

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

RICHARD KENYON

## Pavages autosimilaires à similitudes

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 10 (1991-1992), p. 19-23

<[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1991-1992\\_\\_10\\_\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__19_0)>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

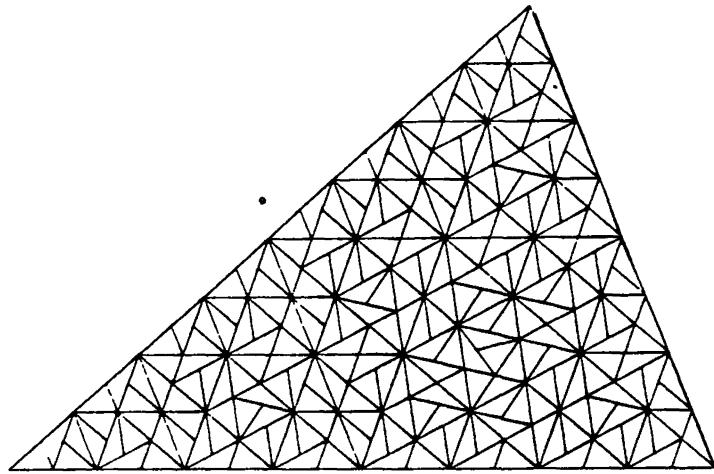
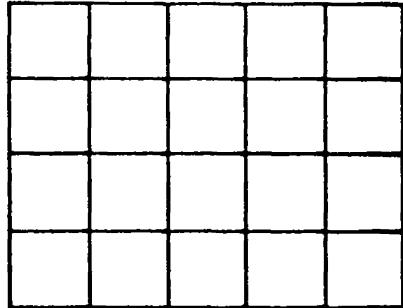
*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
http://www.numdam.org/*

## PAVAGES AUTOSIMILAIRES À SIMILITUDES

par *Richard KENYON*

Un pavage du plan est un recouvrement localement fini par des pavés : ensembles compacts, qui sont l'adhérence de leurs intérieurs, deux pavés ayant leurs intérieurs disjoints.

Il s'agit d'étudier les pavages qui ont la propriété dynamique suivante : une homothétie dilatante laisse invariant le pavage (après éventuelle subdivision des pavés). (Figure 1).



(  $\square \rightarrow \boxplus$  )

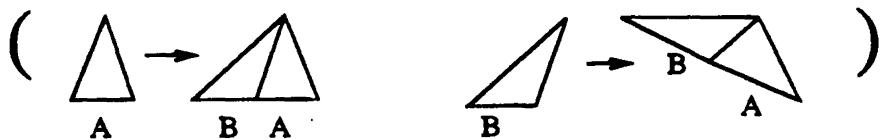


Figure 1 : Pavages autosimilaires à similitudes.

W.P. Thurston [2] a étudié le cas des pavages à translations, c'est-à-dire avec un nombre fini de pavés à translation près. Avec des hypothèses raisonnables, il y a des conditions très contraignantes sur les dilatations possibles. Il a démontré que  $\lambda$  est la dilatation d'un tel pavage si et seulement si  $\lambda$  est un entier algébrique, strictement plus grand en module que ses conjugués de Galois (à l'exception de  $\bar{\lambda}$ ).

On s'intéresse ici [1] à la même question pour les pavages à similitude près. (Théorème 4).

À un pavage du plan  $P$  ayant un nombre fini de pavés à similitude près, on associe un espace compact  $X = X(P)$  (le "pavage universel" de  $P$ ) de la façon suivante :

On appelle  $GP$  l'ensemble des pavages du plan  $gP$ , où  $g$  appartient au groupe  $G$  des similitudes du plan (applications complexes affines  $z \mapsto az + b$ ). Puis on définit  $X'$  comme ensemble des classes d'équivalence de  $GP$ , où  $gP \sim g'P$  si et seulement si  $gP$  et  $g'P$  diffèrent par une application complexe linéaire (une homothétie). On dit qu'un pavage est normalisé si l'ensemble des pavés contenant l'origine a mesure 1. Il existe des pavages normalisés dans chaque classe d'équivalence  $[gP]$ .

Il existe une topologie naturelle sur  $X'$  : un voisinage de base d'un pavage normalisé consiste en tous les pavages normalisés qui, après une petite translation, coïncident (à une homothétie près) avec ce pavage, dans  $B_R(0)$ , pour  $R$  grand donné.

Finalement,  $X$  est un compactifié de  $X'$  : on définit  $X$  comme ensemble des points limites des suites  $[g_i P] \in X'$  : une suite  $[g_i P]$  a une sous-suite pour laquelle les pavages normalisés convergent pour tout  $R > 0$  pour la métrique de Hausdorff sur les compacts de  $\overline{B_R(0)}$ ;  $X$  est l'ensemble des points limites de telles suites.

Une limite peut ne pas être un pavage dans notre sens, sauf près de l'origine. Voir exemples.

LEMME 1. —  $X$  est compact.

On dit que  $P$  a un nombre fini d'arrangements locaux si les pavés de  $P$  ne se recollent que d'un nombre fini de façons, et si pour chaque  $R > 0$  il y a un nombre borné de pavés dans la partie de  $[gP]$  (normalisé) contenue dans  $B_R(0)$ .

LEMME 2. — Si  $P$  a un nombre fini d'arrangements locaux, alors chaque point de  $X$  correspond à un pavage du plan (avec les mêmes types de pavés que  $P$ , à similitude près).

L'espace  $X$  est localement un produit d'un ouvert dans  $\mathbf{C}$  avec un espace  $S$  de dimension 0.  $X$  est feuilleté par des surfaces qui ont une structure complexe affine provenant de la structure affine de  $G$  agissant sur  $\mathbf{C}$ . Il y a une application de  $P$  dans  $X$  correspondant au sous-groupe de translations  $\mathbf{R}^2$  de  $G$  : l'image de  $x \in \mathbf{R}^2$  est la classe d'équivalence du pavage  $-x + P$ . L'image de  $P$  est incluse dans une seule feuille de  $X$ ; cette feuille est dense dans  $X$  par définition.

LEMME 3. — *Un pavage  $P$  qui a un nombre fini d'arrangements locaux est quasipériodique (c'est-à-dire que chaque arrangement local apparaît partout dans le pavage, et à une distance (normalisée) bornée de chaque point) si et seulement si toute feuille de  $X$  est dense dans  $X$ .*

**Exemples.**

Si  $P$  est périodique dans deux directions, alors  $X' = X$  est un tore.

Pour le pavage de la figure 2,  $P$  n'a pas un nombre fini d'arrangements locaux.

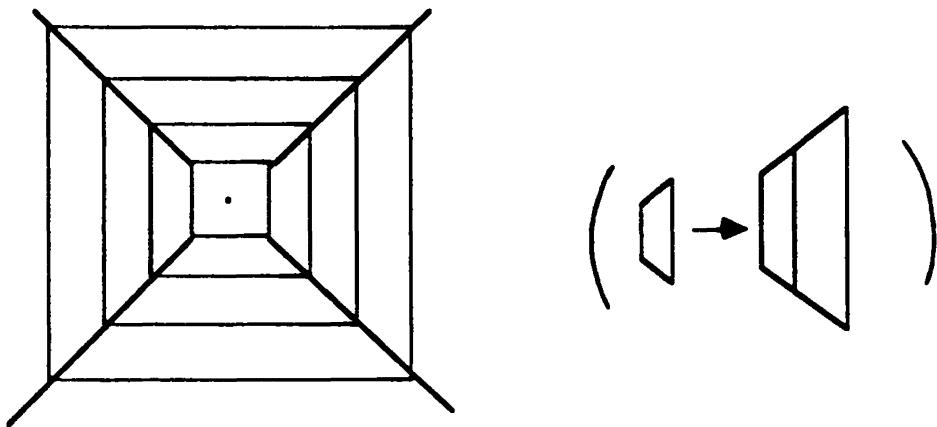


Figure 2 : Pavage avec un nombre infini d'arrangements locaux, avec motif de subdivision.

Pour la figure 3,  $P$  a un nombre fini d'arrangements locaux, mais n'est pas quasipériodique. Les feuilles de  $X$ , sauf une exception, sont toutes des cylindres, qui s'accumulent en une autre feuille de  $X$ , un tore correspondant au pavage périodique par des carrés.

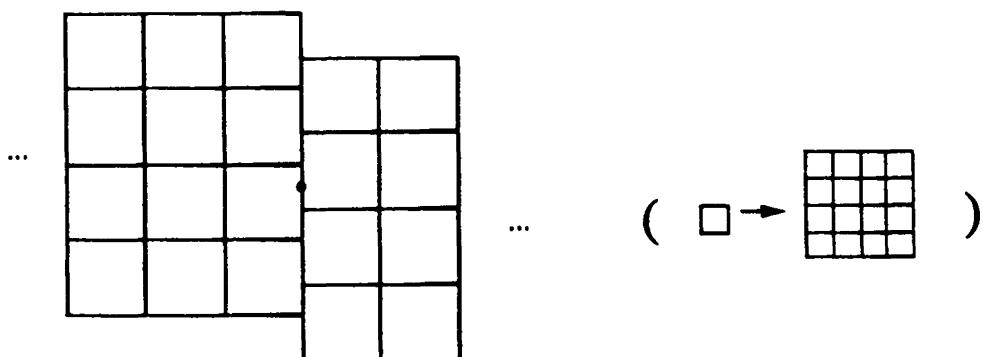


Figure 3 : Pavage non-quasipériodique, avec motif de subdivision.

**DÉFINITION.** — Un pavage  $P$  est autosimilaire s'il a un nombre fini d'arrangements locaux, s'il est quasipériodique et s'il est invariant par une homothétie dilatante. (L'image de chaque pavé recouvre exactement un ensemble de pavés.)

En particulier, il y a une application affine  $\varphi : X(P) \rightarrow X(P)$  dilatante sur les feuilles.  $\varphi$  est Anosov sur  $X$  et les pavés de  $P$  sont l'intersection de la feuille  $P \subset X$  avec les rectangles d'une partition de Markov pour  $\varphi$ .

**THÉORÈME 4.** — Soit  $P$  un pavage autosimilaire avec dilatation  $\varphi(z) = \lambda z$ . Alors  $\lambda$  est algébrique. Réciproquement, pour chaque  $\lambda \in \mathbb{C}$  algébrique,  $|\lambda| > 1$ , il existe un pavage autosimilaire à similitudes, invariant par  $\lambda$ .

Pour les détails, voir [1].

**Exemple.** — Pour le pavage autosimilaire de la figure 4, on code les pavés de la façon suivante : l'adresse d'un pavé est une suite  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots}$ ,  $x_i \in \{0, 1, \dots, 12\}$ . L'adresse du pavé couvrant l'origine est  $\{0, 0, \dots\}$ , et pour deux pavés  $T_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $T_2 = \{y_1, y_2, \dots\}$ , si  $T_1$  est couvert par  $\varphi(T_2)$  alors  $x_i = y_{i-1}$  pour  $i > 1$  et  $x_1$  décrit où se trouve  $T_1$  dans l'image de  $T_2$ . Donc  $\varphi$  agit comme décalage à droite sur les adresses des pavés.

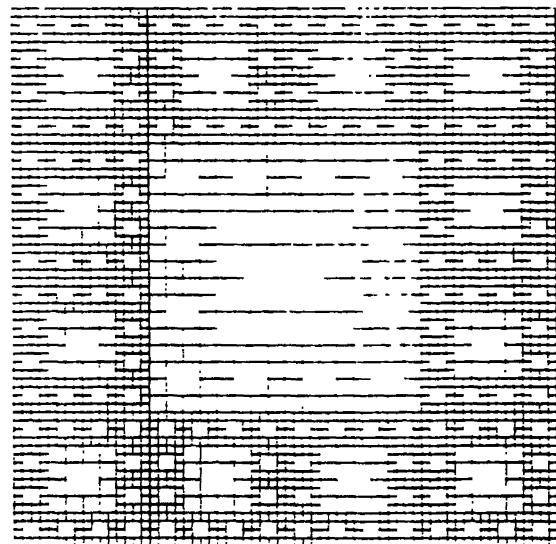
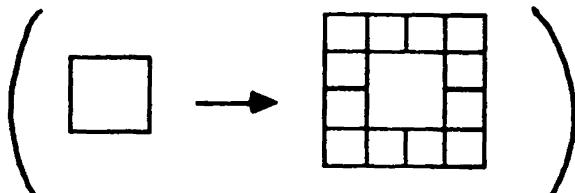


Figure 4 : Un pavage autosimilaire, avec motif de subdivision d'un pavé.

On voit que  $X$  est localement produit de  $\mathbb{C}$  par un Cantor  $\mathbb{Z}_{13}$ , l'ensemble des entiers 13-adiques. On peut même codifier chaque point de  $X$ , par une suite bi-infinie  $\{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$  telle que  $\varphi$  agit comme shift à droite. Avec ce codage, on voit que  $\varphi$  est un homéomorphisme d'Anosov.

### Bibliographie

- [1] R. KENYON. — *Inflationary tilings with a similarity structure*, Prépublication de l'Institut Fourier.
- [2] W. P. THURSTON. — *Groups, tilings, and finite state automata*, AMS colloquium lectures, 1990.

Richard KENYON  
INSTITUT FOURIER  
Laboratoire de Mathématiques  
URA188 du CNRS  
BP 74  
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)