\
\bullet \arrow[r, "\mathcal{B}_{k\theta}"] & \bullet \arrow[u, shift left, "\rho_{1/k}"] \arrow[r, "\mathcal{L}_{k\theta}"] & \bullet \arrow[u, "\rho_{1/k}"']
\end{tikzcd}$$

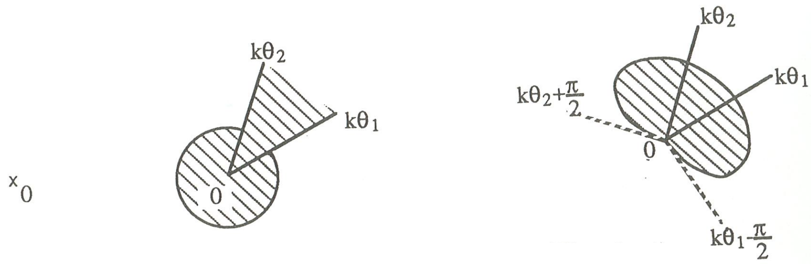
(on a $x = t^{1/k}$ et $\xi = \tau^{1/k}$). La méthode consiste donc à se ramener au cas de niveau 1 par l'intermédiaire des opérateurs de ramification ρ_k et $\rho_{1/k}$. Domaines de définition correspondants : voir la figure 5.

20. Sommation dans le cas d'un système à deux niveaux k_1 et k_2 ($k_1 < k_2$). Supposons que le système $[A]$ admette les deux niveaux k_1 et k_2. Alors la série $\widehat{F}$ est sommable par le procédé suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}(x) \arrow[d, "\rho_{k_1}"'] & & & & F(x) \\
\widehat{f}(t_1) \arrow[r, "\mathcal{B}_{k_1\theta}"] & \widetilde{f}^1(\tau_1) \arrow[r, dotted] \arrow[drr, "\rho_{(k_1,k_2);k_1\theta}"] & {} \arrow[d, dotted] & & \\
& & {} \arrow[r, dotted] & \widetilde{f}^2(\tau_2) \arrow[r, "\mathcal{L}_{k_2\theta}"] & f(t_1) \arrow[uu, "\rho_{1/k_2}"']
\end{tikzcd}$$



$\widehat{F}$ (Plan des x) $\widetilde{F}$ (Plan des ξ) F (Plan des x)



$\widehat{f}$ (Plan des t) $\widetilde{f}$ (Plan des τ) f (Plan des t)

FIGURE 5.

(on commence par le niveau le plus bas). On dit que $\widehat{F}$ est *multisommable* ou *accéléro-sommable* et si on veut préciser les niveaux qu'elle est (k_1, k_2)-*sommable*.

L'opérateur $\boldsymbol{\rho}_{(k_1,k_2);k_1\theta}$ est l'opérateur d'accélération défini au début de cette deuxième partie. C'est la forme intégrale de la composée des trois flèches en pointillés [9].

Cet énoncé a le sens suivant :

(a) la série $\widehat{\mathcal{B}}_{k_1\theta}\widehat{f}(\tau_1)$ est convergente ;

(b) sa somme peut être prolongée à un secteur $k_1\theta_1 < k_1\theta < k_1\theta_2$ voisinage du rayon $d_{k_1\theta}$ en une fonction $\widetilde{f}^1$ à croissance exponentielle d'ordre $k_2/(k_2 - k_1)$;

(c) la fonction $\widetilde{f}^2$ déduite de $\widetilde{f}^1$ par accélération de puissance k_2/k_1 dans la direction $k_1\theta$ est définie et à croissance exponentielle d'ordre 1 sur un secteur $]k_2\theta_1, k_2\theta_2[$;

(d) sa transformée de Laplace est la somme cherchée à condition de l'exprimer en fonction de x via l'opérateur de ramification ρ_{1/k_2}.

On peut si on le préfère rester dans les « plans » des variables x et ξ. On a alors le diagramme de sommation :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}(x) \arrow[r, "\mathcal{B}_{k_1;\theta}"] \arrow[d, "\rho_{k_1}"'] & \widetilde{F}^1(\xi) \arrow[r, "\boldsymbol{A}_{(k_1,k_2);\theta}"] \arrow[d, shift left, "\rho_{k_1}"] & \widetilde{F}^2(\xi) \arrow[r, "\mathcal{L}_{k_2;\theta}"] \arrow[dd, shift left, "\rho_{k_2}"] & F(x) \\
\widehat{f}(t_1) \arrow[r, "\mathcal{B}_{k_1\theta}"] & \widetilde{f}^1(\tau_1) \arrow[u, shift left, "\rho_{1/k_1}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{\rho}_{(k_1,k_2);k_1\theta}"'] & & \\
& & \widetilde{f}^2(\tau_2) \arrow[r, "\mathcal{L}_{k_2\theta}"] \arrow[uu, shift left, "\rho_{1/k_2}"] & f(t_2) \arrow[uu, "\rho_{1/k_2}"']
\end{tikzcd}$$

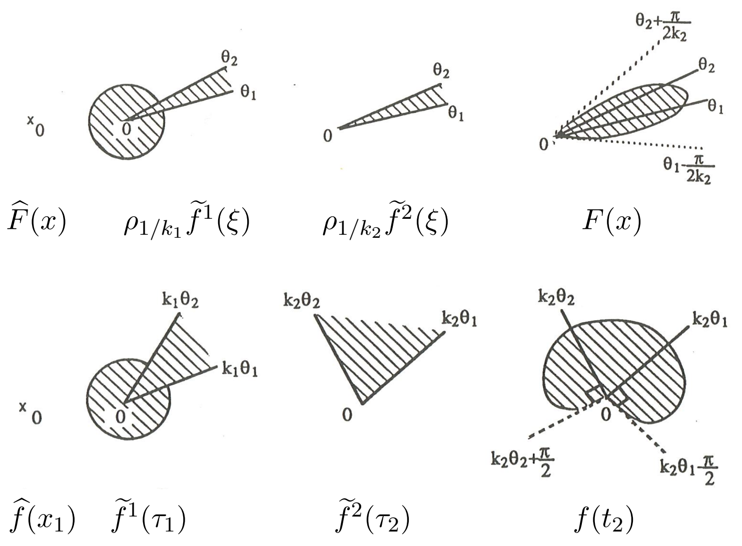


FIGURE 6. Domaines de définition correspondants

21. Sommation dans le cas d'un système à un nombre quelconque de niveaux. Supposons que le système $[A]$ admette les niveaux $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$. Alors le procédé de sommation précédent s'itère sans nouveauté. En particulier les opérateurs d'accélération faisant passer d'un niveau au suivant suffisent. Ici encore on procède par niveaux croissants. Avec pour seule raison de rester dans les limites de la feuille de papier nous donnons le diagramme de sommation dans

---

La série de Ramis-Sibuya est $(1,2)$*-sommable. Il est clair qu'elle n'est ni* 1*-sommable ni* 2*-sommable puisqu'elle s'écrit*

$$\widehat{f}_3 = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$$

où $\widehat{f}_1$ *est la série d'Euler qui est* 1*-sommable mais pas* 2*-sommable et où* $\widehat{f}_2$ *est la série d'Euler-bis qui est* 2*-sommable mais pas* 1*-sommable.*
On peut montrer directement à titre d'exercice qu'elle est $(1,2)$*-sommable* [9]*. Rappelons que le noyau d'accélération à utiliser dans ce cas est*

$$\mathcal{C}_2(\zeta) = i\sqrt{(\pi)}\zeta e^{-\zeta^2/4}$$

qui est de toute évidence à croissance exponentielle d'ordre au plus 2*.*

Exemple 3.

---

le cas de trois niveaux seulement $k_1 < k_2 < k_3$:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}(x) \arrow[d, "\rho_{k_1}"'] & & & & F(x) \\
\widehat{f}(t_1) \arrow[r, "\mathcal{B}_{k_1\theta}"'] & \widetilde{f}^1(\xi_1) \arrow[dr, "\boldsymbol{\rho}_{(k_1,k_2);k_1\theta}"] & & & \\
& & \widetilde{f}^2(\xi_2) \arrow[drr, "\boldsymbol{\rho}_{(k_2,k_3);k_2\theta}"] & & \\
& & & \widetilde{f}^3(\xi_3) \arrow[r, "\mathcal{L}_{k_3\theta}"'] & f(x_3) \arrow[uuu, "\rho_{1/k_3}"']
\end{tikzcd}$$

La série $\widehat{F}$ est sommable par ce procédé dans toute direction θ sauf un nombre fini de directions singulières qui sont des directions anti-Stokes du système. On dit que $\widehat{F}$ est *multisommable* ou *accéléro-sommable des niveaux* $k_1, k_2, \ldots, k_r$ ou encore $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$*-sommable.*

Si on désire rester dans les « plans » des variables x et ξ on a :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}(x) \arrow[r, "\mathcal{B}_{k_1;\theta}"] \arrow[d, "\rho_{k_1}"'] & \widetilde{F}^1(\xi) \arrow[r, "\boldsymbol{A}_{(k_1,k_2);\theta}"] \arrow[d, shift left, "\rho_{k_1}"] & \widetilde{F}^2(\xi) \arrow[r, "\boldsymbol{A}_{(k_2,k_3);\theta}"] \arrow[dd, shift left, "\rho_{k_2}"] & \widetilde{F}^3(\xi) \arrow[r, "\mathcal{L}_{k_3;\theta}"] \arrow[ddd, shift left, "\rho_{k_3}"] & F(x) \\
\widehat{f}(x1) \arrow[r, "\mathcal{B}_{k_1\theta}"'] & \widetilde{f}^1(\xi_1) \arrow[u, shift left, "\rho_{1/k_1}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{\rho}_{(k_1,k_2);k_1\theta}"'] & & & \\
& & \widetilde{f}^2(\xi_2) \arrow[uu, shift left, "\rho_{1/k_2}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{\rho}_{(k_2,k_3);k_2\theta}"'] & & \\
& & & f(\xi_3) \arrow[uuu, shift left, "\rho_{1/k_3}"] \arrow[r, "\mathcal{L}_{k_3\theta}"'] & f(x_3) \arrow[uuu, "\rho_{1/k_3}"']
\end{tikzcd}$$

Appendice

Dans cet appendice nous détaillons une démonstration de la sommabilité dans le cas particulier des systèmes de niveau unique 1. Celle-ci bien que plus simple que la démonstration du cas général est typique des arguments à utiliser. Nous suivons la méthode proposée par Ecalle ([E85], [E91]). Nous rappelons qu'il en existe d'autres.

Théorème. *Le facteur série formelle $\widehat{F}$ d'une solution fondamentale formelle $\widehat{F}(x)x^L e^Q$ d'un système différentiel linéaire méromorphe*

$$\text{[A]} \qquad \frac{dY}{dx} = AY$$

quand celui-ci ne comporte qu'un seul niveau égal à 1 *est sommable par le procédé de sommation de niveau* 1

$$\widehat{F}(x) \xrightarrow{\mathcal{B}_\theta} \widetilde{F}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_\theta} F(x)$$

dans toute direction θ qui n'est pas une direction anti-Stokes du système [A].

Démonstration. Il s'agit d'établir les points a. à e. déjà énoncés et que nous répétons ici :

(a) la transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ de $\widehat{F}$ est convergente ;

(b) dans une direction θ quelconque qui n'est pas une direction anti-Stokes, la somme de la série $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F})$ admet un prolongement analytique complexe jusqu'à l'infini. Nous le notons $\mathcal{B}_\theta(\widehat{F}) = \widetilde{F}$;

(c) $\widetilde{F}$ est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini au voisinage de la direction θ, i.e., qu'il existe des constantes C et $\alpha > 0$ et des arguments θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ tels que

$$|\widetilde{F}(\xi)| \leqslant C \exp \alpha |\xi|$$

pour tout ξ dont l'argument vérifie $\theta_1 \leqslant \arg(\xi) \leqslant \theta_2$;

(d) La transformée de Laplace $F(x) = \mathcal{L}_{\theta'}(\widetilde{F})(x)$ de $\widetilde{F}$ existe dans toutes les directions θ', $\theta_1 \leqslant \theta' \leqslant \theta_2$ et elle est analytique sur la réunion $\mathcal{D}_{\theta_1,\theta_2}$ des disques de Borel de diamètre de longueur $1/\alpha$ dirigé par θ' ;

(e) la fonction F est asymptotique à $\widehat{F}$ en 0 sur $\mathcal{D}_{\theta_1,\theta_2}$ et elle est solution du système $[A_0; A]$. C'est donc une somme de $\widehat{F}$ sur $\mathcal{D}_{\theta_1,\theta_2}$.

Pour simplifier, nous faisons l'hypothèse que la monodromie formelle $\widehat{M} = e^{2i\pi L}$ est triviale mais la démonstration s'étend sans difficulté au cas où $\widehat{M}$ est quelconque. On peut alors réduire le système étudié à la forme préparée suivante :

$$[A] \qquad x^2 \frac{d}{dx} Y = AY$$

avec $A(x) = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots) + x^2 B(x)$ où les a_i sont des scalaires ($a_i \in \mathbb{C}$) et où $B(x)$ est analytique en $x = 0$ avec $\operatorname{diag} B(0) = 0$. Le système $[A]$ admet une solution fondamentale formelle de la forme $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x) e^{Q(1/x)}$ avec

$$Q\big(1/x\big) = \operatorname{diag}\big(-a_1/x, -a_2/x, \dots\big) \qquad \text{et} \qquad \widehat{F}(x) = I + O(x^2).$$

On choisit la forme normale

$$[A_0] \qquad x^2 \frac{dY}{dx} = A_0 Y$$

où $A_0 = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots)$ et sa solution fondamentale $Y_0(x) = e^{Q(1/x)}$. La matrice $\widehat{F}$ est l'unique solution série formelle du système

$$(1) \qquad x^2 \frac{dF}{dx} = A_0 F - F A_0 + x^2 B F$$

qui vérifie $\widehat{F}(0) = I$.

Conformément aux propriétés de la transformation de Borel le système transformé de Borel de (1) s'écrit

$$(\widetilde{1}) \qquad \xi\widetilde{F} = A_0\widetilde{F} - \widetilde{F}A_0 + (\widetilde{x^2B}) * \widetilde{F}.$$

Dans une matrice U nous notons désormais $U^{(j,\ell)}$ l'élément placé en $j^{ème}$ ligne et $\ell^{ème}$ colonne. Et si $U(x) = \left[\sum_{p\geqslant 0} U_p^{(j,\ell)} x^p\right]$ nous notons $|U|(x) = \left[\sum_{p\geqslant 0} |U_p^{(j,\ell)}| x^p\right]$ la « série des modules ». On a $|U(x)| \leqslant ||U|(x)| \leqslant |U|(|x|)$.

L'idée de base est d'introduire la perturbation régulière suivante du système (1) :

$$(1_\varepsilon) \qquad x^2\frac{dF}{dx} - A_0F + FA_0 = \varepsilon x^2 BF$$

qui redonne le système (1) en substituant 1 à ε. Par transformation de Borel (1_ε) devient

$$(\widetilde{1_\varepsilon}) \qquad \xi\widetilde{F} - A_0\widetilde{F} + \widetilde{F}A_0 = \varepsilon(\widetilde{x^2B}) * \widetilde{F}.$$

En développant les systèmes (1_ε) et $(\widetilde{1_\varepsilon})$ s'écrivent

$$(1_\varepsilon) \quad \begin{bmatrix} x^2\frac{d}{dx}F^{(1,1)} & (x^2\frac{d}{dx} - (a_1-a_2))F^{(1,2)} & \cdots \\ (x^2\frac{d}{dx} - (a_2-a_1))F^{(2,1)} & x^2\frac{d}{dx}F^{(2,2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \varepsilon x^2 BF$$

et

$$(\widetilde{1_\varepsilon}) \quad \begin{bmatrix} \xi\widetilde{F}^{(1,1)} & (\xi - (a_1-a_2))\widetilde{F}^{(1,2)} & \cdots \\ (\xi - (a_2-a_1))\widetilde{F}^{(2,1)} & \xi\widetilde{F}^{(2,2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \varepsilon(\widetilde{x^2B}) * \widetilde{F}.$$

On voit apparaître les points $\xi = a_j - a_\ell \neq 0$ comme singularités potentielles de $\widetilde{F}$. En revanche, le membre de droite étant divisible par ξ, le point $\xi = 0$ n'apparaît pas comme tel. Ces points $(a_j - a_\ell)$ déterminent les directions anti-Stokes du système $[A]$.

Choisissons une direction d'étude θ qui n'est pas une direction anti-Stokes ; nous notons d_θ la demi-droite issue de 0 et de direction θ. Et considérons un domaine ouvert Δ, réunion d'une boule de centre 0 et d'un secteur, voisinage de d_θ, qui ne rencontre aucun des points $a_j - a_\ell \neq 0$; nous notons

$$m = \min_{(j,\ell)|a_j - a_\ell \neq 0} \inf_{\xi \in \Delta} |\xi - (a_j - a_\ell)|$$

la plus petite distance entre Δ et les points $a_j - a_\ell \neq 0$ (voir la figure 7).

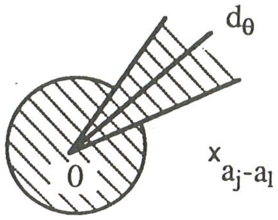


FIGURE 7.

Les points (a), (b) et (c) sont établis dans les lemmes 1 à 5 ci-dessous. Le point (d) est une propriété classique de la transformation de Laplace qui découle immédiatement des propriétés rappelées dans la deuxième partie de ce texte. Le point (e) s'obtient par un argument classique de passage à la limite sous le signe somme. □

Lemme 1

(i) *Le système* (1_ε) *admet une unique solution série formelle* $\widehat{F}(x,\varepsilon) = \widehat{F}_0 + \sum_{i\geqslant 1} \widehat{F}_i \varepsilon^i$ *qui vérifie* $\widehat{F}_0 = I$ *et* $\widehat{F}_i(0) = 0$, $i \geqslant 1$. *On a en fait* $\widehat{F}_i(x) = O(x^2)$.

(ii) *Le système* $(\widetilde{1}_\varepsilon)$ *admet une unique solution série formelle* $\phi(\xi,\varepsilon) = \phi_0 + \sum_{i\geqslant 1} \phi_i(\xi)\varepsilon^i$, *qui vérifie* $\phi_0 = \delta I$ *et* $\phi_i(0) = 0$, $i \geqslant 1$.

(iii) *Les séries* ϕ_i *sont les transformées de Borel formelles de* $\widehat{F}_i$: $\phi_i = \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F}_i)$, $i \geqslant 1$.

Elles sont convergentes et elles admettent sur le domaine Δ *un prolongement analytique, que nous noterons encore* $\phi_i(\xi)$. *En outre,* $\phi_0 = \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{F}_0)$.

Démonstration. Les $\widehat{F}_i$ sont déterminées de proche en proche à partir de $\widehat{F}_0 = I$ comme unique solution vérifiant $\widehat{F}_i(0) = 0$ des systèmes

$$(1-i)\qquad \begin{bmatrix} x^2\frac{d}{dx}F_i^{(1,1)} & (x^2\frac{d}{dx}-(a_1-a_2))F_i^{(1,2)} \cdots \\ (x^2\frac{d}{dx}-(a_2-a_1))F_i^{(2,1)} & x^2\frac{d}{dx}F_i^{(2,2)} \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} = x^2BF_{i-1}.$$

Et l'hypothèse $\operatorname{diag} B(0) = 0$ (en fait $B^{(j,\ell)}(0) = 0$ si $a_j - a_\ell = 0$) entraîne $\widehat{F}_i(x) = O(x^2)$.

Les ϕ_i sont déterminés de proche en proche à partir de $\phi_0 = \delta I$ comme unique solution vérifiant $\phi(0) = 0$ des systèmes

$$(\widetilde{1-i})\qquad \begin{bmatrix} \xi\,\phi_i^{(1,1)} & (\xi-(a_1-a_2))\phi_i^{(1,2)} \cdots \\ (\xi-(a_2-a_1))\phi_i^{(2,1)} & \xi\phi_i^{(2,2)} \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} = (\widetilde{x^2B}) * \phi_{i-1}$$

déduits de $(1-i)$ par transformation de Borel.

Les mêmes conditions déterminent de toute évidence de vraies fonctions ϕ_i solutions analytiques sur Δ ; (la série $x^2B(x)$ étant convergente, sa transformée de Borel est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier). Par unicité, ce sont les sommes des séries précédentes. □

Remarque. Le point (iii) justifie du développement en série de ε, c'est-à-dire de la nécessité d'une perturbation : l'existence sur Δ d'une vraie fonction $\phi(\xi, \varepsilon)$ n'est pas évidente au vu du système $(\widetilde{1}_\varepsilon)$ et cela, même si on fixe $\varepsilon = 1$.

Nous allons montrer que les fonctions ϕ_i sont en module majorées sur Δ par des fonctions positives ψ_i dont la somme $\psi(\xi,\varepsilon) - \psi_0 = \sum_{i\geqslant 1} \psi_i(\xi)\varepsilon^i$ est analytique et à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini. D'où, à la fois l'existence de la fonction ϕ cherchée, son analyticité et sa croissance exponentielle à l'infini sur Δ. Pour cela on établit que $\psi(\xi, \varepsilon)$ est la transformée de Borel en x d'une fonction

$G(x,\varepsilon)$ solution d'un système sans point singulier en $x = 0$. (Sans l'hypothèse $\widehat{M} = I$ on obtiendrait un système à point singulier régulier en $x_0 = 0$ et on pourrait donc conclure de la même façon.)

Lemme 2

(1) *Le système*

$$(\widetilde{2_\varepsilon}) \qquad \begin{bmatrix} \xi\,\widetilde{G}^{(1,1)} & m\,\widetilde{G}^{(1,2)} & \cdots \\ m\,\widetilde{G}^{(2,1)} & \xi\,\widetilde{G}^{(2,2)} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \varepsilon\widetilde{(x^2|B|)} * \widetilde{G}.$$

(on remplace $\xi - (a_j - a_\ell)$ par m dans $(\widetilde{1_\varepsilon})$ lorsque $a_j - a_\ell \neq 0$) admet une unique solution série formelle

$$\psi(\xi,\varepsilon) = \psi_0 + \sum_{i\geqslant 1} \psi_i(\xi)\varepsilon^i$$

vérifiant $\psi_0 = \delta I$ et $\psi_i(0) = 0,\ i \geqslant 1$.

(2) *La série $\psi(\xi,\varepsilon) - \psi_0$ est à coefficients positifs et converge pour tout (ξ,ε). Notons encore $\psi(\xi,\varepsilon) - \psi_0$ sa somme et $\psi_i(\xi)$ celles des séries $\psi_i(\xi)$.*

(3) *Pour tout ε, la fonction $\psi(\xi,\varepsilon) - \psi_0$ est à croissance exponentielle d'ordre* 1 *quand ξ tend vers l'infini.*

Démonstration. Les séries $\psi_i(\xi)$ sont déterminées de proche en proche à partir de $\psi_0 = \delta I$ comme unique solution vérifiant $\psi_i(0) = 0$ des systèmes

$$(\widetilde{2-i}) \qquad \begin{bmatrix} \xi\psi_i^{(1,1)} & m\,\psi_i^{(1,2)} & \cdots \\ m\,\psi_i^{(2,1)} & \xi\psi_i^{(2,2)} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \widetilde{(x^2|B|)} * \psi_{i-1}.$$

Elles ont de toute évidence des coefficients positifs.

La série $\psi(\xi,\varepsilon)$ est la transformée de Borel de l'unique solution $\widehat{G}(x,\varepsilon) = \widehat{G}_0 + \sum_{i\geqslant 1} \widehat{G}_i(x)\varepsilon^i$ qui vérifie $\widehat{G}_0 = I$ et $\widehat{G}_i(0) = 0,\ i \geqslant 1$ du système

$$(2_\varepsilon) \qquad \begin{bmatrix} x^2\frac{d}{dx}G^{(1,1)} & m\,G^{(1,2)} & \cdots \\ m\,G^{(2,1)} & x^2\frac{d}{dx}G^{(2,2)} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \varepsilon\, x^2|B|G.$$

Or, quel que soit ε, l'origine $x = 0$ est un point ordinaire de ce système. La série $\widehat{G}(x, \varepsilon)$ est donc une série de x convergente. Par suite, sa transformée de Borel $\psi(\xi, \varepsilon)$ a un rayon de convergence infini et elle est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini. □

Lemme 3. *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^+ \cap \Delta$ on a les majorations*

$$|\phi_i(\xi)| \leqslant \psi_i(\xi) \qquad i \geqslant 1.$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur i en comparant les systèmes $(\widetilde{1-i})$ et $(\widetilde{2-i})$. □

Lemme 4. *Pour tout $\xi \in \Delta$ on a les majorations*

$$|\phi_i(\xi)| \leqslant \psi_i(\xi), \quad i \geqslant 1.$$

Démonstration. Soit θ' une direction quelconque et $\xi \in \Delta \cap d_{\theta'}$. On applique le lemme précédent au système (1_ε^*) déduit de (1_ε) par le changement variable $x \mapsto e^{-i\theta}x$. A ce système est associé le même système « majorant » (2_ε), d'où le résultat. □

Il résulte de ces quatre lemmes que la série $\phi(\xi, \varepsilon) - \phi_0 = \sum_{i \geqslant 1} \phi_i(\xi)\varepsilon^i$ définit pour tout ε, en particulier pour $\varepsilon = 1$, une vraie fonction solution de (1_ε) et à croissance exponentielle sur Δ. On peut donc énoncer (points (a), (b), et (c))

Lemme 5. *La série formelle $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{F}(\xi) - \delta I$ est convergente, sa somme admet un prolongement analytique sur Δ qui est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini.*

Références

[1] W. Balser, W. B. Jurkat & D. A. Lutz – « A general theory of invariants for meromorphic differential equations, part I : formal invariants », *Funkcialaj Ekvacioj* **22** (1979), p. 197–221.

[2] B. L. J. Braaksma – « Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations », I.M.A. Preprint Series 744, University of Minnesota (Minneapolis), 1990.

[3] H. Cartan – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables*, Hermann, Paris, 1961.

[4] ———, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967 & 1985.

[5] J. Ecalle – *Les fonctions résurgentes, Tome III*, Publications mathématiques d'Orsay, vol. 85-05, Université Paris Sud, 1985.

[6] ———, *L'accélération et ses applications*, Travaux en cours, Hermann, Paris, à paraître.

[7] A. R. Forsyth – *Theory of differential equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1959, Part III. Ordinary differential equations - Vol. 4.
[8] P. Henrici – *Applied and computational complex analysis. Vol. 2*, Wiley-Interscience Publications, 1977.
[9] M. Loday-Richaud – « Introduction à la multisommabilité », *Gazette des Mathématiciens (SMF)* **44** (1990), p. 41–63.
[10] B. Malgrange – « Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières », in *Singularités irrégulières, Correspondance et documents*, Documents mathématiques, vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 2007, p. 97–107.
[11] J. Martinet & J.-P. Ramis – « Théorie de Galois différentielle et resommation », (E. Tournier, éd.), Comput. Math. Appl., Academic Press, London, 1990, p. 117–214.
[12] ______, « Elementary acceleration and multisummability », *Annales de l'Institut Henri Poincaré, série A, Physique théorique* **54** (1991), p. 1–71.
[13] J. C. C. Martins – *Desenvolvimento sintótico e introduçâo ao cálculo diferencial resurgente*, IMPA, Rio de Janeiro, 1989.
[14] J.-P. Ramis – « Les séries k-sommables et leurs applications », in *Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory (Les Houches 1979)* (D. Iagolnitzer, éd.), Lectures Notes in Physics, vol. 126, Springer, 1980, p. 178–199.
[15] ______, « Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière », Preprint n° 45, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.
[16] ______, « Séries divergentes et théories asymptotiques », in *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 1991, p. 1–73.
[17] W. Wasow – *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Dover Publications, inc. & Interscience, 1965.

Michèle Loday-Richaud, Département de Mathématiques, Université de Paris XI 91405 Orsay Cedex, France