

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

## Calcul du spectre de certaines nilvariétés compactes de dimension 3

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 2 (1983-1984), exp. n° 5, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1983-1984\\_\\_2\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1983-1984__2__A5_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

1983-1984

## CALCUL DU SPECTRE DE CERTAINES NILVARIÉTÉS COMPACTES DE DIMENSION 3

Exposé de Yves COLIN DE VERDIÈRE

Le but de cet exposé est le calcul du spectre du laplacien d'une variété riemannienne compacte  $M = \Gamma \backslash G$  où  $G$  est le groupe de Heisenberg de dimension 3 muni d'une métrique invariante à gauche et  $\Gamma$  un sous-groupe discret opérant par translation à gauche sur  $G$ .

Après avoir décrit de façon précise les variétés  $M$  en question, le calcul repose sur le lemme algébrique classique qui permet le calcul du spectre de l'oscillateur harmonique  $\Omega = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 x^2$ .

Il serait intéressant de généraliser ces calculs à des quotients d'autres groupes nilpotents et éventuellement de mettre ainsi en évidence certaines déformations isospectrales explicites de variétés riemanniennes compactes.

### 1. DESCRIPTION DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES.

Soit  $G$  le groupe des matrices  $3 \times 3$  à coefficients réels de la forme  $g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on notera aussi  $g = \langle x, y, z \rangle$ . Ce groupe  $G$  est le groupe de Heisenberg de dimension 3.

On a :

$$\langle x, y, z \rangle \langle x', y', z' \rangle = \langle x+x', y+y', z+z'+xy' \rangle$$

et donc, avec des notations évidentes :

$$g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = \langle 0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1 \rangle .$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  des champs de vecteurs invariants à gauche est engendrée par  $X = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $Z = \frac{\partial}{\partial z}$  qui admet pour base duale  $\xi = dx$ ,  $\eta = dy$ ,  $\zeta = dz - xdy$ .

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0 \quad ; \quad [X, Y] = Z .$$

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  qui opère par translation à gauche et tel que  $M = \Gamma \backslash G$  est compacte. Soit

$$\Gamma_k = \{ \langle \sqrt{2\pi}kn_1, \sqrt{2\pi}n_2, 2\pi n_3 \rangle \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \}$$

où  $k$  est un entier  $\geq 1$ , on a le :

THEOREME. - Il existe un  $k$  unique et un automorphisme  $\varphi$  de  $G$  tel que  $\varphi(\Gamma) = \Gamma_k$  :  $M$  est difféomorphe à  $\Gamma_k \backslash G$  pour un certain  $k$ . Ce  $k$  est un invariant topologique de  $M$  (il se calcule à partir du groupe fondamental  $\pi_1(M)$ ).

Détermination de  $k$  : soit  $C = \{ \langle 0, 0, t \rangle \mid t \in \mathbb{R} \}$  le centre de  $G$ ,  $Z_0 = \Gamma \cap C$ ,  $Z_1 = [\Gamma, \Gamma] \subset Z_0$ , on a  $k = [Z_0 : Z_1]$ .

La démonstration du théorème n'est pas difficile. On peut utiliser des automorphismes de l'algèbre de Lie en travaillant sur des relèvements par  $\exp^{-1}$  de générateurs convenables de  $\Gamma$ .

Description de  $M$  : soit  $E = G/C \approx \mathbb{R}^2$  et  $\tilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma \cap C \subset E$ , alors  $E/\tilde{\Gamma}$  est un tore de dimension 2. L'application naturelle  $\pi : M \rightarrow E/\tilde{\Gamma} = T$  est une fibration en cercles. La fibre de 0 est  $C/Z_0 \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et on a  $\pi(\langle x, y, z \rangle) = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$ .

Métriques riemanniennes : soit  $g$  une métrique riemannienne invariante à gauche sur  $G$  ;  $g$  s'écrit

$g = P(dx, dy) + t^2(dz - xdy + Adx + Bdy)^2$  . En faisant opérer les translations à droite de  $G$  , on obtient des variétés  $P_k \backslash G$  2 à 2 isométriques :  $(R_{\gamma_0}(\Gamma \cdot g) = \Gamma g \gamma_0)$  et

$$R_{\gamma_0}^*(g) = P(dx, dy) + t^2(dz - (x+x_0)dy + y_0dx + Adx + Bdy)^2 .$$

En prenant  $y_0 = -A$  et  $x_0 = B$  , on obtient :

$$R_{\gamma_0}^*(g) = P(dx, dy) + t^2(dz - xdy)^2 ;$$

$$R_{\gamma_0}^*(g) = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2 + t^2(dz - xdy)^2 .$$

On est ainsi ramené à étudier  $M = \Gamma_k \backslash G$  où  $G$  est muni de la métrique  $g = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2 + t^2(dz - xdy)^2$  . La fibration précédente  $M \rightarrow T$  est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.  $T$  est le tore plat  $\mathbb{R}^2 / \overline{\Gamma}_k$  avec

$\overline{\Gamma}_k = \{(\sqrt{2\pi}kn_1, \sqrt{2\pi}kn_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  muni de la métrique

$adx^2 + 2bdxdy + cdy^2$  . Les fibres  $C/Z_0$  sont de longueurs  $2\pi t$  .

Calcul des volumes : soit  $\delta = \sqrt{ac - b^2}$  ,  $\text{vol}(M) = 4\pi^2 kt \delta$   
 $\text{vol}(T) = 2\pi k \delta$  .

Question : soit  $M$  une variété riemannienne compacte localement isométrique au groupe de Heisenberg  $G$  de dimension 3 muni d'une métrique invariante à gauche,  $M$  est-elle globalement isométrique à une variété  $\Gamma_k \backslash G$  du type précédent.

2. CALCUL DU SPECTREa. Un lemme.

Soit  $A$  un opérateur fermé non borné sur un espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$ ,  $A^*$  son adjoint et  $B = A^*A$  avec  $D(B) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D(A^*)\}$ , il n'est pas difficile de voir que  $B$  est autoadjoint, en fait c'est l'extension de Friedrichs de la forme quadratique fermée de domaine  $D(A)$  définie par  $q(x) = \|Ax\|^2$ . On suppose que  $[A, A^*] = c \cdot \text{Id}$  avec  $c \neq 0$  et que  $B$  est à résolvante compacte, alors le spectre de  $B$  peut être ainsi décrit : les espaces propres sont tous de même dimension et le spectre est

- (i) si  $c > 0$ ,  $\text{Sp}(B) = \{0, c, 2c, 3c, \dots\}$   
(ii) si  $c < 0$ ,  $\text{Sp}(B) = \{-c, -2c, -3c, \dots\}$ .

Remarque : si  $c = 0$ ,  $A$  est autoadjoint et on ne peut rien dire de plus que  $\text{Sp}(B) \subset [0, +\infty[$ .

Preuve. - Si  $E_\lambda$  est un espace propre de  $B$  de valeur propre  $\lambda$ , alors :

$$A(E_\lambda) \subset E_{\lambda-c} \quad ; \quad A^*(E_\lambda) \subset E_{\lambda+c} \quad ; \quad A^*A|_{E_\lambda} = \lambda \text{Id} \quad ;$$

$$AA^*|_{E_\lambda} = (\lambda+c) \text{Id} .$$

En effet, par exemple, de  $A^*A\varphi = \lambda\varphi$ , on tire  $A^*AA\varphi = (AA^*-c)A\varphi = (\lambda-c)A\varphi$  (si  $\varphi \in E_\lambda$ ). Donc, si  $\lambda$  est valeur propre de  $B$ ,  $A$  est un isomorphisme de  $E_\lambda$  sur  $E_{\lambda-c}$  sauf si  $\lambda = 0$  et  $A^*$  est un isomorphisme de  $E_\lambda$  sur  $E_{\lambda+c}$  sauf si  $\lambda+c = 0$ .

Soit  $c > 0$  : si  $\lambda_0$  valeur propre de  $B$ ,  $\lambda_0 - c, \dots, \lambda_0 - kc$  sont d'autres valeurs propres, jusqu'à ce qu'on arrive à  $0$  : on doit donc arriver à  $0$  (car  $B \geq 0$ ), c'est-à-dire que  $\text{Sp}(B) = \{0, c, 2c, \dots\}$  avec des espaces propres isomorphes.

Le cas  $c < 0$  se traite de façon analogue.

b. Utilisation du lemme.

Calcul du laplacien :

$$\text{soit } \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1}, \text{ on a :}$$

$$\Delta = -\left(AX^2 + B(XY + YX) + CY^2 + \frac{Z^2}{t^2}\right).$$

En effet, cet opérateur est symétrique, à coefficients réels, à symbole principal  $g^*$  et  $\Delta 1 = 0$ .

On peut encore écrire  $\Delta$  sous la forme :

$$\Delta = -\left(\chi^2 + \psi^2 + \frac{Z^2}{t^2}\right), \text{ avec } \chi = \sqrt{A}X + \frac{B}{\sqrt{A}}Y \text{ et } \psi = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{A}}Y$$

et donc :

$$\begin{cases} [\chi, \psi] = \frac{1}{\delta} Z \\ [\chi, Z] = [\psi, Z] = 0 \end{cases}$$

on pose alors :

$$\square = -(\chi^2 + \psi^2)$$

et on a :

$$[\square, Z] = 0.$$

Le calcul du spectre de  $\Delta$  se fait à partir de celui du spectre joint de  $\square$  et  $Z$

$$\text{Spectre}(Z) = \{im \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \square = (\chi + i\psi)(-\chi + i\psi) - \frac{i}{\delta} Z$$

donc, avec une notation évidente :

$$\begin{aligned} \square_m &= (\chi + i\psi)(-\chi + i\psi) + \frac{m}{\delta}, \\ \Delta_m &= (\chi + i\psi)(-\chi + i\psi) + \frac{m}{\delta} + \frac{m^2}{t^2}. \end{aligned}$$

Spectre de  $\Delta_0$  : les fonctions correspondantes sont constantes sur les fibres,  $\text{Spectre}(\Delta_0) = \text{Spectre}(T)$  : c'est le spectre du tore plat  $\mathbb{R}^2 / \overline{\Gamma}_k$ .

Spectre de  $\Delta_m$  ( $m \neq 0$ ) :

soit  $A = -\mathcal{X} + i\mathcal{Y}$ ,  $A^* = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$ , on a :

$$\Delta_m = A^*A + \frac{m}{\delta} + \frac{m^2}{t^2} \quad \text{et} \quad [A, A^*] = -2i[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \frac{2m}{\delta} \text{Id} .$$

Donc si  $m > 0$ ,  $\text{Sp}(\Delta_m) = \left\{ \frac{m}{\delta}(2\ell+1) + \frac{m^2}{t^2} \mid \ell = 0, 1, 2, \dots \right\}$ ,

si  $m < 0$ ,  $\text{Sp}(\Delta_m) = \left\{ \frac{|m|}{\delta}(2\ell+1) + \frac{m^2}{t^2} \mid \ell = 0, 1, 2, \dots \right\}$ .

Les multiplicités ne dépendent que de  $m$  et  $g$ , mais pas de  $\ell$ .

Pour les calculer, on utilise l'asymptotique de Weyl en remarquant que  $\Delta_m$  s'identifie au laplacien sur les sections d'un fibré en droites complexes sur  $T$  et donc :

$$\# \{ \text{valeurs propres de } \Delta_m \leq \lambda \} \sim \frac{\text{aire}(T)}{4\pi} \lambda = \frac{k\delta}{2} \lambda .$$

Donc, si  $\nu_m$  est la multiplicité :

$$\nu_m \times \# \left\{ \ell \mid \frac{(2\ell+1)|m|}{\delta} \leq \lambda \right\} \sim \frac{k\delta}{2} \lambda ,$$

ce qui donne

$$\boxed{\nu_m = k \cdot m} .$$

Pour résumer, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Spectre}(\Delta) = \text{Spectre}(T) \cup \left\{ \frac{m}{\delta}(2\ell+1) + \frac{m^2}{t^2} \mid \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ \ell = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \\ \text{chacune de ces valeurs propres étant de multiplicité } 2km \end{array}}$$

En particulier, la plus petite valeur propre non nulle de  $M$  est donnée par :

$$\lambda_1(M) = \inf \left\{ \lambda_1(T), \frac{1}{\delta} + \frac{1}{t^2} \right\} .$$