

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PETER GREENBERG

## **Les espaces de bracelets et les complexes de Stasheff**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 9 (1990-1991), p. 111-118

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1990-1991\\_\\_9\\_\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__111_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

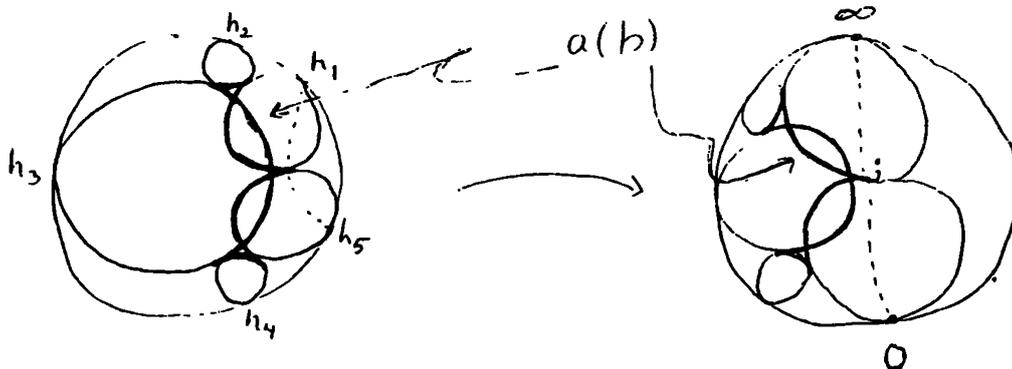
Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES ESPACES DE BRACELETS ET LES COMPLEXES DE STASHEFF

par *Peter GREENBERG*

## I. Introduction

Soit  $\mathbf{H}$  le demi-plan supérieur (un disque dans toutes nos figures). Un *bracelet* est un ensemble fini d'horocercles  $b = \{h_1, \dots, h_{n+1}\}$  tel que les points à l'infini des  $h_i$  sont dans l'ordre trigonométrique, et tel que  $h_i$  est tangent à  $h_{i+1}$ , et  $h_{n+1}$  est tangent à  $h_1$ .



**Fig. 1** – Normalisation d'un bracelet

Etant donné un bracelet  $b = \{h_1, \dots, h_{n+1}\}$  il existe une unique isométrie de  $\mathbf{H}$  dont l'image de  $h_1 = \{z \mid \text{Im } z = 1\}$  et dont l'image de  $h_{n+1}$  est tangente à  $0$ ; alors  $h_1 \cap h_{n+1} = \{i\}$  et  $[-\infty, 0]$  est partagé en  $n$  intervalles par les points à l'infini des  $h_i$ . L'espace de tels bracelets "normalisés" s'appelle  $B_n$ . On veut le comprendre.

On observe d'abord que  $B_n$  est une variété  $C^\infty$ , difféomorphe à  $\mathbf{R}^{n-2}$ . Or, les points à l'infini des  $h_i$ ,  $2 \leq i \leq n-1$ , varient librement et leur configuration dans  $\partial\overline{\mathbf{H}}$  fixe le bracelet. Nous allons étudier la topologie d'un certain sous-espace de  $B_n$ .

Soit  $b \in B_n$ , et soit  $a(b)$  l'arc fermé "horocercle par morceaux" qui parcourt les  $h_i$  entre les points d'intersection avec  $h_{i-1}$  et  $h_{i+1}$  (voir fig. 1, où  $a(b)$  est plus foncé). On trouve que la longueur de  $a(b)$  est une fonction de Morse sur  $B_n$ , avec un seul point singulier, un minimum, le bracelet symétrique invariant par une isométrie de  $\mathbf{H}$  d'ordre

$n + 1$ . La longueur de cet  $a(b)$  minimal est  $2(n + 1) \cos(\pi/n + 1)$  (voir l'Appendice).

Si l'arc  $a(b)$  est simple (sans points d'autointersection) on dit que  $b$  est *propre*. Le sous-espace de  $B_n$  (évidemment ouvert) des bracelets propres s'appelle  $B_n^p$ . Nous écrivons aussi l'adhérence  $\overline{B}_n^p = B_n^p \cup B_n^t$ , où  $B_n^t$  est l'espace de bracelets tangents, *i.e.* tels que  $a(b)$  possède au moins un point d'autointersection, mais tels que tous ces points sont de degré 0 :  (voir fig. 2). Notre but est de détailler la structure des  $\overline{B}_n^p$ .

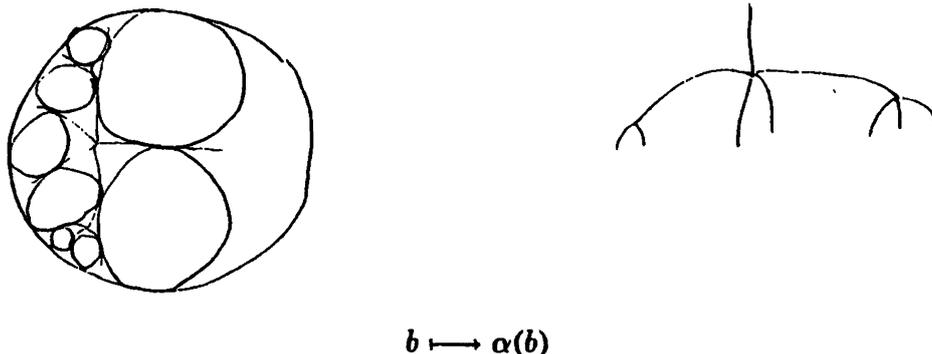


Fig. 2 – Un bracelet tangent et son arbre

On verra que  $\overline{B}_n^p$  est une variété stratifiée (dans un sens faible :  $\overline{B}_n^p$  est une union de variétés ouvertes  $s_\alpha$ ,  $0 \leq \dim s_\alpha \leq n - 2$ , dont l'adhérence  $\bar{s}_\alpha$  est une union de  $\bar{s}_\beta$ ,  $\dim s_\beta < \dim s_\alpha$ ). Il y a une strate  $s_\alpha$  pour chaque arbre planaire à  $n$  racines et une "tête" (voir fig. 2). Or, les complexes de Stasheff, eux aussi, possèdent une face pour chacun de ces arbres. Notre résultat principal est en effet :

3. THÉORÈME. — Soit  $K_n$  le complexe de Stasheff ([St], dit "l'associahedron", voir [L]). Alors, il existe un homéomorphisme entre les paires  $(K_n, \partial K_n) \longrightarrow (\overline{B}_n^p, B_n^t)$  qui envoie les intérieurs des faces sur les strates.

4. COROLLAIRE. —  $B_n^t$  est homéomorphe à  $S^{n-3}$ , et  $B_n^p$  est une  $(n - 2)$ -boule ouverte dans  $B_n$ .

*Démonstration.* — On sait (d'après Stasheff [St]) que  $(K_n, \partial K_n)$  est homéomorphe à  $(\overline{B}^{n-2}, S^{n-3})$ . Or,  $B_n^p$  est ouvert et la frontière de  $\overline{B}_n^p$  est  $B_n^t \approx S^{n-3}$ , d'où  $B_n^p$  est une  $(n - 2)$ -boule.

5. Remarque. — Le groupe  $F$  de Thomson possède deux descriptions : comme un groupe d'homéomorphismes de  $[-\infty, 0]$ , et comme un groupe de "changements d'associativité" (voir fig. 6).

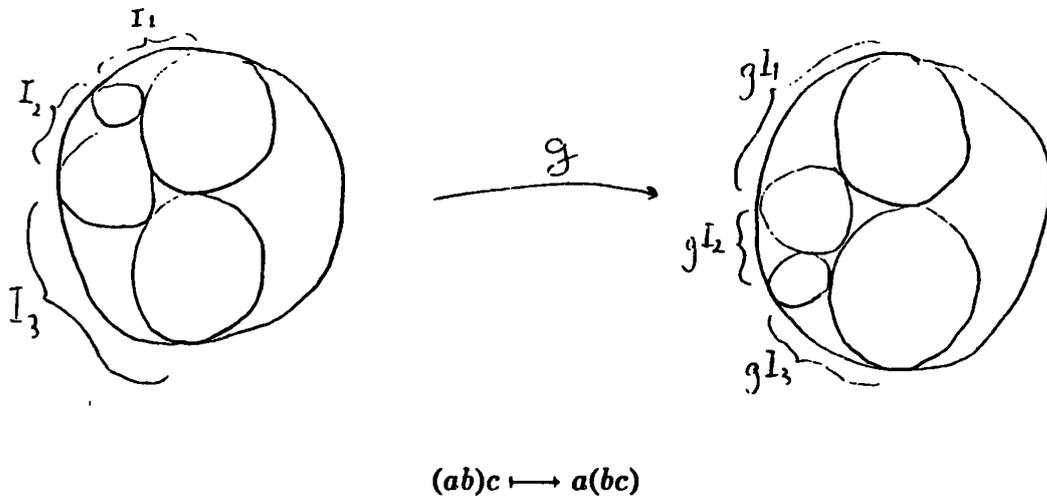


Fig. 6 – Un élément  $g \in F$

Le deuxième point de vue fait penser qu'on peut construire un  $K(F, 1)$  avec les  $K_n$ , car ils ont été introduits ([St]) comme paramètres entre des façons différentes d'associer  $n$  symboles. Du premier point de vue, on voit (voir [G]) que  $F$  agit comme groupe de revêtement sur un espace de fonctions homéomorphe, d'une façon naturelle, à une limite directe  $\varinjlim B_{2^n}$ . Le théorème lie ces deux points de vue.

Il reste à comprendre le fait que l'action de  $F$  ne préserve "qu'à l'infini" la structure combinatoire des  $B_{2^n}^i \dots$

Je remercie Richard Kenyon, qui m'a indiqué une erreur dans une version antérieure, Lucien Guillou pour son aide en topologie, ainsi que Jacques Helmstetter, Gilles Carron et Yves Carrière pour m'avoir aidé avec les résultats de l'appendice.

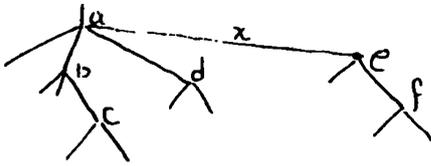
L'organisation de cette note est simple : on construit les  $K_n$  avec soin, de telle façon que la preuve du théorème ne soit pas difficile. L'appendice contient une paramétrisation explicite des  $B_n$ , comme sous-variétés analytiques de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et quelques remarques.

## II. Les "Associahedra" de Stasheff

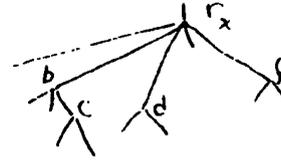
Bien que la construction originale des  $K_n$  utilise un calcul des "associations de  $n$  symboles", il nous convient de les construire, selon une idée de Boardman, avec des arbres.

Soit  $\mathcal{A}_n$  donc l'ensemble des arbres planaires (*i.e.* munis d'un plongement dans  $\mathbb{R}^2$ , défini à isotopie près) avec  $n+1$  racines, l'une d'entre elles, la *tête*, distinguée. Pour  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ , soit  $n(\alpha)$  l'ensemble des sommets intérieurs (dont la valence est au moins 2) de  $\alpha$ ; si  $i \in n(\alpha)$  soit  $n_i$  le nombre de "directions descendantes", soit la valence

moins 1. Soit  $|\alpha| = \sum_{i \in n(\alpha)} (n_i - 2)$ . On appelle  $T(n) \in \mathcal{A}_n$  l'arbre , défini par  $|T(n)| = n - 2$ .



(a) un arbre  $\alpha \in \mathcal{A}_{10}$   
 $n(\alpha) = \{a, b, c, d, e, f\}$   
 $n_a = 4, n_b = 3, \text{ etc...}$   
 $h_x = a, b_x = e$



(b) la contraction de  $\alpha$  par  $x$

Fig. 7

Une arête *intérieure* de  $\alpha \in \mathcal{A}_n$  est une arête dont la frontière  $\partial x = \{h_x, b_x\}$  se trouve dans  $n(\alpha)$ . Pour une arête intérieure  $x$  de  $\alpha$ , soit la *contraction de  $\alpha$  par  $x$*  l'arbre  $\beta \in \mathcal{A}_n$  qu'on obtient en identifiant  $x \cup \partial x$  à un sommet  $r_x$  (voir fig. 7). Nous écrivons donc  $\alpha <_x \beta$ , et si  $\alpha <_{x_1} \dots <_{x_t} \beta$ , nous écrivons  $\alpha < \beta$ . Notons que si  $\alpha <_x \beta$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} n(\alpha) &= \{h_x, b_x, \dots\} \\ n(\beta) &= \{r_x, \dots\} \end{aligned} \tag{8}$$

c'est-à-dire,  $n(\beta) = n(\alpha) - \{h_x, b_x\} \cup \{r_x\}$ , et puis que  $|\beta| = |\alpha| + 1$ .

La définition des  $K_n$  se fait par récurrence. Les  $K_n$  seront en effet une union des faces fermées  $f_\alpha$ , avec  $\dim f_\alpha = |\alpha|, \alpha \in \mathcal{A}_n$ ; en plus  $K_n = f_{T(n)}$  et  $\partial K_n = \bigcup_{\alpha \neq T(n)} f_\alpha$ .

Si  $\alpha < \beta$ ,  $f_\alpha$  est une face de  $\beta$ . Pour commencer, on définit :

$$K_2 = f_\lambda = f_{T(2)} = * \quad \text{un point}$$

$$K_3 = \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\ f_\lambda \quad \quad \quad f_\lambda \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{f_{T(3)}} \end{array} \quad \text{un intervalle .}$$

Supposons, maintenant, les  $f_\alpha$  définies,  $\alpha \in \mathcal{A}_j, 2 \leq j \leq n - 1$  ainsi que des inclusions  $i_{\beta\alpha} : s_\alpha \rightarrow s_\beta$  si  $\alpha < \beta$ , et puis que  $(K_j, \partial K_j) \approx (\bar{B}^{j-2}, S^{j-3})$ , et construisons  $\partial K_n$ .

Posons, pour  $\alpha \in \mathcal{A}_n, \alpha \neq T(n), g_\alpha \equiv \prod_{i \in n(\alpha)} f_{T(n_i)}$ . Si  $\alpha <_x \beta \neq T(n)$ , il faut définir  $i_{\beta\alpha} : f_\alpha \rightarrow f_\beta$ , soit (d'après (8))

$$i_{\beta\alpha} : f_{T(n_a)} \times f_{T(n_b)} \times \prod_{\dots} f_{T(n_i)} \rightarrow f_{T(n_r)} \times \prod_{\dots} f_{T(n_i)} .$$

Sur les derniers facteurs,  $i_{\beta\alpha} \equiv \text{id}$ ; il nous reste à définir  $i_{\beta\alpha} : f_{T(n_h)} \times f_{T(n_b)} \longrightarrow f_{T(n_r)}$ . Soit  $V$  le sous-arbre de  $\alpha$  avec  $x$  comme seule arête intérieure, qui contient toutes les arêtes qui intersectent  $x$ . Alors par définition on a  $f_V \equiv f_{T(h)} \times f_{T(b)}$ , et par récurrence une inclusion  $i_{T(n_r)V} : f_V \rightarrow f_{T(n_r)}$ . La composition

$$f_{T(n)} \times f_{T(b)} \xrightarrow{\cong} f_V \xrightarrow{i_{T(n_r)V}} f_{T(n_r)}$$

définit  $i_{\beta\alpha}$ .

Selon Stasheff [St], le complexe  $\partial K_n$  obtenu est homéomorphe à  $S^{n-3}$ ; définissons  $K_n = f_{T(n)}$  comme l'intérieur de cette sphère, c'est-à-dire  $f_{T(n)}$  est une  $(n-2)$ -cellule dont la frontière est  $\partial K_n$ .

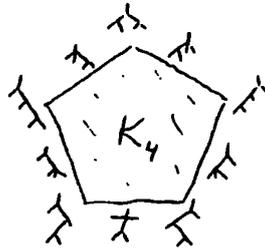


Fig. 9

Stasheff donne des modèles explicites pour les  $K_n$ . Voyons maintenant que les  $\overline{B}_n^p$  le sont aussi.

### III. Les strates des $\overline{B}_n^p$

Nous définirons maintenant une fonction  $\alpha : \overline{B}_n^p \longrightarrow \mathcal{A}_n$ , dont les images inverses sont les strates  $s_\alpha$  de  $\overline{B}_n^p$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ . Soit  $b = \{h_i\} \in \overline{B}_n^p$ , alors (voir fig. 2)  $\alpha(b)$  est l'arbre qui fournit un 1-squelette de  $\mathbb{H} - \bigcup_i \text{int}(h_i)$ ; la tête de  $\alpha(b)$  correspond à la région de  $\mathbb{H} - \bigcup_i \text{int}(h_i)$  dont le bord est l'axe réel positif. Evidemment, on a  $s_{T(n)} = B_n^p$ , un ouvert dans  $B_n$ . La proposition qui suit nous rappelle la définition des  $f_\alpha$  de la section II.

10. PROPOSITION. —  $s_\alpha$  est difféomorphe à  $\prod_{i \in n(\alpha)} B_{n_i}^p$ , et donc est une variété  $C^\infty$  ouverte, de dimension  $|\alpha|$ .

Démonstration. — Pour cette preuve, donnons à l'ensemble  $n(\alpha)$  des sommets intérieurs l'ordre  $\leftarrow$  "de haut en bas, de gauche à droite" (voir fig. 7, où l'ordre alphabétique des éléments de  $n(\alpha)$  est aussi l'ordre  $\leftarrow$ ).

Nous définissons  $F_\alpha : \prod_{i \in n(\alpha)} B_{n_i}^p \longrightarrow s_\alpha$  : soit  $(b_i) \in \prod B_{n_i}^p$ ,

$(b_i) = (b_1, \dots, b_{\#n(\alpha)})$ ,  $i \leftarrow i + 1$ . D'abord, on construit  $b_1$ . Alors, on descend à la région dans  $\mathbb{H} - \cup \text{int}(h_i)$  qui correspond au sommet 2. Elle est bordée par deux horocercles de  $b_1$ ; normalisons-les, puis mettons  $b_2$  dedans. On continue ainsi (voir fig. 11);  $F_\alpha$  est bien-définie, et bijective. ■

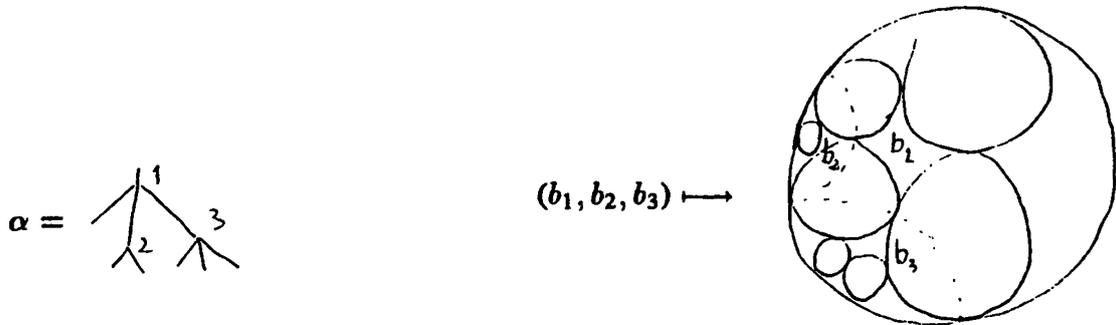


Fig. 11

*Démonstration du théorème 3.* — Enoncé : il existe un homéomorphisme  $\overline{B}_n^p \rightarrow K_n$  qui envoie  $\bar{s}_\alpha$  sur  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ .

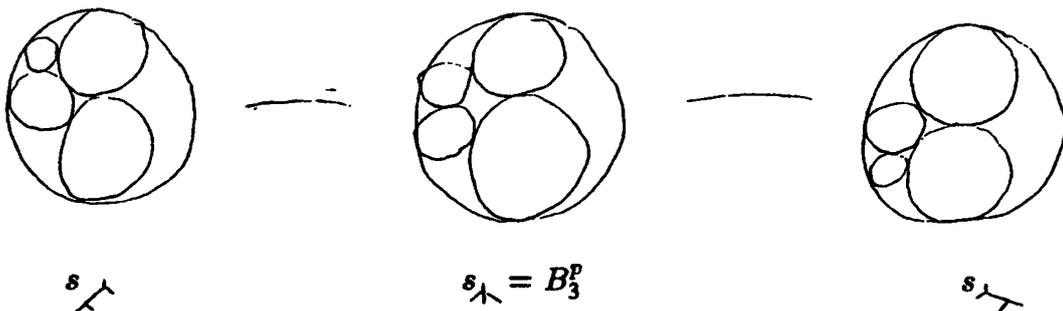
Par récurrence : commençons avec  $n = 2, n = 3$  :

$n = 2$

$$K_2 = * = f_{T(2)}, \quad B_2 = B_2^t = \overline{B}_2^p = \left\{ \text{diagram of a circle with two smaller circles inside} \right\}$$

$n = 3$

$$K_3 = \text{diagram of a tree with root 1 and children 2, 3}$$



Supposons par récurrence, que pour  $\alpha \in \mathcal{A}_j$ ,  $2 \leq j \leq n - 1$  on a un homéomorphisme  $h_\alpha : f_\alpha \rightarrow \bar{s}_\alpha$  tel que si  $\alpha < \beta$ ,  $h_\beta \circ i_{\beta\alpha} = h_\alpha$ . On définit  $h : \partial K_n \rightarrow B_n^t$  en écrivant  $f_\alpha = \prod f_{T(x_i)}$ ,  $s_\alpha = \prod B_{n_i}^p$ ,  $h|_{\text{int} f_\alpha} \equiv \prod h_{T(n_i)}$ . Par récurrence,  $h$  est un homéomorphisme. Alors,  $B_n^t$  est homéomorphe à un  $S^{n-3}$ . Mais aussi,  $B_n^t$  est la frontière (topologique) de  $B_n^p$  dans  $B_n = \mathbb{R}^{n-2}$ , et donc  $B_n^p$  est une boule ouverte dans  $B_n$ . D'où l'existence d'une extension de  $h$  à  $K_n$ . ■

### Références

- [B] BROWN K. — *Finiteness properties of groups*, J. Pure and Applied Alg., **44** (1987), 45–75.
- [G] GREENBERG P. — *Primer on CPP geometry*, Preprint, Bielefeld, 1991.
- [L] LEE C.W. — *The associahedron and triangulations of the n-gon*, Europ. J. Comb., **10** (1989), 551–560.
- [St] STASHEFF J. — *Homotopy associativity of H-spaces I, II*, Trans. Amer. Math. Soc., **108** (1963), 275–292; *ibid* **108** (1963), 293–312.

### Appendice – Géographie des Bracelets

Pour ceux que cela intéresse, on donne ici une paramétrisation des espaces  $B_n$ . Nous présentons seulement les résultats de certains calculs, dont les détails apparaîtront (peut-être) ailleurs.

Soit  $b \in B_n$ . L'arc  $a(b)$  (voir fig. 1) se divise en  $n+1$  sous-arcs  $a_i \subset h_i$ . Soit  $\ell_i$  la longueur de l'arc  $a_i(b)$ , et soit  $\ell(b) = (\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ . L'application  $\ell$  est un plongement de  $B_n$  dans  $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ . En posons  $n = 2$ , on trouve  $\ell(b) = (1, 1, 1)$  (il n'y a qu'un seul bracelet). Avec  $n = 3$ , on trouve  $\ell(b) = (\ell_1(b), 2/\ell_1(b), \ell_1(b), 2/\ell_1(b))$ . Or, le plongement  $p_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow (\mathbb{R}^+)^4$  défini par  $p_3(\sigma) = (\sigma, 2/\sigma, \sigma, 2/\sigma)$  fournit une paramétrisation de  $B_3$ . En général, on trouve :

**A.1. Résultat.** — Soit  $p_n : (\mathbb{R}^+)^{n-2} \rightarrow (\mathbb{R}^+)^{n+1}$  définie par

$$p_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}) = \left( \sigma_1, \frac{1 + \sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_{j-2} + \sigma_j}{\sigma_{j-1}}, \dots, \frac{\sigma_{n-4} + \sigma_{n-2}}{\sigma_{n-3}}, \right. \\ \left. \frac{1 + \sigma_{n-3}}{\sigma_{n-2}}, \sigma_{n-2}, \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_j \sigma_{j+1}} + \dots + \frac{1}{\sigma_{n-2}} \right).$$

Alors  $p_n$  est un plongement, dont l'image est  $\ell(B_n)$ .

Quelques remarques suivent :

1. — Des paramétrisations  $p_n$ , on tire des équations qui définissent les  $\ell(B_n)$ ; on trouve facilement, par exemple, que

$$B_4 = \left\{ (\ell_1, \dots, \ell_5) \mid \ell_2 = \frac{1 + \ell_4}{\ell_1}, \ell_3 = \frac{1 + \ell_1}{\ell_4}, \ell_5 = \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_1 \ell_2} \right\}.$$

2. — En posant  $L(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = \sum_1^{n+1} \ell_i$ , la longueur de l'arc  $a(b)$  est  $L(\ell(b))$ . On trouve que la fonction  $L \circ p_n$  est de Morse, avec un seul point singulier, un minimum. Le bracelet minimal  $b_{\min}$  est symétrique, invariant par un élément de  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  d'ordre  $n+1$ , et  $p_n(b_{\min}) = (2 \cos \pi/n+1, \dots, 2 \cos \pi/n+1)$ ,  $L p_n(b_{\min}) = 2(n+1) \cos(\pi/n+1)$ .

3. — Le plongement  $p_n$  nous fournit une action curieuse de  $\mathbb{Z}/n+1$  sur  $(\mathbb{R}^+)^{n-2}$ . Or, si  $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = \ell(b)$ ,  $b \in B_n$  alors il existe  $b' \in B_n$  tel que  $\ell(b') = (\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_{n+1}, \ell_1)$ , et donc l'automorphisme *rot* de  $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ , défini par

$rot(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = (\ell_2, \dots, \ell_{n+1}, \ell_1)$  envoie  $\ell(B_n)$  à lui-même, donnant ainsi un automorphisme d'ordre  $n + 1$  de  $(\mathbb{R}^+)^{n-2} = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2})\}$ .

Soit  $\{\ell_i\}$  les fonctions "coordonnées" de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Alors,  $\ell_i rot(p_n(\sigma)) = \ell_{i+1}(p_n(\sigma))$ ,  $\ell_{n+1} rot(p_n(\sigma)) = \ell_1(p_n(\sigma))$ ,  $\sigma \in (\mathbb{R}^+)^{n-2}$ . On trouve, par exemple, avec  $n = 5$

$$rot(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left( \frac{1 + \sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2 \sigma_3} + \frac{1}{\sigma_3} \right)$$

un automorphisme d'ordre 6.

4. — On peut examiner les strates (ou plutôt leurs extensions comme sous-variétés analytiques de  $B_n$ ) avec l'aide des plongements  $p_n$ . Soit par exemple

$\alpha = \begin{matrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{matrix}$  ; on considère  $s_\alpha \in B_5$  (voir fig. A.2). Si  $b \in s_\alpha$ , la proposition 10 exprime  $b$  comme  $b = (b_1, b_2) \in B_3 \times B_3$ .

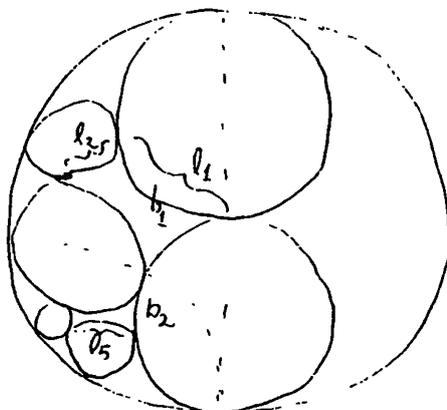
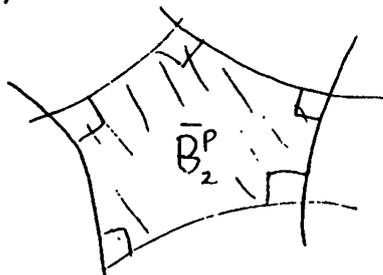


Fig. A.2 – Un bracelet de  $s$

On trouve donc  $\ell_2 = 2/\ell_1$ ,  $\ell_3 = \ell_1 + \ell_5$  d'où  $\sigma_2 = 1$ , et alors  $p_5^{-1} \ell(s_\alpha)$  est un ensemble ouvert dans  $\{(\sigma_1, 1, \sigma_3)\}$ .

On peut aussi calculer que dans  $(\mathbb{R}^+)^5$  les strates de dimension 1 de  $B_2$  s'intersectent en formant un angle de  $\pi/2$  :



D'où (et des autres calculs) la conjecture que les  $\overline{B}_n^p$  sont des variétés stratifiées dans le sens de Whitney ("condition (b)", par exemple).