

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GEORGE D. RAIKOV

L'asymptotique des valeurs propres pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel périodique perturbé

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 133-139

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__133_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC UN POTENTIEL PÉRIODIQUE PERTURBÉ

par *George D. RAIKOV*

1. Introduction

Soit $W \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 2$, une fonction périodique sur un réseau Γ tel que \mathbb{R}^m/Γ soit compact. Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ une perturbation qui vérifie les estimations

$$|D^\beta V(x)| \leq c_\beta \langle x \rangle^{-\alpha-|\beta|}, \quad \langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{1/2}, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^m, \quad (1)$$

pour un $\alpha \in (0, 2)$ et des constantes positives c_β .

Sur l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^m)$, on considère l'opérateur de Schrödinger

$$\mathcal{H} = -\Delta + W + V$$

qui est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Comme la multiplication par V est relativement compacte par rapport à Δ , le spectre essentiel $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H})$ de l'opérateur \mathcal{H} ne dépend pas de V , et coïncide avec le spectre $\sigma(\mathcal{H}_0)$ de l'opérateur

$$\mathcal{H}_0 := -\Delta + W$$

qui est purement continu. Il est bien connu que $\sigma(\mathcal{H}_0)$ a une structure des bandes, c'est-à-dire on a

$$\sigma(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell$$

où I_ℓ sont des intervalles compacts qui peuvent être disjoints ou se recouvrir. On note $(\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$, $k = 0, 1, \dots, K$, les trous dans $\sigma(\mathcal{H}_0)$ telles que

$$\mathbb{R} \setminus \sigma(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{k=0}^K (\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+), \quad \mathcal{E}_k^+ < \mathcal{E}_{k+1}^-, \quad k = 0, 1, \dots, K \leq \infty.$$

Puisque $m \geq 2$, le nombre K est fini dans le cas général (cf. [SKR]), mais ce n'est pas essentiel pour le problème considéré ici. Remarquons que le premier trou $(\mathcal{E}_0^-, \mathcal{E}_0^+)$ est semi-infini, c'est-à-dire $\mathcal{E}_0^- = -\infty$. Le but de cet exposé est l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur \mathcal{H} près d'un point fixé \mathcal{E}_0^+ ou \mathcal{E}_k^\pm , $k = 1, \dots, K$.

2. Quelques faits de la théorie de Bloch

Pour formuler notre résultat principal, il faut rappeler brièvement quelques faits de la théorie de Bloch.

On note Ω le domaine fondamental du tore \mathbb{R}^m/Γ . Soit Γ^* le réseau dual de Γ . Alors Ω^* désigne le domaine fondamental du tore dual \mathbb{R}^m/Γ^* . Le domaine Ω^* est connu dans la littérature physique comme la zone de Brillouin.

Pour $\theta \in \overline{\Omega^*}$ fixé on introduit l'opérateur

$$\mathfrak{h}_\theta := -\Delta + W \quad (2)$$

avec le domaine

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^m/\Gamma) \cong L^2(\Omega) : u_\theta \in H^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)\}$$

où $u_\theta(x) := \exp\{-i\theta \cdot x\} u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, et $H^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)$ est l'espace de Sobolev habituel sur la variété \mathbb{R}^m/Γ .

L'opérateur \mathfrak{h}_θ est auto-adjoint et elliptique dans $L^2(\mathbb{R}^m/\Gamma)$. Soit

$$E_1(\theta) \leq E_2(\theta) \leq E_3(\theta) \leq \dots$$

la suite des valeurs propres de \mathfrak{h}_θ , $\theta \in \overline{\Omega^*}$. Evidemment, toutes les fonctions $E_\ell(\theta)$, $\ell \geq 1$, sont continues sur $\overline{\Omega^*}$. En effet, ces fonctions sont analytiques sur \mathbb{R}^m/Γ^* hors d'un fermé des points du branchement.

On introduit l'espace hilbertien

$$\mathfrak{L} := \frac{1}{\text{vol } \Omega^*} \int_{\mathbb{R}^m/\Gamma^*} \oplus L^2(\mathbb{R}^m/\Gamma) d\theta \quad (3)$$

et l'opérateur

$$\mathfrak{s}_0 := \frac{1}{\text{vol } \Omega^*} \int_{\mathbb{R}^m/\Gamma^*} \oplus \mathfrak{h}_\theta d\theta \quad (4)$$

qui est auto-adjoint dans \mathfrak{L} . On définit l'opérateur $U : L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathfrak{L}$ par

$$(Uf)(x; \theta) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp\{-i\theta \cdot \gamma\} f(x + \gamma), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^m). \quad (5)$$

L'opérateur U est isométrique et on a

$$U\mathcal{H}_0U^* = \mathfrak{s}_0.$$

Alors on peut décrire les bandes de $\sigma(\mathcal{H}_0)$ explicitement :

$$I_\ell = E_\ell(\overline{\Omega^*}), \quad \ell \geq 1.$$

De plus, chacun des points \mathcal{E}_k^- , $k = 1, \dots, K$, (respectivement, \mathcal{E}_k^+ , $k = 0, \dots, K$) de la frontière du $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H})$ coïncide avec la valeur maximale (respectivement, minimale) d'une fonction $E_\ell(\theta)$, $\ell \geq 1$.

Nous disons que la valeur \mathcal{E}_k^\pm est régulière si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) il n'y a qu'une fonction $E_{k_0}^\pm(\theta)$ de la suite $\{E_\ell(\theta)\}_{\ell \geq 1}$ qui prend la valeur \mathcal{E}_k^\pm ;
- ii) la fonction $E_{k_0}^\pm(\theta)$ prend la valeur \mathcal{E}_k^\pm aux points isolés $\theta_{k;j}^\pm$, $j = 1, \dots, J_k^\pm < \infty$;
- iii) la matrice

$$\mathcal{M}_k^\pm(\theta) := \{\mathcal{M}_{k;r,s}^\pm(\theta)\}_{r,s=1}^m$$

où

$$\mathcal{M}_{k;r,s}^\pm(\theta) := \pm \partial^2 E_{k_0}^\pm(\theta) / \partial \theta_r \partial \theta_s, \quad r, s = 1, \dots, m,$$

est définie-positive aux points $\theta = \theta_{k;j}^\pm$, $j = 1, \dots, J_k^\pm$.

Les valeurs propres de la matrice inverse de $\mathcal{M}_k^\pm(\theta_{k;j}^\pm)$ sont connues dans la littérature physique comme étant les masses effectives aux points $\theta = \theta_{k;j}^\pm$, $j = 1, \dots, J_k^\pm$.

3. Enoncé du résultat principal

Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace hilbertien. Soit $g \subset \mathbb{R}$ un ouvert tel que le spectre de T sur g soit purement discret. Alors $N(g|T)$ désigne le nombre des valeurs propres de T situées sur g , chacune étant comptée suivant sa multiplicité.

Soit $(\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$, $k = 0, 1, \dots, K$ un trou dans $\sigma(\mathcal{H}_0) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H})$. On se donne $\mathcal{E} \in (\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$ fixé, et pour tout $\lambda > 0$ assez petit on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k^-(\lambda) &:= N(\mathcal{E}_k^- + \lambda, \mathcal{E}|\mathcal{H}), \quad k = 1, \dots, K, \\ \mathcal{N}_k^+(\lambda) &:= N(\mathcal{E}, \mathcal{E}_k^+ - \lambda|\mathcal{H}), \quad k = 0, \dots, K. \end{aligned}$$

Le théorème suivant contient deux assertions indépendantes suivant respectivement le signe supérieur ou le signe inférieur dans les signes doubles “ \pm ” et “ \mp ”.

THÉORÈME PRINCIPAL. — *On suppose que W est périodique sur le réseau Γ et V satisfait (1). De plus, on suppose que l'estimation*

$$\text{vol}\{x \in \mathbb{R}^m : \mp V(x) > \mu\} \geq c\mu^{-m/\alpha} \quad (6)_\pm$$

est vérifié pour avec une constante positive c , pour tout $\mu > 0$ assez petit et avec le même $\alpha \in (0, 2)$ comme dans (1).

Soit $(\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$, $k = 0, 1, \dots, K$, un trou dans $\sigma(\mathcal{H}_0)$. On suppose que la valeur \mathcal{E}_0^+

ou \mathcal{E}_k^\mp , $k = 1, \dots, K$, est régulière. Alors on a

$$\mathcal{N}_k^\pm(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{j=1}^{J_k^\pm} \text{vol}\{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad (7)_\pm$$

$$\frac{1}{2}(\mathcal{M}_k^\pm(\theta_{k;j}^\pm)\theta, \theta) \pm V(x) < -\lambda\}(1 + o(1)), \lambda \downarrow 0,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire engendré par la métrique euclidienne.

On déduit de l'inégalité (1) avec $\beta = 0$ et de l'estimation (6) $_\pm$ que la quantité à la droite de la relation (7) $_\pm$ est de l'ordre $\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}$ lorsque $\lambda \downarrow 0$.

Des formules asymptotiques qui ressemblent à (7) $_\pm$ mais concernent le cas $m = 1$ ont été obtenues par Zelenko [ZEL] sous des hypothèses trop restrictives. Une amélioration considérable de ces résultats a été annoncée par Khryachtchov [KHR] qui considérait aussi seulement le cas $m = 1$.

Il y a une littérature importante concernant l'asymptotique de $N(-\infty, -\lambda | -\Delta + V)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$ dans le cas $m \geq 2$, c'est-à-dire l'asymptotique des valeurs propres isolées de l'opérateur \mathcal{H} avec $W = 0$ (cf. [ROZ], [TAM]). Par exemple, le résultat suivant qui sera utilisé plus loin.

PROPOSITION. — *Soit $m \geq 2$. On suppose que V satisfait (1). De plus, on suppose que l'estimation (6) $_+$ est vérifiée. Alors on a*

$$\begin{aligned} N(-\infty, -\lambda | -\Delta + V) &= \\ &= (2\pi)^{-m} \text{vol}\{(x, \theta) \in T^*\mathbb{R}^m : |\theta|^2 + V(x) < -\lambda\}(1 + o(1)), \quad \lambda \downarrow 0. \end{aligned}$$

Finalement, nous remarquons que nos résultats sont analogues aux résultats de Deift, Hempel [DE-HE], Alama, Deift, Hempel [AL-DE-HE], Gesztesy, Simon [GE-SI] et Hempel [HE]. Mais ces auteurs étudient l'asymptotique lorsque $g \rightarrow \infty$ du nombre des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta + W - tV$, $V \geq 0$, qui traversent un niveau d'énergie $\mathcal{E} \in (\mathcal{E}_k^-, \mathcal{E}_k^+)$ fixé lorsque le paramètre t croît de zéro à la valeur g .

4. Résumé de la démonstration du théorème principal

On propose un résumé de la démonstration du théorème principal pour le cas d'un minimum \mathcal{E}_k^+ , $k = 1, \dots, K$. Pour simplifier, on suppose que la valeur \mathcal{E}_k^+ est prise par la fonction $E_{k_0}^+(\theta)$ en un seul point $\theta_k \in \Omega^*$.

D'abord, on utilise l'opérateur U (cf. (5)) pour montrer que l'opérateur \mathcal{H} est équivalent unitairement à l'opérateur

$$\mathfrak{s} := \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{B}$$

où \mathfrak{s}_0 est introduit dans (4) et \mathfrak{B} est défini par

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}g)(x, \theta) &= \\ &= \frac{1}{\text{vol } \Omega^*} \sum_{\gamma \in \Gamma} V(x + \gamma) \int_{\mathbb{R}^m / \Gamma^*} \exp\{i(\theta' - \theta \cdot \gamma)g(x, \theta')\} d\theta', \quad g \in \mathfrak{L}, \end{aligned}$$

(cf. (3)). Donc, on a

$$\mathcal{N}_k^+(\lambda) := N(\mathcal{E}, \mathcal{E}_k^+ - \lambda | \mathfrak{s}). \quad (8)$$

Puis, on introduit la fonction propre $\varphi(x, \theta) \in L^\infty(\Omega \times \Omega^*)$ de l'opérateur h_θ (cf. (2)) associée à la valeur propre $E_{k_0}^+(\theta)$, telle que

$$\varphi(x, \theta) = \exp\{ix \cdot \theta\} \psi(x, \theta) \quad (9)$$

où $\psi(\cdot, \theta) \in H^2(\mathbb{R}^m / \Gamma)$ pour chaque $\theta \in \Omega^*$ (en effet, $\psi(\cdot, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R}^m / \Gamma)$, $\forall \theta \in \Omega^*$). On suppose que $\psi(\cdot, \theta)$ dépend de θ analytiquement dans un voisinage de θ_k par rapport à la topologie de $L^2(\mathbb{R}^m / \Gamma)$. En outre, on suppose qu'on a

$$\int_{\Omega} |\varphi(x, \theta)|^2 dx = \int_{\Omega} |\psi(x, \theta)|^2 dx = 1, \quad \forall \theta \in \Omega^*.$$

L'existence des fonctions propres qui possèdent ces propriétés est montrée dans [WILC].

On prolonge $\psi(x, \theta)$ par périodicité pour tous $x \in \mathbb{R}^m$, et on prolonge la fonction $\varphi(x, \theta)$ selon (9).

On définit l'opérateur $\Phi : L^2(\Omega^*) \rightarrow L^2(\Omega^*)$ par

$$(\Phi u)(\theta) = \frac{1}{\text{vol } \Omega^*} \int_{\Omega^*} \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\varphi(x, \theta')} V(x) \varphi(x, \theta) u(\theta') dx d\theta', \quad u \in L^2(\Omega^*). \quad (10)$$

On pose

$$\mathcal{R}(\lambda) := -(E_{k_0}^+(\theta) - \mathcal{E}_k^+ + \lambda)^{-1/2} \Phi (E_{k_0}^+(\theta) - \mathcal{E}_k^+ + \lambda)^{-1/2}. \quad (11)$$

On obtient les estimations

$$\begin{aligned} &\pm N(\mathcal{E}, \mathcal{E}_k^+ - \lambda | \mathfrak{s}) \leq \\ &\leq \pm N(1 \mp \varepsilon, \infty | \mathcal{R}(\lambda)) + 0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}), \quad \lambda \downarrow 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1). \end{aligned} \quad (12)_{\pm}$$

Pour les avoir, on définit le projecteur orthogonal $P : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$ par

$$(Pg)(x, \theta) = \varphi(x, \theta) \int_{\Omega} \overline{\varphi(x', \theta')} g(x', \theta) dx', \quad g \in \mathfrak{L},$$

et on pose $Q := \text{Id} - P$. Alors on a

$$\mathfrak{s} = P\mathfrak{s}P + Q\mathfrak{s}Q + P\mathfrak{B}Q + Q\mathfrak{B}P. \quad (13)$$

L'opérateur $P\mathfrak{s}P$, avec comme domaine $P\mathfrak{L}$ est équivalent unitairement à $E_{k_0}^+ + \Phi$ et on a

$$\begin{aligned} N(\mathcal{E}, \mathcal{E}_k^+ - \lambda | E_{k_0}^+ + \Phi) &= N(\mathcal{E} - \mathcal{E}_k^+ + \lambda, 0 | E_{k_0}^+ - \mathcal{E}_k^+ + \lambda + \Phi) = \\ &= N(-\infty, 0 | E_{k_0}^+ - \mathcal{E}_k^+ + \lambda + \Phi) + 0(1), \quad \lambda \downarrow 0, \end{aligned} \quad (14)$$

et par le principe de Birman-Schwinger, on obtient

$$N(-\infty, 0 | E_{k_0}^+ - \mathcal{E}_k^+ + \lambda + \Phi) = N(1, \infty | \mathcal{R}(\lambda)). \quad (15)$$

D'autre part, le spectre essentiel de l'opérateur QsQ avec le domaine $\mathcal{L}_1 := Qb(s)$ est situé hors du fermé $[\mathcal{E}, \mathcal{E}_k^-]$ et, par conséquent, on a

$$N(\mathcal{E}, \mathcal{E}_k^+ - \lambda | QsQ|_{\mathcal{L}_1}) = 0(1), \quad \lambda \downarrow 0. \quad (16)$$

Maintenant, les estimations $(12)_{\pm}$ résultent de $(13) - (16)$; la présence de deux derniers termes dans (13) entraîne l'apparition du nombre $\varepsilon \neq 0$ et du reste $0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha})$ dans $(12)_{\pm}$.

L'étape suivante est la localisation par rapport à θ . Plus précisément, on choisit un domaine quelconque $\mathcal{O} \subset \Omega^*$ tel que $\theta_k \in \mathcal{O}$ et on définit l'opérateur $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\lambda)$ par analogie avec $\mathcal{R}(\lambda)$ (cf. (10) - (11)) en remplaçant Ω^* par \mathcal{O} . Alors on a

$$\begin{aligned} \pm N(1 \mp \varepsilon, \infty | \mathcal{R}(\lambda)) &\leq \pm N(1 \mp \varepsilon', \infty | \mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\lambda)) + \\ &+ 0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}), \quad \lambda \downarrow 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad \forall \varepsilon' \in (\varepsilon, 1). \end{aligned} \quad (17)_{\pm}$$

On choisit des coordonnées sur \mathcal{O} telles que $\theta_k = 0$, et on introduit l'opérateur

$$\bar{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda) := - \left(\frac{1}{2} (\mathcal{M}_k^+(\theta_k)\theta, \theta) + \lambda \right)^{-1/2} \bar{\Phi}_{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{2} (\mathcal{M}_k^+(\theta_k)\theta, \theta) + \lambda \right)^{-1/2} \quad (18)$$

où l'opérateur $\bar{\Phi}_{\mathcal{O}}$ est défini par

$$(\bar{\Phi}_{\mathcal{O}}u)(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i(\theta' - \theta) \cdot x\} V(x) u(\theta') dx d\theta', \quad u \in L^2(\mathcal{O}). \quad (19)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \pm N(1 \mp \varepsilon, \infty | \mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\lambda)) &\leq \pm N(1 \mp \varepsilon', \infty | \bar{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda)) + \\ &+ 0(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}), \quad \lambda \downarrow 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad \forall \varepsilon' \in (\varepsilon, 1). \end{aligned} \quad (20)_{\pm}$$

Pour vérifier $(20)_{\pm}$, on écrit

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(x, \theta)} \varphi(x, \theta') &\equiv \exp\{i(\theta' - \theta) \cdot x\} \overline{\psi(x, \theta)} \psi(x, \theta') = \\ &= \exp\{i(\theta' - \theta) \cdot x\} / \text{vol } \Omega + \\ &\exp\{i(\theta' - \theta) \cdot x\} \left(\sum_{\gamma' \in \Gamma^*} \overline{\psi_{\gamma'}(\theta)} \psi_{\gamma'}(\theta') - \text{vol } \Omega \right) / (\text{vol } \Omega)^2 + \\ &+ \sum_{\gamma' \in \Gamma^*, \gamma'' \in \Gamma^*, \gamma' \neq \gamma''} \exp\{i(\theta' - \theta + \gamma' - \gamma'') \cdot x\} \overline{\psi_{\gamma'}(\theta)} \psi_{\gamma''}(\theta') / (\text{vol } \Omega)^2 \end{aligned}$$

où

$$\psi_{\gamma'}(\theta) := \int_{\Omega} \exp\{i\gamma' \cdot x\} \psi(x, \theta) dx, \quad \gamma' \in \Gamma^*, \quad \theta \in \bar{\Omega}^*.$$

Les deux derniers termes à droite sont négligeables : le premier d'entre eux est égal à zéro pour $\theta = \theta'$, et les gradients par rapport à x des fonctions de phase $(\theta' - \theta + \gamma' - \gamma'') \cdot x$ dans le deuxième terme ne s'annulent pas si $\text{diam } \mathcal{O}$ est assez petit. De plus, ici on a utilisé la relation $\text{vol } \Omega \text{ vol } \Omega^* = (2\pi)^m$.

Finalement, on introduit l'opérateur $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)$ par analogie avec $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda)$ (cf. (18) – (19)) en remplaçant le domaine \mathcal{O} par \mathbb{R}^m , et on vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} \pm N(1 \mp \varepsilon, \infty | \tilde{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}(\lambda)) &\leq \pm N(1 \mp \varepsilon', \infty | \tilde{\mathcal{R}}(\lambda)) + \\ &+ O(\lambda^{-m(2-\alpha)/2\alpha}), \quad \lambda \downarrow 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1), \quad \forall \varepsilon' \in (\varepsilon, 1). \end{aligned} \quad (21)_{\pm}$$

Le principe de Birman-Schwinger implique que

$$N(1 - \varepsilon, \infty | \tilde{\mathcal{R}}(\lambda)) = N(-\infty, -\lambda | -\Delta + (1 - \varepsilon)^{-1} \tilde{V}), \quad \forall \varepsilon \in (-1, 1), \quad (22)_{\pm}$$

où $\tilde{V}(x) = V\left(\left(\frac{1}{2}\mathcal{M}_k^+(\theta_k)\right)^{1/2} x\right)$.

En combinant (8), (12) $_{\pm}$, (17) $_{\pm}$ et (20) $_{\pm}$ – (22) $_{\pm}$ et en appliquant le résultat de la proposition, on obtient (7) $_{\pm}$.

Bibliographie

- [AL-DE-HE] ALAMA S., DEIFT P.A., HEMPEL R. — *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$* , Commun. Math. Phys., **121** (1989), 291–321.
- [DE-HE] DEIFT P.A., HEMPEL R. — *On the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$* , Commun. Math. Phys., **103** (1986), 461–490.
- [GE-SI] GESZTESY F., SIMON B. — *On a theorem of Deift and Hempel*, Commun. Math. Phys., **116** (1988), 503–505.
- [HE] HEMPEL R. — *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H \pm \lambda W$ in a spectral gap of H* , J. Reine Angew. Math., **399** (1989), 38–59.
- [KHR] KHRYASHCHEV S.V. — *Asymptotics of the discrete spectrum of the perturbed Hill operator*, Zap. Nauchn. Seminarov LOMI, **147** (1985), 188–189 (en russe); J. Sov. Math. **37** (1987) 908–909.
- [ROZ] ROZENBLJUM G.V. — *An asymptotic of the negative discrete spectrum of the Schrödinger operator*, Mat. Zametki, **21** (1977), 399–407 (en russe); Math. Notes **21** (1977) 222–227.
- [SKR] SKRIGANOV M.M. — *Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators*, Trudy Mat. Inst. Steklov, **171** (1985), 122 pp. (en russe).
- [TAM] TAMURA H. — *Asymptotic formulas with sharp remainder estimates for bound states of Schrödinger operators*, J. d'Anal. Math., **I:40** (1981), 166–182; **II:41** (1982) 85–108.
- [WILC] WILCOX C.H. — *Theory of Bloch waves*, J. d'Anal. Math., **33** (1978), 146–167.
- [ZEL] ZELENKO L.B. — *Asymptotic distribution of the eigenvalues in a lacuna of the continuous spectrum of a perturbed Hill operator*, Mat. Zametki, **20** (1976), 341–350 (en russe); Math. Notes **20** (1976) 750–755.

G. D. RAIKOV

Section of Mathematical Physics
Institute of Mathematics
Bulgarian Academy of Sciences
P.O.B. 373
1090 Sofia (Bulgaria)