SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PIERRE BÉRARD

Transplantation et isospectralité II

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 177-188

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__177_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1990–1991 (177–188)

TRANSPLANTATION ET ISOSPECTRALITÉ II

par *Pierre BÉRARD*

I. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

Soit N une variété riemannienne fermée. Soit Δ le laplacien agissant sur les fonctions C^∞. Le spectre du Laplacien est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies, appelée *spectre de la variété riemannienne N*

$$\operatorname{Spec} N = \{0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \nearrow +\infty\} .$$

Deux variétés riemanniennes isométriques ont bien sûr le même spectre – elles sont *isospectrales* – et une question naturelle qui se pose est de savoir si deux variétés isospectrales sont toujours isométriques. La réponse, on le sait, est non : il existe des couples de variétés riemanniennes isospectrales, non isométriques. Des exemples sporadiques de tels couples ont été donnés par J. Milnor (1964 : tores plats), M.F. Vignéras (1978 : variétés hyperboliques) et A. Ikeda (1980 : espaces lenticulaires). A partir de 1984, sont apparues des *constructions systématiques* (C. Gordon et E. Wilson : déformations isospectrales non triviales de variétés de dimension > 1; T. Sunada : couples de variétés isospectrales non isométriques), ...voir [BD 1] pour plus de détails. Le prototype des résultats obtenus est le théorème suivant, dû à T. Sunada ([SU]) :

1. THÉORÈME. — *Soit N une variété riemannienne sur laquelle un groupe fini G opère à gauche isométriquement. On suppose donnés deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 de G qui opèrent sur N sans points fixes et qui vérifient la condition*

$$(S) \qquad \forall\, g \in G,\ \#(\{g\}_G \cap \Gamma_1) = \#(\{g\}_G \cap \Gamma_2)$$

(ici $\#A$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble A; $\{g\}_G$ désigne la classe de conjugaison de g dans G). Alors, les quotients riemanniens $\Gamma_1\backslash N$ et $\Gamma_2\backslash N$ (avec les métriques obtenues par passage au quotient) sont isospectraux.

D. DeTurck et C. Gordon ([D-G]) ont étendu la construction de T. Sunada à des situations plus générales : ils considèrent G un groupe de Lie unimodulaire qui agit isométriquement sur une variété riemannienne complète M et des sous-groupes Γ_1, Γ_2, discrets, uniformes dans G, qui opèrent librement et proprement discontinûment sur M. La condition (S) du Théorème 1 ci-dessus est remplacée par la condition suivante ([D-G], Formule (1.17), p. 1073)

$$(DG) \qquad \forall\, g \in G, \quad r(G,\Gamma_1;g) = r(G,\Gamma_2;g)$$

avec $r(G,\Gamma;g) := \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \subset \{g\}_G} \rho^{(\gamma)}(C(\gamma,\Gamma)\backslash C(\gamma,G))$, où $\rho^{(\gamma)}$ est une mesure ad hoc, dont l'existence résulte du fait que le groupe $C(\gamma,G)$ est lui-même unimodulaire ([D-G], p. 1069 à 1072). Quand G est fini, $\rho^{(\gamma)}$ est la mesure de comptage et on retrouve la condition (S) de T. Sunada ([D-G], Formule (1.21), p. 1074).

Il est facile de voir que la condition (S) du théorème de T. Sunada traduit exactement l'équivalence des représentations de permutation du groupe fini G sur les quotients $\Gamma_1\backslash G$, *resp.* $\Gamma_2\backslash G$ ([BD 2]). On peut donc se demander : *la condition* (DG) *ci-dessus traduit-elle l'équivalence des représentations quasi-régulières* R_i *de* G *dans* $L^2(\Gamma_i\backslash G)$? La réponse est positive :

2. Proposition. — *Les sous-groupes discrets uniformes* Γ_1 et Γ_2 de G *vérifient la condition* (DG) *ci-dessus si et seulement si les représentations quasi-régulières* R_1 et R_2 *sont équivalentes.*

Ceci étant acquis, il est naturel de se demander si l'isospectralité des variétés $\Gamma_1\backslash M$ et $\Gamma_2\backslash M$ ([D-G], Theorem 1.16, p. 1072) résulte de l'existence d'un *opérateur de transplantation*, comme c'est le cas pour les variétés isospectrales construites avec le Théorème de T. Sunada (*cf.* [BD 2]).

3. Théorème. — *Soit* G *un groupe de Lie unimodulaire qui agit isométriquement sur une variété riemannienne complète* $(M,\mathbf{m})$. *Soient* Γ_1 et Γ_2 *deux sous-groupes discrets uniformes de* G *qui agissent sur* M *librement et proprement discontinûment. Si les sous-groupes* Γ_1 et Γ_2 *vérifient la condition* (DG) *ci-dessus, il existe un* opérateur de transplantation, *c'est-à-dire une isométrie* T *de* $L^2(\Gamma_1\backslash M, dv_{\mathbf{m}})$ *sur* $L^2(\Gamma_2\backslash M, dv_{\mathbf{m}})$ *qui induit une isométrie de* $H^k(\Gamma_1\backslash M,\mathbf{m})$ *sur* $H^k(\Gamma_2\backslash M,\mathbf{m})$, *pour tout entier* k *(espaces de Sobolev construits avec les dérivées covariantes successives et les normes ad hoc). En particulier, les variétés* $(\Gamma_1\backslash M,\mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash M,\mathbf{m})$ *sont isospectrales.*

4. Remarque. — En fait, la même méthode montre que les variétés ci-dessus sont fortement isospectrales au sens de [D-G]; en particulier, elles sont p-isospectrales (c'est-à-dire isospectrales pour les Laplaciens agissant sur les p-formes différentielles). Il est facile de voir, également, que la démonstration donnée dans le § III reste valable même si les groupes Γ_i n'agissent pas librement (le quotient est alors un "orbifold").

Dans le § IV, nous illustrons le Théorème 3 dans le cas où G est le groupe d'isométrie de $\mathbf{R}^n$ (*resp.* du groupe de Heisenberg H_n muni d'une métrique invariante à gauche) et où les sous-groupes Γ_i sont des sous-groupes discrets uniformes de $\mathbf{R}^n$ (*resp.* H_n).

5. HYPOTHÈSES. — Dans tout le reste de l'article, nous désignerons par G un groupe de Lie unimodulaire qui opère à gauche, par isométries, sur une variété riemannienne complète (M, m). Nous désignerons génériquement par Γ un sous-groupe discret uniforme (*i.e.* discret co-compact) de G qui agit de façon *libre et proprement discontinue* sur M avec un quotient $\Gamma\backslash M$ compact (cette dernière hypothèse n'est pas nécessaire dans l'Appendice).

Je remercie J.P. Labesse pour son aide à propos de la Proposition 2 ([LA]).

II. PREUVE DE LA PROPOSITION 2

Désignons par R_1 (*resp.* R_2) la représentation quasi-régulière de G sur $L^2(\Gamma_1\backslash G)$ (*resp.* $L^2(\Gamma_2\backslash G)$). Pour $\varphi \in C_0^\infty(G)$ on introduit aussi les opérateurs $R_i(\varphi)$, définis par

$$(1) \qquad \big(R_i(\varphi)f\big)(x) := \int_G \varphi(g)f(x\cdot g)dg$$

pour $f \in L^2(\Gamma_i\backslash G)$, $x \in \Gamma_i\backslash G$. Les opérateurs $R_i(\varphi)$ sont à trace ([J-L]).

Si les représentations R_1 et R_2 sont équivalentes, on a bien sûr $\operatorname{Trace} R_1(\varphi) = \operatorname{Trace} R_2(\varphi)$ pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Il résulte du lemme de la page 495 de [J-L], que la réciproque est vraie. Pour examiner l'équivalence éventuelle des représentations R_i, il suffit donc de considérer l'égalité des $\operatorname{Trace} R_i(\varphi)$. Il résulte des calculs faits dans [D-G] que l'on a, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(G)$,

$$\operatorname{Trace} R_i(\varphi) = \sum_{\{h\}_G\in\{G\}}\ \sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\{h\}_G} \rho^{(\gamma)}(C(\gamma,\Gamma)\backslash C(\gamma,G)) \int_{C(h,G)\backslash G} \varphi(x^{-1}hx)dx$$

où $\{h\}_G$ désigne la classe de conjugaison de $h \in G$, $\{G\}$ l'ensemble de ces classes, *etc.*

Il résulte immédiatement de cette formule que la condition (DG) du § I implique l'égalité des traces.

Remarque. — La mesure $\rho^{(\gamma)}$ qui apparaît dans la définition de $r(G,\Gamma;g)$ est bien définie parce que $\{g\}_G$ contient un élément de Γ (*cf.* [D-G] p. 1069). Si ce n'est pas le cas, $r(G,\Gamma;g)$ vaut 0 par définition.

2. LEMME. — *Pour tout ouvert relativement compact Ω de G, l'ensemble* $A_\Omega = \big\{\{\gamma\}_G \mid \gamma \in \Gamma \text{ et } \{\gamma\}_G \cap \Omega \neq \emptyset\big\}$ *est fini.*

Preuve. — Comme Γ est uniforme dans G, on peut écrire $G = \Gamma\mathcal{D}$, avec $\mathcal{D}$ relativement compact dans G. Si $x \in G$ est tel que $x^{-1}\gamma x \in \Omega$, on écrit $x = \gamma_1\delta$, avec $\gamma_1 \in \Gamma$ et $\delta \in \mathcal{D}$ et donc, $\gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1 \in \mathcal{D}\Omega\mathcal{D}^{-1}$, qui est relativement compact dans G, donc $\gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1 \in \mathcal{D}\Omega\mathcal{D}^{-1} \cap \Gamma$ qui est fini. ∎

Soit $\gamma_0 \in \Gamma$. On choisit Ω_0, un voisinage ouvert relativement compact de γ_0. Comme $\{\gamma_0\}_G \in A_{\Omega_0}$ qui est fini, on peut trouver une fonction positive ou nulle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ telle que $\varphi(\gamma_0) = 1$ et $\mathrm{Supp}\,\varphi \cap \{\gamma\}_G = \emptyset$ dès que $\{\gamma\}_G \neq \{\gamma_0\}_G$, $\gamma \in \Gamma$. On a alors,

$$\mathrm{Trace}\, R_i(\varphi) = r(G, \Gamma_i; \gamma_0) \int_{C(\gamma_0,G)\backslash G} \varphi(x^{-1}\gamma_0 x)dx$$

où l'intégrale est strictement positive à cause du choix de φ. Ceci démontre que la connaissance de $\mathrm{Trace}\, R_i(\varphi)$ détermine les $r(G, \Gamma_i, g)$. ∎

III. PREUVE DU THÉORÈME 3

1. Dans toute la suite, on suppose que la variété $\Gamma\backslash M$ est compacte; on suppose également, pour simplifier, que la mesure de Haar bi-invariante dg de G, est choisie de telle sorte que $\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G) = 1$.

Le groupe G agit sur $M_1 := M \times \Gamma\backslash G$ par $a \cdot (x, \bar{g}) := (a^{-1} \cdot x, \overline{ga})$ où $\bar{a}$ désigne la classe de $a \in G$ dans $\Gamma\backslash G$. En fait, on peut montrer que G agit proprement sur M_1 et que le quotient est homéomorphe à $\Gamma\backslash M$.

2. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses faites sur G et M, il existe une fonction $\theta \in C_0^\infty(M)$, $\theta \geqslant 0$, telle que pour tout $x \in M$, $\int_G \theta(g \cdot x)dg = 1$.*

Preuve. — Voir Appendice, Proposition 6. ∎

Dans ce qui suit, on notera encore θ la fonction θ, vue comme élément de $C_0^\infty(M_1)$; elle vérifie l'identité $\forall\, \xi = (x, \bar{a}) \in M_1$, $\int_G \theta(g \cdot \xi)dg = 1$.

3. NOTATIONS. — On pose $\mathcal{L}_0 = L^2_{\mathrm{loc}}(M_1)$ et on note $\mathcal{L}_0^G$ le sous-espace de $\mathcal{L}_0$ des fonctions invariantes par l'action de G sur M_1.

On munit $\mathcal{L}_0$ des semi-normes $p_\theta(f) = \left(\int_{M_1} \theta(x) f^2(x, \bar{a})dx d\bar{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $p_\Omega(f) = \left(\int_{\Omega\times\Gamma\backslash G} f^2(x, \bar{a})dx d\bar{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ (où Ω est un ouvert relativement compact de M).

4. LEMME. — *Si $\mathrm{Supp}\,\theta \subset \Omega \subset M$, les semi-normes p_θ et p_Ω sont équivalentes sur $\mathcal{L}_0^G$. De plus, si θ_1 et θ_2 sont toutes deux données par la Proposition 2, alors les semi-normes p_{θ_1} et p_{θ_2} sont égales. La semi-norme p_θ définit une norme sur $\mathcal{L}_0^G$.*

Preuve. — Il est clair qu'il existe une constante C telle que $p_\theta \leqslant C p_\Omega$. Soit

f une fonction sur M_1. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Gamma\backslash G} f^2(\xi)d\xi &= \int_{M_1} \mathbf{1}_\Omega(\xi)f^2(\xi)d\xi = \int_{M_1\times G} \mathbf{1}_\Omega(x)f^2(x,\bar{a})\theta(g\cdot x)dgdxd\bar{a}\\ &= \int_{M_1\times G} \mathbf{1}_\Omega(g^{-1}\cdot y)f^2\big(g\cdot(y,\bar{a}\cdot g^{-1})\big)\theta(y)dgdyd\bar{a}\\ &= \int_{M\times\Gamma\backslash G\times G} \mathbf{1}_\Omega(g^{-1}\cdot y)f^2(y,\bar{b})\theta(y)dgdyd\bar{b}\end{aligned}$$

en effet, G opère par isométries sur M, f et $d\bar{a}$ sont G-invariantes. Reste à montrer que l'intégrale $\int_G \mathbf{1}_\Omega(g^{-1}\cdot y)dg$ peut se majorer indépendamment de $y \in \Omega$. Cela résulte du fait que l'ensemble $\{g \in G \mid g\cdot\Omega\cap\Omega \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G (Appendice, Lemme 3).

La suite se démontre de manière analogue. ∎

5. Lemme. — *Si $f \in \mathcal{L}_0^G$, il existe une suite $f_n \in \mathcal{C}^G$ de fonctions continues, G-invariantes sur M_1, telles que $p_\theta(f - f_n)$ tende vers 0 quand n tend vers ∞.*

Preuve. — On choisit une fonction θ comme ci-dessus. Comme $f \in \mathcal{L}_0$, il existe une suite de fonctions continues φ_n sur M_1 telle que $p_\theta(f-\varphi_n)$ tende vers 0. On considère alors les fonctions sur M_1 définies par $f_n(x) = \int_G \theta(g\cdot x)\varphi_n(g\cdot x)dg$. Si le point x varie dans un compact $K \subset M_1$, l'intégration ci-dessus a lieu sur une partie relativement compacte de G (Appendice, Lemme 3) et l'on en déduit que $f_n \in \mathcal{C}^G$. On peut alors écrire : $f(x) - f_n(x) = \int_G \theta(g\cdot x)\big(f(g\cdot x) - \varphi_n(g\cdot x)\big)dg$ puisque $f \in \mathcal{L}^G$, d'où l'on déduit $|f(x) - f_n(x)|^2 \leqslant \int_G \theta(g\cdot x)|f(g\cdot x) - \varphi_n(g\cdot x)|^2dg$ puis, par intégration contre θdx, $p_\theta(f - f_n) \leqslant p_\theta(f - \varphi_n)$. ∎

6. Proposition. — *L'espace $L^2(\Gamma\backslash M)$ est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{L}_0^G$ muni de la norme p_θ introduite ci-dessus.*

Preuve. — D'après le lemme précédent, il suffit de considérer des fonctions continues. Soit f une fonction continue sur $\Gamma\backslash M$. On peut la voir comme une fonction continue sur M, Γ-invariante. On considère alors la fonction définie par : $F(x,g) := f(g\cdot x)$. C'est une fonction continue sur $M\times G$ qui passe au quotient en une fonction continue (encore notée F) sur $M\times\Gamma\backslash G$. On a alors : $F\big(g\cdot(x,\bar{a})\big) = F(g^{-1}\cdot x, \overline{ag}) = f(agg^{-1}\cdot x)$, d'où l'on déduit que $F \in \mathcal{C}^G(M_1)$.

Réciproquement, si $F \in \mathcal{C}^G(M_1)$, la fonction définie par : $f(x) = F(x, \overline{1_G})$ est continue sur M et Γ-invariante. On vérifie immédiatement que les applications ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. On a donc une bijection $\mathcal{B}$ entre les fonctions continues sur $\Gamma\backslash M$ et les fonctions continues G-invariantes sur M_1.

Si l'on applique la Proposition 2 ci-dessus au couple (Γ, M), on obtient une fonction $\sigma \in C_0^0(M)$, $\sigma \geqslant 0$, telle que $\sum_\Gamma \sigma(\gamma\cdot x) = 1$, pour tout x. Pour $x \in M$, et pour tout $g \in G$, posons $\sigma_x(g) = \sigma(g\cdot x)$. Alors (Appendice, Lemme 4), $\sigma_x \in C_0^0(G)$, et $\sum_\Gamma \sigma_x(\gamma g) = 1$, pour tout $g \in G$.

Pour toute fonction continue sur $\Gamma\backslash M$, vue comme fonction Γ-invariante sur

M, on a $\int_{\Gamma\backslash M} f(\bar{x})d\bar{x} = \int_M \sigma(x)f(x)dx$. On a un résultat analogue pour les fonctions continues sur $\Gamma\backslash G$, en remplaçant σ par l'une quelconque des fonctions σ_x. Soit maintenant F la fonction continue sur M_1, G-invariante, qui correspond à la fonction f : $F = \mathcal{B}(f)$. On peut alors écrire :

$$p_\theta(F)^2 = \int_{M_1} F^2(x,\bar{g})\theta(x)dxd\bar{g} = \int_M \Big(\int_G F^2(x,g)\sigma_x(g)dg\Big)\theta(x)dx$$

$$= \int_{M\times G} \theta(x)\sigma(g\cdot x)f^2(g\cdot x)dxdg = \Big(\int_M f^2(y)\sigma(y)\big(\int_G \theta(g^{-1}\cdot y)dg\big)dy\Big)$$

ce qui démontre l'égalité des normes L^2 de f et de F. ■

7. Notations. — On considère maintenant les semi-normes suivantes sur $C^\infty(M_1)$:

$$q_\Omega(f) = \Big(\int_{\Omega\times\Gamma\backslash G} (f^2(x,\bar{a}) + |\partial_x f(x,\bar{a})|^2)dxd\bar{a}\Big)^{1/2}, \text{ et}$$

$$q_\theta(f) = \Big(\int_{M_1} (f^2(x,\bar{a}) + |\partial_x f(x,\bar{a})|^2)\theta(x)dxd\bar{a}\Big)^{1/2}$$

où Ω est un ouvert relativement compact de M, où θ est une fonction donnée par la Proposition 2 ci-dessus, et où $\partial_x f(x,\bar{a})$ désigne la différentielle partielle, par rapport à la première variable, de la fonction f sur $M_1 = M \times \Gamma\backslash G$.

On désigne par $\mathcal{L}_1$ (ou encore par $H^1_{1,\mathrm{loc}}(M_1)$) le complété de $C^\infty(M_1)$ pour les semi-normes q_Ω quand Ω parcourt l'ensemble des ouverts relativement compacts de M (c'est un espace de Sobolev "partiel" par rapport à la première variable). On note $\mathcal{L}_1^G$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_1$ qui sont invariants sous l'action de G sur M_1.

Les résultats ci-dessous sont les analogues, pour $\mathcal{L}_1$, des résultats obtenus précedemment pour $\mathcal{L}_0$ (les démonstrations suivent essentiellement les mêmes lignes).

8. Lemme. — *Si* $\mathrm{Supp}\,\theta \subset \Omega \subset M$, *les semi-normes* q_θ et q_Ω *sont équivalentes sur* $\mathcal{L}_1^G$. *De plus, si* θ_1 et θ_2 *sont toutes deux données par la* Proposition 2, *alors les semi-normes* q_{θ_1} et q_{θ_2} *sont égales. La semi-norme* q_θ *définit une norme sur* $\mathcal{L}_1^G$.

9. Lemme. — *Si* $f \in \mathcal{L}_1^G$, *il existe une suite* $\varphi_n \in C^\infty(M_1)^G$ *(fonctions* C^∞ *sur* M_1, *invariantes par* G*) telle que* $q_\theta(f-\varphi_n)$ *tende vers* 0 *quand* n *tend vers* ∞ .

10. Proposition. — *L'espace* $H^1(\Gamma\backslash M)$ *est canoniquement isométrique à l'espace* $\mathcal{L}_1^G$ *muni de la norme* q_θ *définie ci-dessus.*

Preuve. — On voit facilement que l'application $\mathcal{B}$ (définie dans la preuve de la Proposition 6) réalise une bijection de $C^\infty(\Gamma\backslash M)$ sur $C^\infty(M_1)^G$ qui préserve les normes H^1 . ■

11. Il résulte du théorème de Fubini que l'espace $\mathcal{L}_0$(*resp.* $\mathcal{L}_1$) est isomorphe à l'espace $L^2_{\mathrm{loc}}(M, L^2(\Gamma\backslash G))$ $\big($*resp.* $H^1_{\mathrm{loc}}(M, L^2(\Gamma\backslash G))\big)$, via l'application donnée par

$\Phi(f) := \{x \longrightarrow f(x,\cdot)\}$.

Définissons une action A de G sur $L^2_{\mathrm{loc}}\big(M, L^2(\Gamma\backslash G)\big)$ par $\big(A(g)\cdot\varphi\big)(x) = R(g)\cdot(\varphi(g^{-1}\cdot x)$, où R désigne la représentation quasi-régulière de G sur $L^2(\Gamma\backslash G)$. On a alors : $\big(A(g)\cdot\Phi(f)\big)(x)(\bar a) = R(g)\big(\Phi(f)(g^{-1}\cdot x)\big)(\bar a) = f(g^{-1}\cdot x, \bar a\cdot g)$. Il en résulte que l'isomorphisme ci-dessus commute aux actions de G.

Fin de la preuve du Théorème I.3. — Il suffit d'appliquer ce qui précède et de remarquer que si les représentations quasi-régulières R_i de G sur les $L^2(\Gamma_i\backslash G)$ sont équivalentes, il existe une isométrie $T\ :\ L^2(\Gamma_1\backslash G) \longrightarrow L^2(\Gamma_2\backslash G)$ qui entrelace les R_i. Cette isométrie réalise une tranplantation de $L^2_{\mathrm{loc}}\big(M, L^2(\Gamma_1\backslash G)\big)^G$ sur $L^2_{\mathrm{loc}}\big(M, L^2(\Gamma_2\backslash G)\big)^G$ et donc, d'après ce qui précède, une transplantation de $L^2(\Gamma_1\backslash M)$ sur $L^2(\Gamma_2\backslash M)$. Cette transplantation induit également une isométrie au niveau des espaces de Sobolev H^1. ∎

IV. DEUX EXEMPLES

Dans ce paragraphe, nous donnons deux illustrations du Théorème I.3 dans un cadre maintenant classique : tores plats et variétés de Heisenberg.

A) Cas des tores plats.

On munit $\mathbf{R}^n$ de la structure euclidienne usuelle et on considère son groupe d'isométries $G = \mathbf{R}^n \rtimes O(n)$, produit semi-direct de $\mathbf{R}^n$ et de $O(n)$ $\big(\ (x,A)\cdot(y,B) = (x+Ay, AB)\ \big)$. On peut identifier un réseau Γ de $\mathbf{R}^n$ à un sous-groupe discret uniforme de G par $\Gamma \ni \gamma \to (\gamma, Id) \in G$. On a alors le

1. THÉORÈME. — *Soient Γ_1 et Γ_2 deux réseaux de $\mathbf{R}^n$.*

(i) Les représentations quasi-régulières de $\mathbf{R}^n$ sur $L^2(\Gamma_i\backslash\mathbf{R}^n)$ sont unitairement équivalentes si et seulement si $\Gamma_1 = \Gamma_2$;

(ii) Les repsésentations quasi-régulières du groupe d'isométries G de $\mathbf{R}^n$ sur $L^2(\Gamma_i\backslash G)$ sont unitairement équivalentes si et seulement si les tores plats $\Gamma_1\backslash\mathbf{R}^n$ et $\Gamma_2\backslash\mathbf{R}^n$ sont isospectraux.

Preuve. — L'assertion (i) est évidente : par décomposition en séries de Fourier, les deux représentations sont équivalentes si et seulement si les réseaux duals Γ_1^* et Γ_2^* sont égaux, d'où $\Gamma_1 = \Gamma_2$;

L'assertion (ii) est démontrée par D. DeTurck et C. Gordon ([D-G], Examples 1.20 (ii), p. 1074) par vérification de la condition (DG) du § I . On peut en donner une démonstration directe en décomposant la représentation quasi-régulière R de G sur $L^2(\Gamma\backslash G)$ quand Γ est un réseau de $\mathbf{R}^n$. On remarque que le tore $\Gamma\backslash\mathbf{R}^n$ agit à gauche sur $\Gamma\backslash G$; on en déduit la décomposition orthogonale (séries de Fourier) :

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{\lambda\in\Gamma^*} \mathcal{H}_\lambda, \text{ avec}$$

$$\mathcal{H}_\lambda = \{f \in L^2 \mid f\big((t, Id)\cdot(\bar{x}, A)\big) = e^{2i\pi\langle\lambda,\tau\rangle} f(\bar{x}, A)\}$$

et la représentation quasi-régulière R laisse les $\mathcal{H}_\lambda$ invariants. Il est facile de voir que la restriction de R à $\mathcal{H}_\lambda$ est équivalente à la représentation ρ_λ de G dans $L^2(O(n))$ donnée par :

$$\big(\rho_\lambda(\tau, \alpha)f\big)(A) = e^{2i\pi\langle\lambda, A(\tau)\rangle} f(A\alpha).$$

LEMME. — *Pour λ et $\mu \in \mathbf{R}^n$, les représentations ρ_λ et ρ_μ sont*
(i) équivalentes si $\| \lambda \| = \| \mu \|$;
(ii) étrangères sinon.

La preuve du lemme n'est pas difficile. L'assertion (i) est claire; pour l'assertion (ii), on prend le Laplacien de la fonction $t \longrightarrow \rho_\lambda(t, Id)f$, pour $f \in L^2(O(n))$ et on peut conclure. ∎

B) Cas des variétés de Heisenberg.

On désigne par H_n le groupe de Heisenberg de dimension $(2n+1)$. On appelle *variété de Heisenberg* toute variété de la forme $(\Gamma\backslash H_n, g)$ où la métrique g se remonte en une métrique invariante à gauche sur H_n et où Γ est un sous-groupe discret uniforme de H_n. C. Gordon a montré ([G] Proposition 2.16, p. 86) qu'il suffit de se limiter aux variétés de Heisenberg "de type $\mathcal{T}$" c'est-à-dire aux variétés $(\Gamma\backslash H_n, g)$ pour lesquelles la métrique g est représentée par une matrice diagonale de la forme $\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, 1)$ dans la base canonique de l'algèbre de Lie de H_n et pour lesquelles $\Gamma = \{\gamma(x, y, t) : (x, y) \in \mathcal{L} \text{ et } t \in c\mathbf{Z}\}$ où $c \in \mathbf{R}_+^*$ et où $\mathcal{L}$ est un réseau de $\mathbf{R}^{2n}$ tel que pour tous (x, y), $(x', y') \in \mathcal{L}$ on ait $\langle x, y'\rangle \in c\mathbf{Z}$ (le produit scalaire usuel de x et y' dans $\mathbf{R}^n$; cette condition garantit que Γ est bien un sous-groupe). Un tel groupe Γ est l'image par un automorphisme de H_n d'un groupe de type Γ_r unique avec $r = \{r_1, \dots r_n\}$ où les entiers naturels r_i vérifient les conditions de divisibilité $r_1 \mid r_2 \dots \mid r_n$ et où $\Gamma_r = r_1\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus r_n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \dots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ ([G-W] § 2, p. 254 et suivantes). On pose alors $\mid \Gamma \mid = r_1 \dots r_n$. L'analogue de l'assertion (i) du Théorème 1 ci-dessus est la

2. PROPOSITION. — *La représentation quasi-régulière R^Γ de H_n sur $L^2(\Gamma\backslash H_n)$, pour un groupe $\Gamma = \Gamma(\mathcal{L}, c)$, de type $\mathcal{T}$, se décompose en*

$$R^\Gamma = \bigoplus_{\tau\in\mathcal{L}^*} f_\tau \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}^*} \mid k \mid^n \mid \Gamma \mid \pi_{\frac{k}{c}}$$

où les f_τ et les π_a sont les représentations irréductibles usuelles de H_n ([G-W] Lemma 3.7, p. 259).

En particulier, les représentations R^Γ et $R^{\Gamma'}$ sont équivalentes si et seulement si les groupes Γ et Γ' sont égaux.

Etant donnée une métrique invariante à gauche g sur H_n, on peut considérer son groupe d'isométries. Si l'on pose

$$K_g = \{\Phi \in \mathrm{Aut}(H_n) : \Phi^* g = g\}$$

on a ([D-G], p. 1091)

PROPOSITION. — *Le groupe d'isométrie de (H_n, g) est le produit semi-direct $G = H_n \bowtie K_g$.*

Etant donnés une métrique g de type $\mathcal{T}$ sur H_n et deux sous-groupes discrets uniformes de type $\mathcal{T}$, Γ_1 et Γ_2 de H_n, on se pose la question de l'équivalence des représentations quasi-régulières du groupe d'isométrie G de (H_n, g) sur $L^2(\Gamma_i \backslash G)$.

Dans [G], C. Gordon donne une condition nécessaire pour que deux variétés de Heisenberg de type $\mathcal{T}$, $(\Gamma(\mathcal{L}, c)\backslash H_n, g)$ et $(\Gamma(\mathcal{L}', c')\backslash H_n, g)$ soient p-isospectrales pour tout p (c'est-à-dire isospectrales pour les Laplaciens opérant sur les p-formes différentielles). Cette condition ([G], Condition (P2), Lemma 5.2 et Lemma 5.3 p. 91) s'écrit :

$$\text{Il existe une bijection } \theta : \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}'^* \text{ telle que,}$$
$$\text{pour tout } \tau \in \mathcal{L}^*, \text{ il existe } \Phi \in K_g \text{ telle que } \theta(\tau) = \Phi^* \tau.$$

Dans [D-G] (Appendix A p. 1089), D. DeTurck et C. Gordon montrent que les variétés de Heisenberg p-isospectrales construites dans [G] vérifient toutes la conditions (DG) du § I. On peut préciser ce résultat par le

3. THÉORÈME. — *Les représentations quasi-régulières R^{Γ} et $R^{\Gamma'}$ de $G = H_n \bowtie K_g$ sur $L^2(\Gamma(\mathcal{L}, c)\backslash G)$ et $L^2(\Gamma(\mathcal{L}', c')\backslash G)$ sont équivalentes si et seulement si*

(i) $c = c'$, et

(ii) les réseaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ vérifient la condition ci-dessus.

Preuve. —

La preuve n'est pas difficile, mais elle est un peu longue, aussi n'en donnerons nous qu'un résumé. Dans tout ce qui suit, on note G le groupe d'isométrie $H_n \bowtie K_g$ de (H_n, g) et on désigne par $\Gamma = \Gamma(\mathcal{L}, c)$ un sous-groupe discret uniforme de type $\mathcal{T}$. Etant donné $\gamma \in \Gamma$, on note L_γ la multiplication à gauche par γ dans G (ou dans H_n) et L_γ^* l'action associée sur les fonctions. On note R^{Γ} l'action de G sur les fonctions sur $\Gamma\backslash G$: $(R^{\Gamma}(g_1)f)(\bar{g}) = f(\overline{gg_1})$.

On peut identifier $L^2(\Gamma\backslash G)$ à l'espace $\mathcal{H} = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(G) \mid L_\gamma^* f = f, \forall \gamma \in \Gamma\}$. Le centre Z de H_n agit à gauche sur $\mathcal{H}$; on en déduit la décomposition orthogonale

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{h \in \mathbf{Z}} \mathcal{H}_k$$

$$\mathcal{H}_k = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(G) \mid \forall \gamma \in \Gamma,\ L_\gamma^* f = f \text{ et } \forall t \in Z,\ L_t^* f = e^{2i\pi \frac{k}{c} t} f\}$$

où les espaces $\mathcal{H}_k$ sont laissés invariants par R^{Γ}.

a) Analyse de R^{Γ} agissant sur $\mathcal{H}_0$.

Etant donnés τ une forme linéaire sur l'algèbre de Lie de H_n, nulle sur le centre, et $\gamma(\xi,\eta,\zeta)$ dans H_n, on note $\tau(\xi,\eta) = \tau \circ log(\gamma(\xi,\eta,\zeta))$. On identifie les éléments de $\mathcal{L}^*$ à des formes linéaires sur l'algèbre de Lie de H_n, nulles sur le centre. Le tore $\mathcal{L}\backslash\mathbf{R}^n$ agit par L^* sur $\mathcal{H}_0$ et on en déduit la décomposition orthogonale :

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{\tau\in\mathcal{L}^*} \mathcal{H}_{0,\tau}$$
$$\mathcal{H}_{0,\tau} = \{f \in \mathcal{H} \mid L^*_{\gamma(\xi,\eta,\zeta)}f = e^{2i\pi\tau(\xi,\eta)}f\}$$

et on peut identifier $\mathcal{H}_{0,\tau}$ à $\mathbf{C}f_\tau \otimes L^2(K_g)$, où f_τ est le caractère de H_n associé à $\tau \in \mathcal{L}^*$. La restriction de R^{Γ} à $\mathcal{H}_{0,\tau}$ est unitairement équivalente à la représentation ρ_τ de G dans $L^2(K_g)$ donnée par :

$$\big(\rho_\tau(\delta,\alpha)F\big)(\varphi) = e^{2i\pi\varphi^*\tau(\delta)}F(\varphi\alpha).$$

On peut alors vérifier le

4. LEMME. — *Etant données deux formes linéaires τ et σ sur l'algèbre de Lie de H_n, nulle sur le centre, les représentations ρ_τ et ρ_σ définies ci-dessus sont :*

(i) équivalentes s'il existe $\Phi \in K_g$ telle que $\Phi^*\tau = \sigma$;

(ii) étrangères sinon.

b) Analyse de R^{Γ} agissant sur $\mathcal{H}_k, k \neq 0$.

Notons $\mathcal{L}_1$, *resp.* $\mathcal{L}_2$ les projections du réseau $\mathcal{L}$ sur le premier, *resp.* le second facteur de la décomposition $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$. La condition *pour tous (x,y), $(x',y') \in \mathcal{L}$ on a $\langle x,y'\rangle \in c\mathbf{Z}$*, imposée à $\mathcal{L}$, permet de montrer que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des réseaux. Considérant alors l'action $L^*_{\gamma(0,y,0)}$ sur les fonctions de $L^2_{\mathrm{loc}}(G)$, on obtient :

5. LEMME.

(i) $L^*_{\gamma(0,y,0)}, y \in \mathbf{R}^n$ laisse stable $\mathcal{H}_k$ si et seulement si $y \in \frac{c}{k}\mathcal{L}_1^*$;

(ii) on a la décomposition orthogonale

$$\mathcal{H}_k = \bigoplus_{b\in\mathcal{L}_2^* \bmod \frac{k}{c}\mathcal{L}_1} \mathcal{H}_{k,b}$$
$$\mathcal{H}_{k,b} = \{f \in \mathcal{H}_k \mid L^*_{(0,y,0)}f = e^{2i\pi\langle b,y\rangle}f\}.$$

On montre ensuite le

6. LEMME. — *L'espace $\mathcal{H}_{k,b}$ est isométrique (à un facteur près) à l'espace $L^2(\mathbf{R}^n \times K_g)$. De plus,*

(i) $R^{\Gamma} \mid \mathcal{H}_k$ et $R^{\Gamma} \mid \mathcal{H}'_k$ sont étrangères si et seulement si $k \neq k'$;

(ii) $R^{\Gamma} \mid \mathcal{H}_{k,b}$ et $R^{\Gamma} \mid \mathcal{H}_{k,b'}$ sont équivalentes pour tous $b, b' \in \mathcal{L}_2^*$; elles sont alors équivalentes à $\pi_{\frac{k}{c}} \otimes \rho$ sur $L^2(\mathbf{R}^n \times K_g)$, où ρ est la représentation régulière de K_g.

Ceci achève la preuve du Théorème 3. ■

APPENDICE

Le but de cet appendice est d'établir les résultats utilisés dans les paragraphes précédents. Sans doute ces résultats sont-ils connus; ne les ayant pas localisés dans la littérature, nous en esquissons les démonstrations.

Rappelons les hypothèses : M est une variété riemannienne complète sur laquelle le groupe G (localement compact, unimodulaire) agit à gauche par isométries; Γ est un sous-groupe discret uniforme de G qui agit sur M librement et proprement discontinûment.

1. LEMME. — *Etant donnés $x \in M$ et une suite $\{\gamma_n\}$ d'éléments de Γ, la suite $\{\gamma_n \cdot x\}$ ne peut converger dans M que si la suite $\{\gamma_n\}$ est constante à partir d'un certain rang.*

Preuve. — Si la suite $\{\gamma_n \cdot x\}$ converge vers $y \in M$, on considère les deux cas $y \in \Gamma \cdot x$ et $y \notin \Gamma \cdot x$; on en tire une contradiction avec le fait que le groupe Γ agit de façon libre et proprement discontinue sur M. ■

2. LEMME . — *Soient K_1, K_2 deux compacts de M. Alors, l'ensemble $A_\Gamma(K_1, K_2) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est fini.*

Preuve. — Par l'absurde en utilisant le Lemme 1. ■

3. LEMME . — *Soient K_1, K_2 deux compacts de M. Alors, l'ensemble $A_G(K_1, K_2) := \{g \in G \mid g \cdot K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est relativement compact dans G.*

Preuve. — On utilise le fait que Γ est uniforme et on écrit $G = \Gamma\mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est compact dans G, puis on utilise le Lemme 2. ■

4. LEMME. — *Pour $x \in M$ (fixé), l'application $R_x : G \longrightarrow M$, $g \longrightarrow g \cdot x$, est propre.*

Preuve. — On écrit $R_x^{-1}(K) = A_G(\{x\}, K)$ et on utilise le Lemme 3. ■

5. PROPOSITION. — *Le groupe G agit proprement sur M. La projection canonique $p : M \longrightarrow G\backslash M$ est continue et ouverte. De plus, l'espace topologique $G\backslash M$ est séparé et localement compact (il est compact si $\Gamma\backslash M$ l'est).*

Preuve. — Classique. ■

6. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses faites sur G et M, il existe une fonction $\theta \in C^\infty(M)$, $\theta \geqslant 0$ telle que, pour tout compact $K \subset G\backslash M$, $p^{-1}(K) \cap \mathrm{Supp}\theta$ est compact dans M , et pour tout $x \in M$, $\int_G \theta(g \cdot x) dg = 1$ (si*

$G\backslash M$ est compact, alors θ est à support compact).

Preuve. — Du fait que M est une variété, donc localement compacte et dénombrable à l'infini, on déduit qu'il en est de même pour $G\backslash M$ et en particulier que cet espace est paracompact. Considérant des familles $\{U_x \subset U'_x\}_{x\in M}$ d'ouverts relativement compacts de M, et leurs projections sur $G\backslash M$, on trouve deux recouvrements ouverts localement finis, $\{V_i\}$ et $\{V'_i\}$, $i \in \mathbf{N}$ de $G\backslash M$, avec $\overline{V_i} \subset V'_i$ et deux familles localement finies d'ouverts relativement compacts de M, $\{W_i\}$, $\{W'_i\}$, avec $\overline{W_i} \subset W'_i$, $p(W_i) = V_i$, $p(W'_i) = V'_i$.

On peut donc trouver des fonctions $\varphi_i \in C_0^\infty(W'_i)$, avec $\varphi_i \equiv 1$ sur W_i. La fonction donnée par $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x)$ est bien définie et C^∞. L'assertion sur le support suit du choix des W'_i. Appliquant le Lemme 4, on voit que l'intégrale $\widetilde{\varphi}(x) = \int_G \varphi(g\cdot x)dg$ existe pour tout $x \in M$ (en fait on intègre sur un compact de G) et on voit que $\varphi > 0$ (car $\{V_i\}$ est un recouvrement de $G\backslash M$). On pose alors $\theta(x) = \varphi(x)/\widetilde{\varphi}(x)$, qui a les propriétés requises. Cette preuve s'inspire de la preuve du Lemme de la page 18 de [BR]. ■

Bibliographie

[BD 1] BÉRARD P. — *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Astérisque, **177-178** (1989), 127–154.

[BD 2] BÉRARD P. — Transplantation et Isospectralité I., à paraître dans Math. Annalen 1992.

[BR] BRUHAT F. — *Représentations des groupes localement compacts*, Ec. Normale Sup. Paris, 1971.

[D-G] DETURCK D., GORDON S. — *Isospectral Deformations II : Trace Formulas, Metrics, and Potentials*, Comm. Pure Appl. Math., **42** (1989), 1067–1095.

[GO] GORDON S. — *Riemannian manifolds isospectral on functions but not on 1-forms*, J. Differential Geom., **24** (1986), 79–96.

[G-W] GORDON S., WILSON E. — *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds*, Michigan Math. J., **33** (1986), 253–271.

[J-L] JACQUET, H. - LANGLANDS, R. — *Automorphic Forms on $GL(2)$*, Lecture Note in Math. n° 114 Springer, 1970.

[LA] LABESSE J. P. — Lettre, 27 Novembre 90.

[SU] SUNADA T. — *Riemannian Coverings and Isospectral Manifolds*, Annals of Math., **121** (1985), 169–186.

Pierre BÉRARD
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
pberard@frgren81.bitnet