SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

FRÉDÉRIC MATHÉUS

Flot géodésique et groupes hyperboliques d'après M. Gromov (Mémoire de D.E.A.)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 67-87

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__67_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1990–1991 (67–87)

FLOT GÉODÉSIQUE ET GROUPES HYPERBOLIQUES D'APRÈS M. GROMOV

(Mémoire de D.E.A.)

par *Frédéric MATHÉUS*

I. Introduction

Le but de ce travail est d'étudier la construction de M. Gromov ([Gr 2], § 8.3) du flot géodésique d'un groupe hyperbolique. Le théorème suivant ([Gr 1]), que nous démontrons au § VI-2, motive cette étude :

THÉORÈME. — *Soient (V, g) et (V', g') deux variétés riemanniennes compactes à courbures négatives, et soit φ un isomorphisme en les groupes fondamentaux de V et V'.*

Alors il existe un homéomorphisme $h(\varphi)$ entre les fibrés unitaires tangents $T_1(V)$ et $T_1(V')$ à V et V' qui envoie les orbites du flot géodésique de V sur celles du flot géodésique de V'.

On va donc tenter de reconstituer le flot géodésique à partir du groupe fondamental. Plus généralement, soit Γ un groupe hyperbolique quelconque (qui n'est peut-être pas le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte à courbure négative). On va construire un espace $\widehat{G}(\Gamma)$, et un "flot géodésique" sur $\widehat{G}(\Gamma)$, tous deux bien définis à quasi-isométrie Γ-équivariante préservant les orbites près.

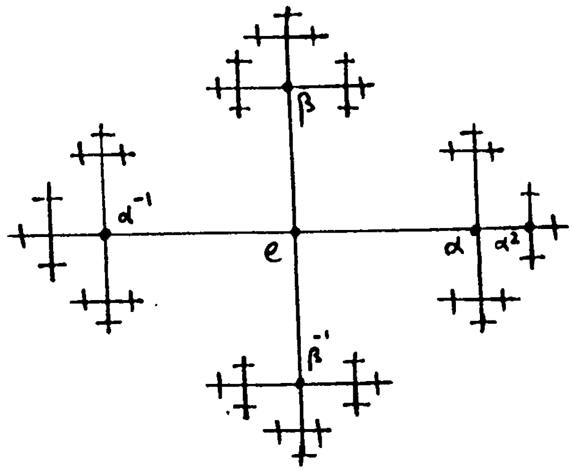
Pour guider l'intuition, on gardera à l'esprit le fait que, dans le cas où Γ est le groupe fondamental d'une variété compacte V munie d'une métrique riemannienne à courbure négative, l'espace $\widehat{G}(\Gamma)$ doit jouer le rôle du fibré unitaire tangent $T_1(\widetilde{V})$ au revêtement universel $\widetilde{V}$ de V.

Ce travail constitue mon mémoire de D.E.A. Il a été effectué sous la direction du Professeur Etienne Ghys. Je le remercie pour son aide et ses conseils.

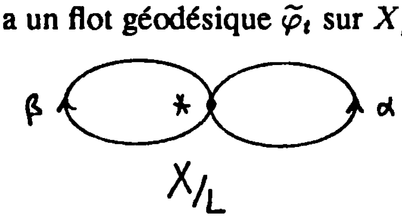
Je remercie aussi l'équipe de Théorie Spectrale de l'Institut Fourier pour avoir bien voulu publier ici ce texte.

II. Flot géodésique sur le groupe libre de rang deux

Soit $L = L(\alpha, \beta)$ le groupe libre à deux générateurs, et X le graphe de Cayley de L pour le système de générateurs $S = \{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$. X est un arbre dont les arêtes ont pour longueur 1 et tel que chaque sommet de X appartient à quatre arêtes. Notons T_1X l'ensemble des triplets $(x, a, b) \in X \times \partial X \times \partial X$ tels que x appartienne à la goédésique de X d'extrémités (a, b). (∂X désigne le bord de X). Sur T_1X on définit un flot géodésique par : $\varphi_t(x, a, b) = (y, a, b)$ où y est le point de la géodésique d'extrémités (a, b) à distance t de x. L'espace des directions autour de x, noté $(T_1X)_x$, est constitué des couples (m_1, m_2) de mots infinis en $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$. Le premier mot décrit le passé de x, le second décrit le futur de x sous l'action du flot géodésique φ_t. Les premières lettres de m_1 et m_2 doivent être différentes. On notera que $(T_1X)_x$ est homéomorphe à un ensemble de Cantor, et n'est donc pas une variété.



L'action de L sur T_1X est donnée par : $\gamma \cdot (x, m_1, m_2) = (\gamma_x, m_1, m_2)$ de sorte qu'on a un flot géodésique $\widetilde{\varphi}_t$ sur X/L qui est un bouquet de deux cercles. Par exemple, $\widetilde{\varphi}_1(*, m_1, sm_2) = (*, s^{-1}m_1, m_2)$ On notera que l'on a pu définir sans difficulté le flot φ_t car, par deux points distincts de ∂X passe une unique géodésique.



Voici maintenant quelques généralités sur le

III. Flot géodésique sur un espace métrique

Soit X un espace métrique. On note $d(x, y)$ ou $|x - y|_X$ la distance entre deux points $x, y \in X$. On note GX l'ensemble des géodésiques de X, c'est-à-dire l'ensemble des isométries de $\mathbf{R}$ dans X, et on munit GX de la métrique suivante : pour $g, h \in X$,

on pose
$$|g-h|_{GX} = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)-h(t)|_X 2^{-|t|} dt.$$
L'inégalité $|g(t) - h(t)|_X \leqslant 2|t| + |g(0) - h(0)|_X$ montre que l'intégrale définissant $|g-h|_{GX}$ est convergente. Cette inégalité que l'on peut réécrire ainsi :
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |g(t)-h(t)|_X - 2|t| \leqslant |g(0)-h(0)|_X \leqslant |g(t)-h(t)|_X + 2|t|$$
montre que l'application $GX \to X, g \mapsto g(0)$ est une quasi-isométrie.

Il y a deux actions isométriques sur GX : celle du groupe $\mathrm{Isom}(X)$ des isométries de X, par composition au but, et celle de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, par changement du sens de parcours des géodésiques.

En revanche, le flot géodésique, qui est l'action de $\mathbf{R}$ par translation à la source sur GX, n'est pas une action isométrique, mais seulement lipschitzienne; en effet, les inégalités suivantes, valables pour tous $\alpha, t \in \mathbf{R}$,
$$-|\alpha| - |t+\alpha| \leqslant -|t| \leqslant |\alpha| - |t+\alpha|$$
donnent
$$2^{-|\alpha|} \cdot |g-h|_{GX} \leqslant |g^\alpha - h^\alpha|_{GX} \leqslant 2^{|\alpha|} \cdot |g-h|_{GX}$$
où g^α (resp. h^α) désignent les éléments $t \mapsto g(\alpha+t) (\text{resp.}\, t \mapsto h(\alpha+t))$ de GX.

Enfin, l'action de $\mathrm{Isom}(X)$ commute avec celles de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, tandis que ces dernières “anticommutent”, c'est-à-dire que, si l'on note σ l'application de GX dans lui-même donnée par $(\sigma g)(t) = g(-t)$, on a : $\sigma(g^\alpha) = (\sigma g)^{-\alpha}$.

On suppose maintenant que X est un espace métrique géodésique hyperbolique. On note ∂X son bord, et on note $\partial^2 X$ l'ensemble $\{(a,b) \in \partial X \times \partial X, a \neq b\}$. La projection $D : GX \to \partial^2 X$ qui, à une géodésique, associe ses extrémités, est continue et surjective. La préimage $D^{-1}(a,b)$ d'un point de $\partial^2 X$ est l'ensemble de toutes les géodésiques dont (a,b) est le couple d'extrémités. On va tenter d'identifier convenablement ces géodésiques en une seule, et ce de sorte que l'action isométrique de $\mathrm{Isom}(X)$ donne une action isométrique sur ce quotient de GX. Venons-en au théorème que l'on a en vue.

IV. Enoncé du théorème principal

1. Le théorème.

THÉORÈME. — *Soit Γ un groupe hyperbolique. Alors il existe un espace métrique hyperbolique et propre noté $\widehat{G}$, et possédant :*

i) une action isométrique de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$,

ii) une action isométrique de Γ qui commute avec celle de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et dont chaque orbite $\Gamma \to \widehat{G}$ est une quasi-isométrie à image discrète, *iii) une action libre de* $\mathbb{R}$*, commutant avec celle de* Γ*, anticommutant avec celle de* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*, dont chaque orbite* $\mathbb{R} \to \widehat{G}$ *est une quasi-géodésique continue, sans point double, et dont l'espace des orbites* $\widehat{G}/\mathbb{R}$ *est homéomorphe à* $\partial^2\widehat{G}$.

De plus, si $\widehat{G}_1$ *et* $\widehat{G}_2$ *sont deux espaces métriques hyperboliques propres, vérifiant i), ii) et iii), alors il existe une quasi-isométrie* $\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-équivariante entre* $\widehat{G}_1$ *et* $\widehat{G}_2$*, et qui envoie homéomorphiquement chaque* $\mathbb{R}$*-orbite de* $\widehat{G}_1$ *sur une* $\mathbb{R}$*-orbite de* $\widehat{G}_2$.

Enfin, si X *est un espace métrique hyperbolique propre sur lequel* Γ *opère isométriquement, proprement discontinûment et avec quotient compact, alors il existe une quasi-isométrie continue* $GX \to \widehat{G}, \Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-équivariante, et qui échange homéomorphiquement les* $\mathbb{R}$*-orbites de* GX *et* $\widehat{G}$.

2. Commentaires.

a) Soit Γ un groupe hyperbolique, et $\widehat{G}$ l'espace fourni par le théorème. Fixons $g_0 \in \widehat{G}$. La quasi-isométrie $\Gamma \to \widehat{G}, \gamma \mapsto \gamma \cdot g_0$ s'étend en un homéomorphisme Γ-équivariant entre $\partial\Gamma$ et $\partial\widehat{G}$.

b) Les propriétés de l'action de $\mathbb{R}$ sur $\widehat{G}$ permettent de reconstituer celui-ci à partir de $\mathbb{R}$ et $\partial^2\widehat{G}$. Plus précisément, on montrera qu'il existe un homéomorphisme entre $\widehat{G}$ et $\partial^2\widehat{G} \times \mathbb{R}$ qui conjugue les actions de $\mathbb{R}$.

c) Soient S_1 et S_2 deux systèmes générateurs de Γ, d_1, d_2 les métriques des mots qui leur sont associées, et $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2$ les espaces fournis par le théorème. Il existe alors une quasi-isométrie entre $\widehat{G}_1$ et $\widehat{G}_2$, Γ-équivariante, et qui échange les $\mathbb{R}$-orbites. Donc $\widehat{G} = \widehat{G}(\Gamma)$, et le flot géodésique sur $\widehat{G}(\Gamma)$, sont bien définis à quasi-isométrie Γ-équivariante préservant les orbites près.

d) Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes hyperboliques, et φ une quasi-isométrie entre Γ_1 et Γ_2. Alors φ se prolonge en un homéomorphisme Φ entre $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$, qui fournit donc, d'après les points *a)* et *b)* ci-dessus, un homéomorphisme entre $\widehat{G}(\Gamma_1)$ et $\widehat{G}(\Gamma_2)$ qui conjugue les flots géodésiques (mais non les actions de Γ_1 et Γ_2).

e) Pour des compléments, on pourra consulter [Ch].

V. Preuve du théorème

Le schéma de la preuve est le suivant : suivant M. Gromov dans [Gr 2] on part d'un espace X comme à la fin du théorème, on construit un espace $\widehat{G}$ vérifiant les propriétés *i), ii)* et *iii)* du théorème, puis on s'assure que $\widehat{G}$ ne dépend pas de X en prouvant l'unicité faible.

1. Construction de $\widehat{G}$.

Soit X un espace métrique δ-hyperbolique, propre, sur lequel Γ opère par isométries, proprement discontinûment, et avec quotient compact.

Soient $x_0 \in X$ un point-base, et ρ un réel strictement positif. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des couples $(a,b) \in \partial^2 X$ pour lesquels il existe une géodésique d'extrémités (a,b) qui ne rencontre pas la boule ouverte $B_0(x_0,\rho)$. On va montrer que $\mathcal{A}$ est fermé. Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant :

LEMME. — *Soit $(a_n,b_n) \in \partial^2 X$ une suite de points de $\partial^2 X$ qui converge vers un point $(a,b) \in \partial^2 X$, et soit g_n une géodésique d'extrémités (a_n,b_n).*

Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X, qui est bornée, et telle que, pour tout n, x_n appartienne à l'image de g_n.

Preuve. — Soient U et V deux voisinages compacts disjoints de a et b. Pour n assez grand, $a_n \in U$ et $b_n \in V$, et le produit $(a_n|b_n)_{x_0}$ est borné indépendamment de n. Maintenant fixons n. Pour p,q assez grand, on a :

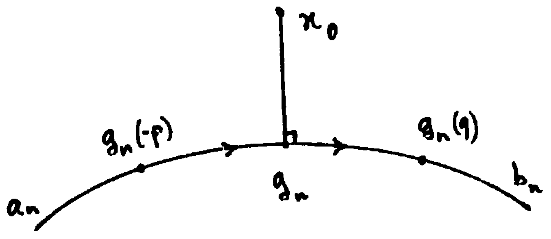
$$\begin{aligned} d\big[x_0, g_n(\mathbb{R})\big] &= d\Big[x_0, g_n\big([-p,q]\big)\Big] \\ &\leqslant \big(g_n(-p)|g_n(q)\big)_{x_0} + \delta \end{aligned}$$

L'inégalité résulte du lemme 2.17 page 39 de [G-H]. On en déduit

$$d\big[x_0, g_n(\mathbb{R})\big] \leqslant \lim_{p,q\to+\infty} \inf \big(g_n(-p)|g_n(q)\big)_{x_0} + \delta \leqslant (a_n|b_n)_{x_0} + \delta$$

qui est borné indépendamment de n. Il existe donc, pour tout n un point $x_n \in g_n(\mathbb{R})$ tel que $\sup_{n>0} |x_0 - x_n| < +\infty$. ■

Plaçons-nous dans la situation du lemme, et supposons que le paramétrage de la géodésique g_n soit tel que $x_n = g_n(0)$. La suite (x_n) est bornée, et l'espace X est propre, donc, quitte à extraire, la suite (x_n) converge, vers un point ω. En s'inspirant des pages 101-102 de [G-H], on extrait de (g_n) une suite qui converge uniformément sur les compacts vers une géodésique g. En relisant la page 123 de [G-H], on constate que la suite (a_n,b_n) converge vers le couple d'extrémités de g, qui n'est donc rien d'autre que (a,b).



De plus, il est bien clair que, si l'on suppose qu'aucune géodésique g_n ne rencontre la boule ouverte $B_0(x_0,\rho)$, alors c'est toujours le cas pour la géodésique g. On a donc montré que la limite de toute suite de points de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est fermé.

Il est par ailleurs aisé de voir que, si ρ est assez grand alors il existe $(a,b) \in \partial^2 X$ qui n'appartient pas à $\mathcal{A}$.

Soit maintenant $\eta : \partial^2 X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction donnée par : $\eta(a,b) = \mathrm{dist}[(a,b)\,;\mathcal{A}]$. Cette fonction η est continue, non identiquement nulle, et $\eta(a,b) > 0$ si et seulement si toutes les géodésiques d'extrémités (a,b) rencontrent la boule ouverte $B_0(x_0,\rho)$.

Soient ρ_0 et ρ_1 deux réels vérifiant $\rho < \rho_0 < \rho_1$, et $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant $\varphi = 1$ sur $[0,\rho_0]$ et $\varphi = 0$ sur $[\rho_1,+\infty[$. On note, par ailleurs, $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ l'application donnée par : $\Psi(x) = \varphi(|x - x_0|)$.

Maintenant, soit $(a,b) \in \partial^2 X$, tel que $\eta(a,b) > 0$. A toute géodésique g d'extrémités (a,b), on associe une "origine" notée $t_0 = t_0(g)$, et définie par

$$\int_{-\infty}^{t_0} \Psi \circ g(t)dt = \int_{t_0}^{+\infty} \Psi \circ g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \circ g(t)dt.$$

On note alors $L_g(t)$ l'intégrale curviligne normalisée de Ψ le long de g, entre t_0 et t :

$$L_g(t) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \circ g(s)ds} \int_{t_0}^{t} \Psi \circ g(s)ds.$$

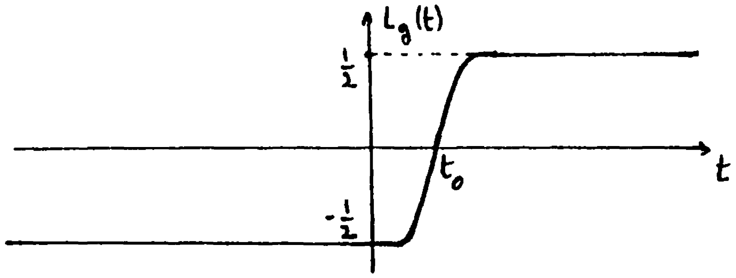
Comme $\Psi \circ g$ est continue à support compact, on en déduit que $|L_g(t)| = \frac{1}{2}$ si $|t|$ est assez grand, et plus précisément on a :

$$L_g(t) = \begin{cases} +\frac{1}{2} \text{ si } t - t_0 \text{ est assez grand} \\ -\frac{1}{2} \text{ si } t_0 - t \text{ est assez grand.} \end{cases}$$

On peut préciser ce dernier fait : soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $g(t) \notin \overline{B}(x_0, \rho_1 + 2\delta)$ (boule fermée). On a les implications suivantes :

$$t < t_0 \Rightarrow L_g(t) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad t > t_0 \Rightarrow L_g(t) = +\frac{1}{2}.$$

Justifions ceci : déjà, puisque $\eta(a,b) > 0$, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $g(T) \in \overset{\circ}{B}(x_0, \rho_1)$. Si la constante δ est choisie de sorte que tous les triangles géodésiques de X soient δ-finis, alors toutes les boules sont 2δ-convexes (d'après [G-H] prop. 25, p. 45), donc si $t < T$, alors $\forall s \leqslant t$, $g(s) \notin B(x_0, \rho_1)$ donc $\Psi \circ g \equiv 0$ sur $]-\infty, t]$, donc $L_g(t) = -\frac{1}{2}$. De même, si $t > T$, alors $L_g(t) = \frac{1}{2}$. On termine en remarquant que $L_g(t)$ est du signe de $t - t_0$.



Maintenant, si $x_1 = g_1(t_1)$ et $x_2 = g_2(t_2)$ sont deux points sur deux géodésiques g_1 et g_2 d'extrémités (a,b), on pose :

$$L_0(a,b\,;x_1,x_2) = \begin{cases} \eta(a,b)\cdot\left[L_{g_1}(t_1) - L_{g_2}(t_2)\right] \text{ si } \eta(a,b) > 0 \\ 0 \text{ si } \eta(a,b) = 0. \end{cases}$$

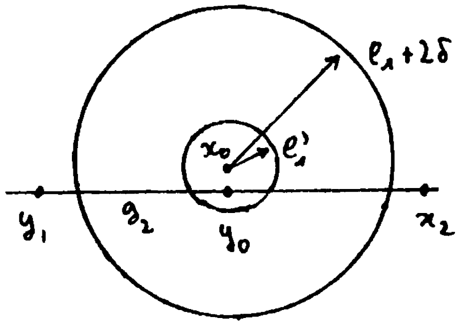
Notons t_0^1(resp. t_0^2) l'"instant origine" sur la géodésique g_1(resp. g_2). D'après ce que l'on vient de voir, si $x_1, x_2 \notin B(x_0, \rho_1 + 2\delta)$ et si sgn $(t_1 - t_0^1) =$ sgn $(t_2 - t_0^2)$, alors $L_0(a,b\,;x_1,x_2) = 0$.

Si l'on contrapose cette dernière assertion, on a :

$$L_0(a,b\,;x_1,x_2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in B(x_0, \rho_1 + 2\delta) \\ \text{ou } : x_2 \in B(x_0, \rho_1 + 2\delta) \\ \text{ou } : x_1 \text{ et } x_2 \neq B, \text{et } \operatorname{sgn}(t_1 - t_0^1) \neq \operatorname{sgn}(t_2 - t_0^2). \end{cases}$$

Examinons la troisième situation : on va montrer que, dans ce cas, $|x_1 - x_0| \leqslant |x_1 - x_2|$ et $|x_2 - x_0| \leqslant |x_1 - x_2|$, à condition que ρ_1 soit assez grand.

Pour ce faire, on observe que, puisque les géodésiques g_1, g_2 contenant x_1 et x_2 ont mêmes extrémités, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |g_1(t) - g_2(t-u)| \leqslant 16\delta$ (voir [G-H] p. 119) donc le point $y_1 = g_2(t_1 - u)$ de g_2 vérifie $|x_1 - y_1| \leqslant 16\delta$. Quitte à remplacer ρ_1 par $\rho_1 + 16\delta$, on peut supposer que y_1 n'appartient pas à la boule B de centre x_0, de rayon $\rho_1 + 2\delta$. La situation est donc la suivante : y_1 et x_2 sont deux points de g_2 qui est une géodésique de X qui traverse la boule $B(x_0, \rho_1')$, et y_1 et x_2 sont à une distance supérieure à $\rho_1 + 2\delta$ de x_0 :



Soit y_0 un point de $g_2(\mathbb{R}) \cap B(x_0, \rho_1')$. On a :

$$|y_1 - x_0| + |x_0 - x_2| \leqslant |y_1 - y_0| + |y_0 - x_2| + 2\rho_1' = |y_1 - x_2| + 2\rho_1'$$

et comme

$$|x_1 - x_0| \leqslant |y_1 - x_0| + 16\delta \text{ et } |y_1 - x_2| \leqslant |x_1 - x_2| + 16\delta$$

il vient

$$|x_1 - x_0| + |x_0 - x_2| \leqslant |x_1 - x_2| + 2\rho_1' + 16\delta\ ;$$

de

$$|x_0 - x_2| \geqslant \rho_1 + 2\delta$$

il vient

$$|x_1 - x_0| \leqslant |x_1 - x_2| + 2\rho_1' - \rho_1 + 14\delta,$$

et

$$\rho_1 \geqslant 2\rho_1' + 14\delta$$

donne

$$|x_1 - x_0| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Par conséquent, on a les implications suivantes :

$$L_0(a, b\,; x_1, x_2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |x_1 - x_0| \leqslant \rho_1 + 2\delta, \text{ ou } : |x_2 - x_0| \leqslant \rho_1 + 2\delta \\ \text{ou } : |x_1 - x_0| \leqslant |x_1 - x_2| \text{ et } |x_2 - x_0| \leqslant |x_1 - x_2| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_1 - x_0| \leqslant \rho_1 + 2\delta + |x_1 - x_2| \\ \text{ou} \\ |x_2 - x_0| \leqslant \rho_1 + 2\delta + |x_1 - x_2| \end{cases}$$

donc l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma, L_0(\gamma a, \gamma b\ ; \gamma x_1, \gamma x_2) \neq 0\}$ est inclus dans l'ensemble $\bigcup_{i=1,2} \{\gamma \in \Gamma, |\gamma x_i - x_0| \leqslant \rho_1 + 2\delta + |x_1 - x_2|\}$ puisque $|\gamma x_1 - \gamma x_2| = |x_1 - x_2|$, et ce dernier ensemble est fini, car l'action de Γ sur X est proprement discontinue et car X est propre. L'ensemble $\{\gamma \in \Gamma, L_0(\gamma a, \gamma b\ ; \gamma x_1, \gamma x_2) \neq 0\}$ est donc fini, ce qui permet de définir

$$L(a, b\ ; x_1, x_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} L_0(\gamma a, \gamma b\ ; \gamma x_1, \gamma x_2).$$

Fixons toujours $(a, b) \in \partial^2 X$. La fonction L est alors un cocycle en (x_1, x_2), c'est-à-dire que l'on a :

$$L(a, b\ ; x_1, x_2) = -L(a, b\ ; x_2, x_1)$$

et :

$$L(a, b\ ; x_1, x_2) + L(a, b\ ; x_2, x_3) + L(a, b\ ; x_3, x_1) = 0.$$

Donc la relation sur $GX = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}, X)$ donnée par :

$$\forall g_1, g_2 \in GX_1 \quad g_1 \sim g_2 \iff D(g_1) = D(g_2) = (a, b) \text{ et } L\big(a, b\ ; g_1(0), g_2(0)\big) = 0$$

est une relation d'équivalence. On note $\widehat{G}$ le quotient de GX par cette relation.

2. Premières propriétés de $\widehat{G}$.

Comme L est Γ-invariant, et comme $L(a, b\ ; x_1, x_2) = -L(b, a\ ; x_1, x_2)$ l'action de $\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur GX passe au quotient en une action sur $\widehat{G}$ dont les propriétés métriques seront précisées plus loin.

On peut établir une autre propriété de $\widehat{G}$ d'ordre topologique si l'on munit $\widehat{G}$ de la topologie quotient, on a la

PROPOSITION. — *$\widehat{G}$ est localement compact.*

Cette proposition sera améliorée plus loin, lorsqu'on aura muni $\widehat{G}$ d'une métrique. Elle résulte du lemme suivant

LEMME. — *Si X est un espace métrique propre, alors l'espace $GX =$* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}, X)$ *est également un espace métrique propre.*

La métrique de GX a été décrite au § III. Prouvons ce lemme. Soit B une boule fermée de GX. Il s'agit de montrer qu'elle est compacte. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de géodésiques de B. Comme l'application $p : GX \to X, g \mapsto g(0)$ est une quasi-isométrie, $p(B)$ est contenu dans une boule de X, qui est compacte car X est propre. Donc, quitte à extraire, la suite $\big(g_n(0)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $w \in X$. En adaptant la preuve du théorème 5-25 de [G-H] (p. 101-102) on montre que la suite (g_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts vers une géodésique g telle que $g(0) = w$. Puis on vérifie aisément que $|g_n - g|_{GX}$ tend vers 0 quand on tend vers l'infini. ∎

Ce lemme va, par ailleurs, nous servir pour établir la compacité des classes modulo $\sim$.

3. Compacité des classes d'équivalence.

Ce paragraphe est consacré à la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Les classes d'équivalence de GX pour la relation $\sim$ sont compactes.*

Pour prouver ce fait, commençons par ce

LEMME. — *Il existe une constante C (ne dépendant que de δ et ρ_1) vérifiant : $\forall g, h \in GX$, $g \sim h$ implique $|g-h|_{GX} \leqslant C$. En particulier, les classes de GX modulo $\sim$ sont bornées.*

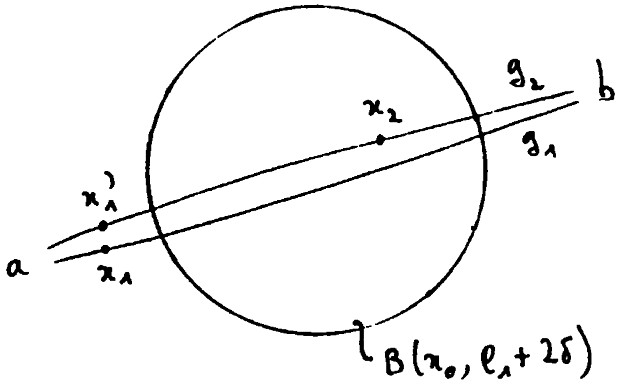
Prouvons ce lemme. Soit $C_1 = 2(\rho_1 + 2\delta) + 32\delta$, et soient $x_1 = g_1(t_1), x_2 = g_2(t_2)$ deux points sur deux géodésiques g_1, g_2 d'extrémités (a, b). Il est assez aisé de voir que, si $|x_1 - x_2| \geqslant C_1$, alors le signe de $L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1, \gamma x_2)$ pour $\gamma \in \Gamma$ ne dépend pas de γ.

En effet, si x_1 et x_2 sont sur une même géodésique g, alors

$$L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1, \gamma x_2) = \eta(\gamma a, \gamma b) \frac{1}{\int\limits_{\mathbb{R}} \Psi \circ \gamma g} \int_{t_2}^{t_1} \Psi \circ \gamma g(t) dt,$$

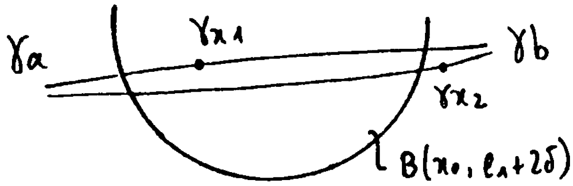
dont le signe ne dépend pas de γ, mais seulement de celui de $t_1 - t_2$.

Dans le cas général, on remplace x_1 par un point $x_1' = g_2(t_1')$ de g_2 qui est 16δ-proche de x_1. Si $|x_1 - x_2| \geqslant C_1$, alors $L_0(a, b\,; x_1, x_2)$ et $L_0(a, b\,; x_1', x_2')$ ont même signe. En effet, si $x_2 \in B(x_0, \rho_1 + 2\delta)$, alors ni x_1, ni x_1' n'appartienne à cette boule, de sorte que $L_{g_1}(t_1) = L_{g_2}(t_1') = \pm\frac{1}{2}$ et donc $L_0(a, b\,; x_1, x_2)$ et $L_0(a, b\,; x_1', x_2)$ ont même signe. Si $x_2 \notin B(x_0, \rho_1 + 2\delta)$, alors on a par exemple $L_{g_2}(t_2) = \frac{1}{2}$, et $L_g(t) - L_{g_2}(t_2)$ est alors toujours négatif, et ce quels que soient $t \in \mathbb{R}$ et $g \in GX$ d'extrémités (a, b). On en déduit que, pour tout $\gamma \in \Gamma, L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1, \gamma x_2)$ et $L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1', \gamma x_2)$ ont même signe. En vertu du cas particulier, le signe de $L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1, \gamma x_2)$ ne dépend pas de γ.



On observe de plus que, si ρ_1 est assez grand, alors il existe γ tel que $L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1, \gamma x_2) \neq 0$. Ceci provient du fait que l'action de Γ sur X est à quotient borné, et donc si ρ_1 est tel que $\rho_1 + 2\delta \geqslant \operatorname{diam}(\Gamma \setminus X)$, alors il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma x_1 \in B(x_0, \rho_1 + 2\delta)$; dans ce cas, $\gamma x_2 \notin B(x_0, \rho_1 + 2\delta)$, et $L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1, \gamma x_2) \neq 0$.

On a donc montré l'implication suivante : $|x_1 - x_2| \geqslant C_1 \Rightarrow L(a, b\,; x_1, x_2) \neq 0$.
On en déduit que, si $g \sim h$, alors $|g(0) - h(0)| \leqslant C_1$, donc $|g-h|_{GX} \leqslant C$, où C est une constante ne dépendant que de ρ_1, δ, et des constantes de quasi-isométries de l'application $GX \to X, g \mapsto g(0)$. ∎



Prouvons maintenant la proposition. On vient de voir que les classes modulo $\sim$ sont bornées, donc relativement compactes puisque GX est propre (d'après le lemme du § V-2). Il reste donc à voir qu'elles sont fermées. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de géodésiques de GX qui converge vers $g \in GX$, et vérifiant : $\forall n, p \in \mathbb{N}\ g_n \sim g_p$. Soit $(a, b) = D(g_n)$ (indépendant de n). On a donc : $\forall n, p \in \mathbb{N},\ L\big(a, b\,; g_n(0), g_p(0)\big) = 0$. Comme la suite de fonctions $t \longmapsto |g_n(t) - g(t)|$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R}, 2^{-|t|}dt)$, il en existe une sous-suite qui converge presque partout vers 0. Il existe donc un négligeable $N \subset \mathbb{R}$ et une suite croissante d'entiers $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tels que, pour $t \notin N, g_{n_p}(t)$ converge vers $g(t)$ lorsque p tend vers $+\infty$. Au paragraphe V-7, on établira l'existence d'une constante $M > 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour toute géodésique h d'extrémités (a, b), on ait $|L\big(a, b; h(0), h(t)\big)| \leqslant M|t|$. Compte tenu des égalités ci-dessous :

$$L\big(a, b; g_n(t), g_{n_p}(t)\big) =$$
$$L\big(a, b; g_n(t), g_n(0)\big) + L\big(a, b; g_n(0), g_{n_p}(0)\big) + L\big(a, b; g_{n_p}(0), g_{n_p}(t)\big)$$

et $L\big(a, b; g_n(0), g_{n_p}(0)\big) = 0$, on en déduit : $|L(a, b; g_n(t), g_{n_p}(t)| \leqslant 2M|t|$.
En prenant $t \notin N$ et en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient :

$$|L\big(a, b; g_n(t), g(t)\big)| \leqslant 2M|t|.$$

Puis en faisant tendre t vers 0, $t \notin N$, il vient :

$$L\big(a, b; g_n(0), g(0)\big) = 0,$$

de sorte que $g \sim g_n$, et les classes modulo $\sim$ sont fermées. ∎

4. Propriétés métriques de l'espace $\widehat{G}$.

Il s'agit de munir $\widehat{G}$ d'une métrique Γ-invariante qui redonne la topologie quotient de $\widehat{G}$. Je remercie ici Christophe Champetier de l'E.N.S. Lyon pour m'avoir signalé une erreur dans une première version.

En guise de premier essai, étudions la métrique de Hausdorff sur $\widehat{G}$. L'écart de Hausdorff est défini, pour $\xi \cdot \eta \in \widehat{G}$, par :

$$\begin{aligned}|\xi - \eta|_{\mathcal{H}} &= \inf\{H > 0 \text{ tel que } \forall g \in \xi, d(g, \eta) \leqslant H \text{ et } \forall y \in \eta, d(y, \xi) \leqslant H\} \\ &= \max\{\sup_{g\in\xi} d(g, \eta)\ ;\ \sup_{y\in\eta} d(y, \xi)\}.\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire est toujours vérifiée. Comme les éléments de $\widehat{G}$ sont des parties compactes de GX, cet écart est en fait une distance : pour $\xi \cdot \eta \in \widehat{G}$, on a $|\xi - \eta|_{\mathcal{H}} < +\infty$, et $|\xi - \eta|_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow \xi = \eta$. Cette distance est Γ-invariante, et la projection $GX \to \widehat{G}$ est une quasi-isométrie. En effet, si C désigne la constante du lemme du § V-3 et si $\overline{g}$ désigne la classe de $g \in GX$ modulo $\sim$, alors il est aisé de voir que $|g-h|_{GX} - 2C \leqslant |\overline{g} - \overline{h}|_{\mathcal{H}} \leqslant |g-h|_{GX} + 2C$. Le problème est que cette distance ne redonne peut-être pas la topologie quotient de $\widehat{G}$.

Pour prouver la proposition suivante, le lecteur pourra consulter [Ch], ou suivre les indications de [Gr 2] § 8-3-D :

PROPOSITION. — *Il existe sur $\widehat{G}$ une métrique, notée $|\cdot|_{\widehat{G}}$, Γ-invariante qui redonne la topologie quotient de $\widehat{G}$.*

Puisque $\widehat{G}/\Gamma$ est compact, on en déduit aussitôt que l'application $\Gamma \to \widehat{G}, \gamma \mapsto \gamma \cdot \xi$ (ξ fixé $\in \widehat{G}$) est une quasi-isométrie.

Etudions maintenant la projection $GX \to \widehat{G}$. Elle est bien entendu continue. Pour voir que c'est une quasi-isométrie, il suffit de voir que c'est le cas pour l'application $\Gamma \to GX, \gamma \mapsto \gamma \cdot g$ où $g \in GX$.

Ce dernier fait provient de ce que, dans le diagramme commutatif ci-contre, les deux flèches $\Gamma \to X, \gamma \mapsto \gamma \cdot g(0)$ et $GX \to X, h \mapsto h(0)$ sont des quasi-isométries.

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma, |\cdot|_W) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\bigcirc"] & (GX, |\cdot|_{GX}) \arrow[d] \\
 & (X, |\cdot|)
\end{tikzcd}$$

5. Recollement de géodésiques.

Le but de ce paragraphe est d'étudier la restriction de l'application $GX \to \widehat{G}$ à une $\mathbf{R}$-orbite, puis d'étudier la façon dont deux géodésiques de X ayant mêmes extrémités, se trouvent "recollées" par la relation $\sim$.

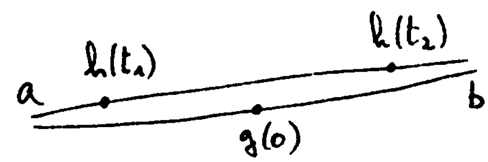
Soient $x_1 = g(t_1)$ et $x_2 = g(t_2)$ deux points sur une même géodésique g d'extrémités (a,b), avec $x_1 \neq x_2$. Pour $\gamma \in \Gamma$ tel que $\eta(\gamma a, \gamma b) \neq 0$, on a :

$$L_0(\gamma a, \gamma b\,; \gamma x_1, \gamma x_2) = \eta(\gamma a, \gamma b) \frac{1}{\int_{\mathbf{R}} \Psi \circ \gamma g} \int_{t_2}^{t_1} \Psi \circ \gamma g(t) dt$$

dont le signe ne dépend pas de γ. Comme $\Gamma \setminus X$ est borné, si ρ_1' est assez grand (supérieur à diam$(\Gamma \setminus X)$), il existe $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tel que $\tilde{\gamma} x_1 \in B(x_0, \rho_1')$, de sorte que $L_0(\tilde{\gamma} a, \tilde{\gamma} b\,; \tilde{\gamma} x_1, \tilde{\gamma} x_2) \neq 0$. Finalement, si $t_1 \neq t_2$, alors $L\big(a,b\,; g(t_1), g(t_2)\big) \neq 0$, de sorte que g et g^α ne sont équivalents que si $\alpha = 0$ (on rappelle que g^α désigne la géodésique $t \mapsto g(\alpha + t)$). Il s'en suit que l'application $t \mapsto \overline{g^t}$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur son image.

Maintenant, soient deux géodésiques g, h ayant mêmes extrémités (a,b). Alors il existe un unique $t \in \mathbf{R}$ tel que $g \sim h^t$. Prouvons ceci. Déjà, il existe t_1 et t_2 réels, vérifiant les propriétés suivantes :

i) $|g(0) - h(t_i)| \geqslant C$ pour $i = 1, 2$



ii) $L(a,b\,;g(0),h(t_1)) > 0$ et $L(a,b\,;g(0),h(t_2)) < 0$

Donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $L(a,b\,;g(0),h(t)) = 0$ et t est unique, car $h^t \sim h^s$ implique $t = s$. On a donc montré que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'équation $L(a,b\,;g(t),h(s)) = 0$ à l'inconnue s, admet une unique solution s_t. L'application $t \mapsto s_t, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien sûr un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$, car les applications $t \mapsto \overline{g^t}$ et $s \mapsto \overline{h^s}$ sont des homéomorphismes sur leurs images qui sont égales, et qui sont parcourues dans le même sens. Cette application $t \mapsto s_t$ est enfin une quasi-isométrie, comme on le vérifie facilement :

$$\begin{aligned}|s_{t_1} - s_{t_2}| &= |h(s_{t_1}) - h(s_{t_2})|\\ &\leqslant |h(s_{t_1}) - g(t_1)| + |g(t_1) - g(t_2)| + |g(t_2) - h(s_{t_2})|\\ &\leqslant C + |t_1 - t_2| + C\end{aligned}$$

donc $|s_{t_1} - s_{t_2}| \leqslant |t_1 - t_2| + 2C$. En permutant t et s_t, on trouve :

$$|t_1 - t_2| - 2C \leqslant |s_{t_1} - s_{t_2}| \leqslant |t_1 - t_2| + 2C.$$

6. Flot géodésique sur $\widehat{G}$.

Il s'agit, dans le présent paragraphe, de définir un flot géodésique, c'est-à-dire une action de $\mathbb{R}$ sur $\widehat{G}$. La $\mathbb{R}$-orbite de $\widehat{G}$ d'extrémités (a,b) sera l'image de l'application $\mathbb{R} \to \widehat{G}, t \mapsto \overline{g^t}$ (classe de g^t modulo $\sim$), où $g \in GX$ a pour extrémités (a,b). En revanche, son paramétrage ne proviendra pas de celui de g, car l'action de $\mathbb{R}$ sur GX n'est pas compatible avec la relation $\sim$, c'est-à-dire que $g \sim h$ n'implique pas $g^t \sim h^t$. On va procéder comme suit.

Soient a, b deux points distincts dans ∂X, et $g \in GX$ une géodésique d'extrémités (a,b). Commençons par étudier l'application $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, s \mapsto L(a,b\,;g(0),g(s))$. (Pour la définition de L, voir § V-1) on a :

$$\Phi(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \eta(\gamma a, \gamma b) \cdot \frac{\int_0^s \Psi \circ \gamma g(u)du}{\int_{\mathbb{R}} \Psi \circ \gamma g} \text{ et } \Phi'(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \eta(\gamma a, \gamma b)\frac{\Psi \circ \gamma g(s)}{\int_{\mathbb{R}} \Psi \circ \gamma g}$$

LEMME 1. — *Il existe $m > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}, \Phi'(s) \geqslant m$.*

Preuve. — Commençons par minorer la fonction η. On rappelle que $\eta(a,b) = \mathrm{dist}[(a,b)\,;\mathcal{A}]$ où $\mathcal{A} = \{(a,b) \in \partial^2 X$ tel qu'il existe une géodésique d'extrémités (a,b) ne rencontrant pas $B_0(x_0,\rho)\}$. Soit $\rho' > 0$, et B l'ensemble $\{(a,b) \in \partial^2 X$ tel qu'il existe une géodésique d'extrémités (a,b) qui rencontre $B_f(x_0,\rho')\}$ (on rappelle que B_0=boule ouverte et B_f=boule fermée). L'ensemble B est fermé (c'est la même preuve que pour $\mathcal{A}$: voir § V-1), et même compact. De plus, si $\rho' + 16\delta < \rho$, alors $B \cap \mathcal{A} = \emptyset$, car deux géodésiques ayant mêmes extrémités sont 16δ-proches (voir [G-H] p. 119). Pour tout $x \in B, d(x,\mathcal{A}) > 0$ et donc $d = \mathrm{dist}(B,\mathcal{A}) = \inf_{x\in B} d(x,\mathcal{A}) > 0$. On suppose maintenant que $2\rho' > \mathrm{diam}(X/\Gamma)$, de sorte qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma g(s) \in B_f(x_0,\rho')$, et alors $(\gamma a, \gamma b) \in B$, donc $\eta(\gamma a, \gamma b) \geqslant d$.

Comme $\rho' < \rho < \rho_0$, on aura aussi $\Psi[\gamma g(s)] = 1$. Enfin, si $u \notin [s-C, s+C]$ où $C = \rho_1 + \rho' + 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}|\gamma g(u) - x_0| &\geqslant |\gamma g(u) - \gamma g(s)| - |\gamma g(s) - x_0| = |u - s| - |\gamma g(s) - x_0|\\ &\geqslant C - \rho' = \rho_1 + 1 > \rho_1\end{aligned}$$

de sorte que $\Psi[\gamma g(u)] = 0$, car Ψ est nulle en dehors de $B_f(x_0, \rho_1)$ donc $\int_{\mathbb{R}} \Psi \circ \gamma g = \int_{s-C}^{s+C} \Psi \circ \gamma g \leqslant 2C$, et donc $\Phi'(s) \geqslant \frac{d}{2C}$. ∎

On en déduit que Φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ de sorte que l'on peut énoncer :

$$\forall (a,b) \in \partial^2 X,\ \forall g \in GX \text{ d'extrémités } (a,b),\ \forall t \in \mathbb{R},$$
$$\exists ! s \in \mathbb{R} \text{ tel que } L\big(a,b\,; g(0), g(s)\big) = t.$$

On définit maintenant un flot sur $\widehat{G}$ via L de la façon suivante. Si $\xi \in \widehat{G}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors $\xi(t)$ est défini par :

$$\forall g \in \xi, \quad g^s \in \xi(t) \iff L\big(a,b\,; g(0), g(s)\big) = t.$$

Cette définition a bien un sens, car si $g_1 \sim g_2$ et si $g_1^{s_1} \sim g_2^{s_2}$, alors

$$\begin{aligned} L(a,b; g_1(0), g_1(s_1)) &= L(a,b; g_1(0), g_2(0)) + L(a,b; g_2(0), g_2(s_2)) + L(a,b; g_2(s_2), g_1(s_1)) \\ &= 0 + L(a,b; g_2(0), g_2(s_2)) + 0. \end{aligned}$$

7. Propriétés du flot géodésique.

On observe tout d'abord que, puisque L est Γ-invariant et que $L(b,a\,; x_1, x_2) = -L(a,b,x_1,x_2)$, cette action de $\mathbb{R}$ sur $\widehat{G}$ est compatible avec celle de $\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'elle commute avec celle de Γ, et anticommute avec celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On vérifie ensuite que chaque orbite $t \longmapsto \xi(t)$ est un plongement quasi-isométrique de $\mathbb{R}$ dans $\widehat{G}$. L'application $t \longmapsto \xi(t)$ est la composée de trois applications :

i) $\Phi^{-1} : t \longmapsto \Phi^{-1}(t) = s$

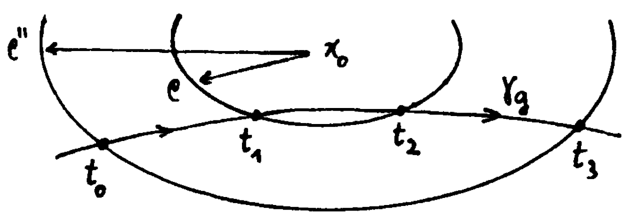
ii) le flot géodésique $s \longmapsto g^s$ sur GX, qui est bilipschitz

iii) la projection $GX \to \widehat{G}$ qui est une quasi-isométrie.

Pour savoir si l'orbite $t \longmapsto \xi(t)$ est une quasi-géodésique, il suffit donc de montrer que Φ^{-1} est bilipschitz. On sait, d'après le lemme 1 du paragraphe précédent, que $\Phi' \geqslant m > 0$, il reste donc à établir le lemme suivant :

LEMME 2. — *Il existe M tel que $\forall s \in \mathbb{R}$, $\Phi'(s) \leqslant M$.*

Preuve. — Commençons par minorer $\int_{\mathbb{R}} \Psi \circ \gamma g$. Si $\eta(\gamma a, \gamma b) > 0$, alors la géodésique γg rencontre la boule $B_0(x_0, \rho)$.



Soit $\rho'' \in]\rho, \rho_0[$

Soit $t_1 = \inf\{t \setminus |\gamma g(t) - x_0| = \rho\}$

$t_2 = \sup\{t \setminus |\gamma g(t) - x_0| = \rho\}$

$t_0 = \sup\{t < t_1 \setminus |\gamma g(t) - x_0| \geqslant \rho''\}$

$t_3 = \inf\{t > t_2 \setminus |\gamma g(t) - x_0| \geqslant \rho''\}$

Puisque $\gamma g(t_0)$ et $\gamma g(t_3)$ sont à distance ρ'' de x_0, on en déduit que le segment géodésique $[\gamma g(t_0), \gamma g(t_3)]$ est à distance au plus $\rho'' + 2\delta$ de x_0, car les boules de X sont 2δ-convexes ([G-H] p. 45). Si l'on choisit ρ'' et ρ_0 tels que $\rho'' + 2\delta \leqslant \rho_0$, on a $\Psi \circ \gamma g(t) = 1$ pour $t \in [t_0, t_3]$; de plus,

$$|t_3 - t_0| \geqslant |t_1 - t_0| = |\gamma g(t_1) - \gamma g(t_0)| \geqslant |\gamma g(t_0) - x_0| - |x_0 - \gamma g(t_1)| \geqslant \rho'' - \rho$$

donc $\int_{\mathbb{R}} \Psi \circ \gamma g \geqslant \int_{t_0}^{t_3} \Psi \circ \gamma g \geqslant \rho'' - \rho$.

Maintenant, majorons la fonction η. Soit $\mathcal{C} = \{(a,b) \in \partial^2 X$ tel qu'il existe une géodésique d'extrémités (a,b) rencontrant $B_0(x_0,\rho)\}$.

Cet ensemble $\mathcal{C}$ est compact, et $\mathcal{C} \cup \mathcal{A} = \partial^2 X$, de sorte que la fonction η est nulle sur le complémentaire de $\mathcal{C}$ dans $\partial^2 X$. Finalement, la fonction η est bornée sur $\partial^2 X$, par M_0 par exemple.

Enfin, le cardinal de l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \setminus \Psi \circ \gamma g(s) \neq 0\}$, qui est fini, est majoré indépendamment de s et g. En effet, cet ensemble est précisément $\{\gamma \in \Gamma \setminus \gamma g(s) \in B_0(x_0,\rho_1)\}$. Par ailleurs, le quotient X/Γ étant de diamètre fini D, il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $|x_0 - \gamma_0 g(s)| \leqslant D$. Puis, si $|x_0 - \gamma g(s)| \leqslant \rho_1$, alors on a

$$\begin{aligned} |x_0 - \gamma\gamma_0^{-1}x_0| &\leqslant |x_0 - \gamma g(s)| + |\gamma g(s) - \gamma\gamma_0^{-1}x_0| \\ &\leqslant \rho_1 + |g(s) - \gamma_0^{-1}x_0| = \rho_1 + |x_0 - \gamma_0 g(s)| \leqslant \rho_1 + D. \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \setminus \gamma g(s) \in B_0(x_0,\rho_1)\}$ est contenu dans un translaté de $\{\gamma \in \Gamma \setminus \gamma x_0 \in B_f(x_0,\rho_1 + D)\}$ dont le cardinal N est indépendant de g et s.

De tout ceci, on déduit : $\forall s \in \mathbb{R},\ \Phi'(s) \leqslant \dfrac{N \cdot M_0}{\rho'' - \rho}$. ∎

Signalons, pour terminer, que l'application $D : \widehat{G} \to \partial^2\widehat{G}$ qui, à un élément de $\widehat{G}$ associe les extrémités de sa $\mathbb{R}$-orbite, est $\Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-équivariante, et passe au quotient en un homéomorphisme équivariant entre $\widehat{G}/\mathbb{R}$ et $\partial^2 G \simeq \partial^2\Gamma$. Le prochain paragraphe va permettre de reconstituer $\widehat{G}$ à partir de $\partial^2\Gamma$ et $\mathbb{R}$.

8. L'espace $\widehat{G}$ est homéomorphe à $\partial^2\Gamma \times \mathbb{R}$.

Rappelons quelle est la situation. On dispose d'un espace métrique hyperbolique propre $\widehat{G}$, et d'une action de $\mathbb{R}$ sur $\widehat{G}$ vérifiant

i) chaque orbite $\mathbb{R} \to \widehat{G}$ est un plongement quasi-isométrique

ii) l'espace des orbites est homéomorphe à $\partial^2\widehat{G}$.

On va montrer qu'il existe un homéomorphisme entre $\widehat{G}$ et $\partial^2\widehat{G} \times \mathbb{R}$. Il s'agit en fait de construire une section de la projection $D : \widehat{G} \to \partial^2\widehat{G}$, c'est-à-dire une application continue $s : \partial^2\widehat{G} \to \widehat{G}$ telle que $D \circ s = \mathrm{Id}_{\partial^2\widehat{G}}$.

Soit $x_0 \in \widehat{G}$, et $\mu : \widehat{G} \to \mathbb{R}_+^*$ l'application donnée par $\mu(x) = e^{-|x-x_0|}$. Soit $(a,b) \in \partial^2\widehat{G}$. Si $t \mapsto g(t)$ est un paramétrage de l'orbite d'extrémités (a,b), on note τ le réel donné par :

$$\int_{-\infty}^{\tau} \mu[g(t)]dt = \int_{\tau}^{+\infty} \mu[g(t)]dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu[g(t)]dt.$$

Puis on note $x(a,b) = g(\tau)$ le point de paramètre τ sur g. Il est aisé de voir que $x(a,b)$ ne dépend pas du paramétrage de la $\mathbb{R}$-orbite entre a et b : si $g^\alpha : t \mapsto g(\alpha + t)$ en est un autre, alors le réel τ' associé à ce paramétrage vérifie $\tau = \tau' + \alpha$, et on a bien $g(\tau) = g^\alpha(\tau')$.

L'application $s : \partial^2\widehat{G} \to \widehat{G}, (a,b) \mapsto x(a,b)$ vérifie donc $D \circ s = \mathrm{Id}_{\partial^2\widehat{G}}$. Vérifions qu'elle est continue. Soit $f : \widehat{G} \to]0,1[$ l'application donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \mu \circ g} \int_{-\infty}^{t} \mu \circ g(s) ds$$

où $x = g(t)$, et où $t \mapsto g(t)$ est un paramétrage de la $\mathbb{R}$-orbite de x. Bien sûr, $f(x)$ ne dépend que de x, et non du paramétrage de son orbite.

Montrons que f est continue. Soit $x \in \widehat{G}$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points convergeants vers x. On choisit le paramétrage g_n(resp. g) de l'orbite de x_n(resp. x) de sorte que $x_n = g_n(0)$(resp. $x = g(0)$). De $\lim_{n\to+\infty} g_n(0) = g(0)$. On déduit $\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = g(t)$ puis on déduit que (g_n) converge vers g uniformément sur les compacts. On en déduit enfin que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu \circ g_n = \int_{\mathbb{R}} \mu \circ g$ et que $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} \mu \circ g_n = \int_{-\infty}^{0} \mu \circ g$, et donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. La fonction f est donc continue.

Etablissons maintenant la continuité de s. Soit $(a,b) \in \partial^2\widehat{G}$, et $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers (a,b). Soit $x_n = x(a_n,b_n)\big(\text{resp. } x = x(a,b)\big)$. On a donc

$$f(x_n) = \frac{1}{2}\big(\text{resp. } f(x) = \frac{1}{2}\big).$$

Soit enfin g_n le paramétrage de l'orbite de x_n tel que $x_n = g_n(0)$. En utilisant le fait que $D(g_n)$ converge vers (a,b), et le lemme du § V-1, on voit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. L'ensemble de ses valeurs est donc d'adhérence compacte, donc il existe une sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente. Soit y sa limite. La continuité de f donne $f(y) = \frac{1}{2}$, et celle de D donne $D(y) = (a,b) = D(x)$. En observant que la restriction de f à chaque $\mathbb{R}$-orbite est un homéomorphisme croissant sur $]0,1[$, il vient $y = x$, et donc (x_{n_p}) converge vers x.

En résumé, la suite (x_n) est donc une suite à valeurs dans un compact, et admettant x pour unique valeur d'adhérence. On en déduit que (x_n) converge vers x. Finalement la fonction s est bien continue.

On construit alors aisément l'homéomorphisme cherché soit $F : \partial^2\widehat{G} \times \mathbb{R} \to \widehat{G}$ l'application qui, au triplet $(a,b\,;t)$, associe le point de paramètre t sur l'orbite de $x(a,b)$, paramétrée de sorte que $x(a,b)$ soit le point de paramètre 0. Alors F est un homéomorphisme entre $\partial^2\widehat{G} \times \mathbb{R}$ et $\widehat{G}$ qui conjugue les actions de $\mathbb{R}$.

9. Conclusion.

A partir d'un espace hyperbolique X, on a construit un espace $\widehat{G}$ quasi-isométrique à X et un flot géodésique sur $\widehat{G}$ vérifiant les propriétés *i), ii)* et *iii)* du théorème.

On va maintenant étudier les questions d'unicité du flot géodésique.

VI. Unicité du flot géodésique

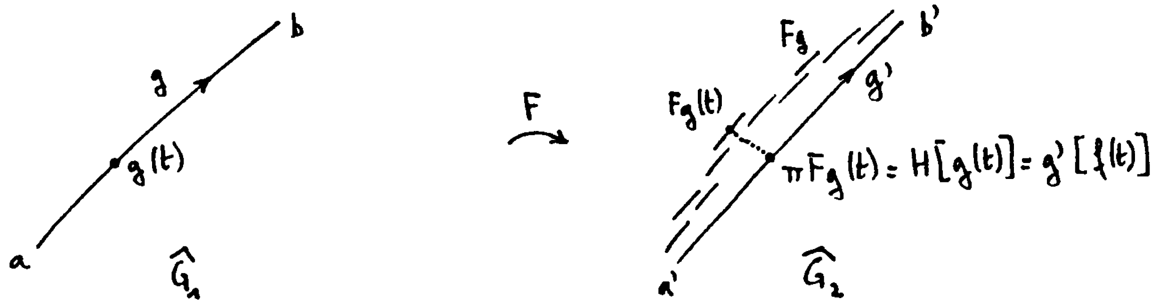
1. Unicité faible du flot géodésique.

Soient $\widehat{G}_1$ et $\widehat{G}_2$ deux espaces métriques hyperboliques propres, vérifiant les propriétés *i), ii)* et *iii)* du théorème principal. On va construire une quasi-isométrie $\Gamma \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-équivariante entre $\widehat{G}_1$ et $\widehat{G}_2$ qui envoie homéomorphiquement $\mathbf{R}$-orbites sur $\mathbf{R}$-orbites. Ceci achèvera la preuve du théorème.

On a déjà, pour $i = 1,2$, une quasi-isométrie quasi-surjective et Γ-équivariante, $\Gamma \to \widehat{G}_i, \gamma \mapsto \gamma \cdot g_i$, où $g_i \in \widehat{G}_i$ est fixé, qui fournit un homéomorphisme Γ-équivariant entre $\partial\Gamma$ et $\partial\widehat{G}_i$. On dispose donc d'une quasi-isométrie Γ-équivariante $F : \widehat{G}_1 \to \widehat{G}_2$ dont le prolongement $\widetilde{F} : \partial\widehat{G}_1 \to \partial\widehat{G}_2$ est un homéomorphisme Γ-équivariant.

Soit $g : t \mapsto g(t)$ une $\mathbf{R}$-orbite dans $\widehat{G}_1$ d'extrémités (a,b). L'application $\mathbf{R} \to \widehat{G}_2, t \mapsto F[g(t)]$ est alors une quasi-géodésique de $\widehat{G}_2$ d'extrémités $(a',b') = \widetilde{F}(a,b)$. Notons $s \mapsto g'(s)$ un paramétrage de la $\mathbf{R}$-orbite d'extrémités (a',b') dans $\widehat{G}_2$, et $\pi : \widehat{G}_2 \to g'(\mathbf{R})$ la projection ainsi définie : pour $y \in \widehat{G}_2$, $\pi(y)$ est l'élément de $g'(\mathbf{R})$ de paramètre t défini par : $t = \inf\{s \in \mathbf{R}, |g'(s) - y| = \mathrm{dist}[y, g'(\mathbf{R})]\}$.

En remplaçant, le long de $g(\mathbf{R}), F$ par $\pi \circ F$, et en modifiant ainsi F le long de chaque $\mathbf{R}$-orbite, on obtient une quasi-isométrie $H : \widehat{G}_1 \to \widehat{G}_2$, envoyant $\mathbf{R}$-orbites sur $\mathbf{R}$-orbites et Γ-équivariante, car Γ opère par isométries sur $\widehat{G}_2$.



Soit g une orbite de $\widehat{G}_1$ et g' l'orbite de $\widehat{G}_2$ image de g par H. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application donnée par : $H \circ g = g' \circ f$. La fonction f est une quasi-isométrie de $\mathbf{R}$, que l'on va maintenant tenter de "régulariser". Pour ce faire, on va introduire la notion de diffusion.

Soit T un réel strictement positif, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction localement intégrable. La T-diffusion de f est l'application $f_T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_T(x) = \frac{1}{2T}\int_{x-T}^{x+T} f(t)dt$. La fonction f_T est continue, dérivable presque partout, et est une quasi-isométrie dès que f est une quasi-isométrie. Notons f_{TT} la T-diffusion de f_T : c'est une fonction continûment dérivable, dont la dérivée est donnée par

$$f'_{TT}(x) = \frac{1}{2T}\left[f_T(x+T) - f_T(x-T)\right].$$

De plus, si f est une quasi-isométrie, il existe alors deux réels $\lambda, C > 0$ tels que l'on ait, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\lambda}|s-t| - C \leqslant |f_T(s) - f_T(t)| \leqslant \lambda|s-t| + C,$$

de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}, |f'_{TT}(x)| \geqslant \frac{1}{2T}\left(\frac{2T}{\lambda} - C\right)$. Si $T > \frac{\lambda C}{2}$, la fonction f_{TT} est alors un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.

Dans la situation présente, f est une quasi-isométrie mesurable de $\mathbb{R}$, "croissante à grande distance", de sorte que f_{TT} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$. On pose donc $\widetilde{H}[g(t)] = g'[f_{TT}(t)]$. Il est aisé de vérifier que cette définition ne dépend pas du choix du paramétrage de l'orbite g. Ceci provient du fait que, si $f^\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction donnée par $f^\tau(x) = f(x+\tau)$, alors on a $(f^\tau)_T = (f_T)^\tau$: les opérations de diffusion et de translation commutent. En remplaçant H par $\widetilde{H}$ le long de $g(\mathbb{R})$, et en modifiant ainsi H le long de chaque $\mathbb{R}$-orbite, on obtient une quasi-isométrie $\widetilde{H} : \widehat{G}_1 \longrightarrow \widehat{G}_2$ envoyant homéomorphiquement $\mathbb{R}$-orbites sur $\mathbb{R}$-orbites. Vérifions que $\widetilde{H}$ est Γ-équivariante. Soit $\gamma \in \Gamma$. L'égalité entre $\gamma^{-1} \circ H \circ \gamma$ et H le long de $g(\mathbb{R})$ se traduit par l'existence de deux constantes réelles σ et τ (ne dépendant que de γ et de l'orbite g) vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+\tau) = f(t) + \sigma$; il est clair qu'alors f_T et f_{TT} vérifient la même propriété, donc que $\widetilde{H}$ est Γ-équivariante.

2. Unicité forte dans le cas géométrique.

On se propose ici de démontrer le théorème annoncé dans l'introduction, et que l'on rappelle ici :

THÉORÈME. — *Soient (V, g) et (V', g') deux variétés riemanniennes connexes compactes à courbures négatives, et soit φ un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de V et V'.*

Alors il existe un homéomorphisme $h(\varphi)$ entre les fibrés unitaires tangents $T_1(V)$ et $T_1(V')$ à V et V', qui envoie les orbites du flot géodésique de V sur celle du flot géodésique de V'.

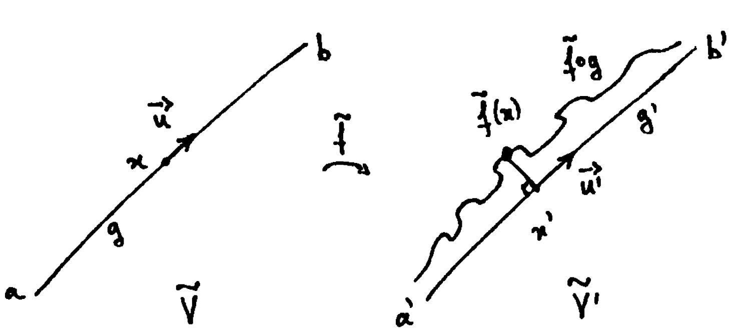
Preuve. — Le revêtement universel $\widetilde{V}$ de V est une variété riemanienne simplement connexe, complète, dont la courbure K vérifie $K \leqslant k < 0$. C'est donc un espace métrique hyperbolique. De plus, l'espace $G\widetilde{V}$ des géodésiques de $\widetilde{V}$, c'est-à-dire des isométries de $\mathbb{R}$ dans $\widetilde{V}$, s'identifie naturellement au fibré unitaire tangent $T_1\widetilde{V}$ à $\widetilde{V}$. On rappelle enfin que, puisque le groupe fondamental Γ de V est un sous-groupe discret d'isométries de $\widetilde{V}$ opérant proprement discontinûment et avec quotient compact sur $\widetilde{V}$, Γ est quasi-isométrique à $\widetilde{V}$, et est donc un groupe hyperbolique. Pour tous ces faits, voir [G-H], chapitre 3.

Bien entendu, tout ceci reste vrai en remplaçant V(resp. $\widetilde{V}, \Gamma, T_1\widetilde{V}$) par V'(resp. $\widetilde{V}', \Gamma' = \pi_1(V'), T_1\widetilde{V}'$).

On va maintenant construire une application continue $F : T_1\widetilde{V} \to T_1\widetilde{V}'$ qui conjugue les actions de Γ et Γ' via l'isomorphisme φ, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $p \in T_1\widetilde{V}$, $\gamma \in \Gamma$,

$$F(\gamma \cdot p) = \varphi(\gamma) \cdot F(p).$$

Tout d'abord, d'après le théorème de Cartan-Hadamard, la variété $\widetilde{V}$(resp. $\widetilde{V}'$) est contractile, de sorte que, pour $n \geqslant 2$, $\pi_n(V) \simeq \pi_n(\widetilde{V}) = \{0\}$, ce qui exprime que V(resp. V') est un $K(\pi, 1)$. Un théorème de G. Whitehead ([W], p. 82) assure alors l'existence d'une application continue $f : V \to V'$ induisant l'isomorphisme φ entre $\Gamma = \pi_1(V)$ et $\Gamma' = \pi_1(V')$. On relève f en une application $\widetilde{f} : \widetilde{V} \to \widetilde{V}'$ qui conjugue les actions de Γ et Γ' sur $\widetilde{V}$ et $\widetilde{V}'$ via φ. On construit alors $F : T_1\widetilde{V} \to T_1\widetilde{V}'$ de la façon suivante. On observe tout d'abord que l'application $\widetilde{f}$ est une quasi-isométrie entre $\widetilde{V}$ et $\widetilde{V}'$, qui induit un homéomorphisme équivariant $\partial\widetilde{f}$ entre $\partial\widetilde{V}$ et $\partial\widetilde{V}'$. Maintenant, soit $(x, \overrightarrow{u}) \in T_1\widetilde{V}$; notons (a, b) les extrémités de la géodésique de $\widetilde{V}$ qui passe par x et dirigée par $\overrightarrow{u}$, et $(a', b') = (\partial\widetilde{f}(a), \partial\widetilde{f}(b))$. Soit x' le projeté orthogonal de $\widetilde{f}(x)$ sur la géodésique de $\widetilde{V}'$ d'extrémités (a', b'), et $\overrightarrow{u'}$ le vecteur unitaire tangent à cette géodésique en x', et dirigé de a' vers b'. On pose $F(x, \overrightarrow{u}) = (x', \overrightarrow{u'})$.



L'application F est continue, car $\widetilde{f}$ l'est, et car une géodésique dépend de ses extrémités de façon continue. Elle est équivariante, car $\partial\widetilde{f}$ l'est, et car Γ' opère par isométries sur $\widetilde{V}'$. Elle est surjective, car son prolongement à $\partial\widetilde{V}$ et $\partial\widetilde{V}'$ est l'homéomorphisme $\partial\widetilde{f}$, de sorte que toutes les orbites sont atteintes, et car l'image par $\widetilde{f}$ de la géodésique g d'extrémités (a, b) est une quasi-géodésique de $\widetilde{V}'$ d'extrémités (a', b'), qui reste donc à distance bornée de la géodésique g' de $\widetilde{V}'$ d'extrémités (a', b'), de sorte que la projection orthogonale de $\widetilde{f} \circ g(\mathbf{R})$ sur $g'(\mathbf{R})$ est surjective. L'application F envoie les orbites sur les orbites, mais n'est pas injective. Puisque deux points de $\widetilde{V}$ situés sur deux orbites distincts ont des images par F distinctes, il suffit, pour rendre F injective, de rendre injective sa restriction à chaque $\mathbf{R}$-orbite.

Soit $(a, b) \in \partial^2\widetilde{V}$, et $t \mapsto g(t)$ un paramétrage de la géodésique de $\widetilde{V}$ d'extrémités (a, b). Posons $a' = \partial\widetilde{f}(a), b' = \partial\widetilde{f}(b)$ et notons $t \mapsto g'(t)$ un paramétrage de la géodésique de $\widetilde{V}'$ d'extrémités (a', b'). La restriction de F à $g(\mathbf{R})$ et $g'(\mathbf{R})$ fournit une application continue $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, quasi-isométrique, donnée par : $F \circ g = g' \circ \varphi$. On dispose donc de deux constantes λ, C, qui ne dépendent que des constantes de quasi-isométrie de F– et non de la géodésique choisie – et qui vérifient :

$$\forall t, s \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{\lambda}|s - t| - C \leqslant |\varphi(t) - \varphi(s)| \leqslant \lambda|s - t| + C.$$

Notons φ_T la T-diffusion de φ (T est un réel > 0). C'est l'application donnée par $\varphi_T(x) = \frac{1}{2T}\int_{x-T}^{x+T} \varphi(s)ds$. L'application φ_T est continûment dérivable, et sa dérivée vérifie :

$$|\varphi_T'(x)| = \left|\frac{\varphi(x+T)-\varphi(x-T)}{2T}\right| \geqslant \frac{1}{2T}\left(\frac{2T}{\lambda} - C\right) > 0 \text{ dès que } T > \frac{\lambda C}{2}$$

de sorte que φ_T est alors un homéomorphisme croissant de $\mathbf{R}$. Posons $H\left[g(t)\right] = g'\left[\varphi_T(t)\right]$. En remplaçant F par H le long de $g(\mathbf{R})$ et en modifiant F ainsi le long de chaque orbite, on supprime le défaut d'injectivité de F. L'application H ainsi construite est continue, surjective, et envoie homéomorphiquement $\mathbf{R}$-orbites sur $\mathbf{R}$-orbites. C'est un homéomorphisme, qui conjugue toujours les actions de Γ et Γ' sur $T^1\widetilde{V}$ et $T^1\widetilde{V}'$ via φ. Il répond à la question. (Pour des détails sur la diffusion, voir le § VI-1).

Appendice. — Le but de cet appendice est de construire un espace métrique non localement compact qui ne possède pas de flot géodésique. Plus précisément, on va construire un espace métrique non localement compact X, quasi-isométrique à $\mathbf{R}$, et possédant un groupe d'isométries Γ opérant proprement discontinûment sur X, vérifiant

i) le quotient $\Gamma \setminus X$ est borné,

ii) il n'y a pas d'action isométrique (non triviale) de Γ sur $\mathbf{R}$.

Un tel espace X n'a pas de flot géodésique. En effet, supposons qu'il existe un espace métrique $\widehat{G}$ comme dans le théorème principal. Comme X est quasi-isométrique à $\mathbf{R}$, on a :

$$\partial\widehat{G} = \partial X = \partial\mathbf{R} = \{-\infty, +\infty\},$$

de sorte que $\widehat{G}$ est constitué d'une seule géodésique, et est donc isométrique à $\mathbf{R}$. L'action de Γ sur $\widehat{G}$ par isométries est donc triviale, ce qui contredit la propriété *ii)* du théorème que doit vérifier $\widehat{G}$.

La construction de l'espace X repose sur le lemme suivant :

LEMME. — *Soit Γ un groupe de type fini possédant un quasi-morphisme non borné $h : \Gamma \to \mathbf{R}$ vérifiant : $\forall\gamma,\ h(\gamma^{-1}) = -h(\gamma)$.*

Alors il existe un système de générateurs S de Γ tel que, si d_S désigne la métrique des mots sur Γ associée à S, l'application $h : (\Gamma, d_S) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ soit une quasi-isométrie.

Démonstration. — Par définition, il existe $d \geqslant 0$ tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $|h(\gamma_1\gamma_2) - h(\gamma_1) - h(\gamma_2)| \leqslant d$. Comme h n'est pas borné, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $h(\gamma) > d$. De l'inégalité $|h(\gamma^n) - nh(\gamma)| \leqslant nd$ on tire $h(\gamma^n) \geqslant n[h(\gamma) - d]$, de sorte que $\lim_{n\to+\infty} h(\gamma^n) = +\infty$. De l'inégalité $|h(\gamma^n) - h(\gamma) - h(\gamma^{n-1})| \leqslant d$ on déduit $|h(\gamma^n) - h(\gamma^{n-1})| \leqslant K$ où $K = d + h(\gamma)$, et ce pour tout $n \in \mathbf{Z}$. En observant que l'on a aussi $\lim_{n\to-\infty} h(\gamma^n) = -\infty$, on voit que la constante K vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{dist}[x, h(\Gamma)] \leqslant K,$$

ce qui exprime que la fonction h est quasi-surjective.

Maintenant, soit S_0 un système fini de générateurs de Γ, et c un réel positif vérifiant : $h^{-1}([-c,c]) \supset S_0$. On pose $c' = 4K + d + c$, et $S = h^{-1}([-c', c']) - \{e\}$: c'est un système de générateurs de Γ qui vérifie : $S^{-1} = S$. Notons $|\cdot|_S$ la métrique des mots sur Γ associée à S. On va montrer ceci :

$$\exists\lambda > 0 \text{ tel que } \forall\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma,\ \frac{1}{\lambda}|\gamma_1 - \gamma_2|_S - d \leqslant |h(\gamma_1) - h(\gamma_2)| \leqslant \lambda|\gamma_1 - \gamma_2|_S + d.$$

Déjà, on a, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $|h(\gamma_1) - h(\gamma_2)| \leqslant |h(\gamma_1^{-1}\gamma_2)| + d$. De plus, si $\gamma \in \Gamma$ s'écrit $\gamma = s_1, \dots, s_n$ avec $s_K \in S$ et $n = \|\gamma\|_S$ alors $|h(\gamma)| \leqslant nd + |\sum_{i=1}^{n} h(s_i)| \leqslant nd + \sum_{1}^{n} |h(s_i)| \leqslant n(d + c') = (d + c')\|\gamma\|_S$ de sorte que $|h(\gamma_1) - h(\gamma_2)| \leqslant (d+c')\|\gamma_1^{-1}\gamma_2\|_S + d = (d+c')|\gamma_1 - \gamma_2|_S + d$.

Réciproquement, soit $\gamma \in \Gamma$, et posons $n = E\left(\frac{|h(\gamma)|}{2K}\right)$ (partie entière). Soient $x_0, \dots, x_n \in [0, h(\gamma)]$ donnés par $x_0 = 0, |x_j - x_{j-1}| = 2K$ pour $j \in [1, n-1]$, et $x_n = h(\gamma)$, de sorte que $|x_n - x_{n-1}| \leqslant 2K$. Pour $i \in [1, n-1]$, il existe $\alpha_i \in \Gamma$ tel que $|x_i - h(\alpha_i)| \leqslant K$. On pose $\alpha_n = \gamma$. On a la succession d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} |h(\alpha_{j-1}^{-1}\alpha_j)| &\leqslant |h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})| + d \\ &\leqslant |h(\alpha_j) - x_j| + |x_j - x_{j-1}| + |x_{j-1} - h(\alpha_{j-1})| + d \\ &\leqslant K + 2K + K + d = 4K + d. \end{aligned}$$

. En remarquant que l'on a $\gamma = \alpha_1 \cdot (\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_2), \dots, (\alpha_{n-1}^{-1} \cdot \alpha_n)$, il vient

$$\|\gamma\|_S \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|\alpha_{j-1}^{-1}\alpha_j\|_S \leqslant nM \leqslant \frac{M}{2K}|h(\gamma)|$$

où l'on a posé $M = \sup\{\|\alpha\|_S, \alpha \in \Gamma \text{ vérifiant } |h(\alpha)| \leqslant 4K + d\}$.

En remarquant que $|h(\alpha)| \leqslant 4K + d \Rightarrow \alpha \in S \Rightarrow \|\alpha\|_S = 1$, on voit que $M = 1$, de sorte que $\|\gamma\|_S \leqslant \frac{1}{2K}|h(\gamma)|$, et ce $\forall \gamma \in \Gamma$. Il vient

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_S = \|\gamma_1^{-1}\gamma_2\|_S \leqslant \frac{1}{2K}|h(\gamma_1^{-1}\gamma_2)| \leqslant \frac{1}{2K}|h(\gamma_1) - h(\gamma_2)| + \frac{d}{2K}.$$

On a finalement, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, les inégalités

$$2K|\gamma_1 - \gamma_2|_S - d \leqslant |h(\gamma_1) - h(\gamma_2)| \leqslant (d+c')|\gamma_1 - \gamma_2|_S + d$$

On a donc montré que l'application $h : (\Gamma, |\cdot|_S) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une quasi-isométrie, ce qui achève la preuve. ∎

On considère maintenant le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Une présentation de Γ est : $\langle \alpha, \beta | \alpha^3 = \beta^3 = 1 \rangle$. Un élément $\gamma \in \Gamma$ s'écrit, d'une unique manière, sous la forme $\gamma = \prod_{i=1}^{K} \alpha^{n_i}\beta^{m_i}$, avec $n_i, m_i \in \{1, 2\}$ et éventuellement $n_1 = 0$ et/ou $m_K = 0$. Notons $p(\gamma)$ le nombre de 1 et $q(\gamma)$ le nombre de 2 figurants dans l'ensemble $\{n_i, m_i\ ; 1 \leqslant i \leqslant K\}$. On pose $h(\gamma) = p(\gamma) - q(\gamma)$. On vérifie aisément que $h(\gamma^{-1}) = -h(\gamma)$, que $|h(\alpha^2) - 2h(\alpha)| = 3$, et plus généralement, que $|h(\gamma_1\gamma_2) - h(\gamma_1) - h(\gamma_2) \leqslant 3$; on constate enfin que h est non borné : on a en effet $h[(ab)^n] = 2n$. L'application h vérifie donc toutes les hypothèses du lemme. Ce dernier fournit un système de générateurs S tel que $h : (\Gamma, |\cdot|_S) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ soit une quasi-isométrie. On prend, pour X, le graphe de Cayley de Γ pour le système de générateurs S. On observe que, puisque S est infini – il contient $h^{-1}(0)$ qui contient $\{(ab^2)^n\ ; n \in \mathbb{Z}\}$ –, l'espace X n'est pas localement compact. Il est de plus clair qu'il n'y a pas d'action non triviale par isométries de Γ dans $\mathbb{R}$, car les éléments d'ordre fini de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}) = \{x \longmapsto \varepsilon x + a\ ; \varepsilon^2 = 1, a \in \mathbb{R}\}$ sont d'ordre deux.

Pour des compléments, on pourra consulter [Gr 2], § 8-3-A.

Bibliographie

[Ch] CHAMPETIER C. — *Thèse en préparation*, Ecole Normale Supérieure de Lyon.

[G-H] GHYS E., DE LA HARPE P. — *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, **83** (1990), Birkhäuser.

[Gr 1] GROMOV M. — *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental groups*, Texte non publié, S.U.N.Y. vers 1977.

[Gr 2] GROMOV M. — *Hyperbolic groups, in "Essays in group theory"*, Edité par S.M. Gersten, M.S.R.I. publ. Springer **8** 1987.

[W] WHITEHEAD G.W. — *Homotopy theory*, MIT Press 1966.

Frédéric MATHÉUS
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)