

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

LUC ROZOY

Résultats nouveaux à propos des conjectures de Lichnerowicz et de Carathéodory

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 9 (1990-1991), p. 13-61

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1990-1991__9__13_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1990-1991, tous droits réservés.

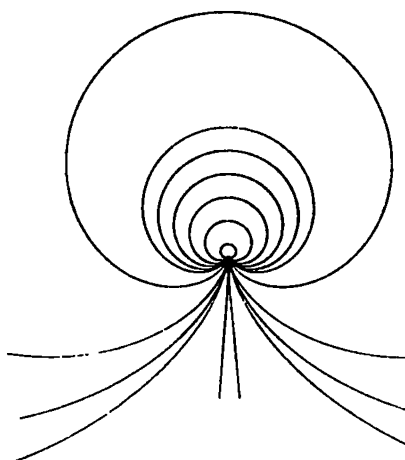
L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSULTATS NOUVEAUX À PROPOS DES CONJECTURES DE LICHTNEROWICZ ET DE CARATHÉODORY

par *Luc ROZOY*



(Pour l'étude des ombilics uniquement, commencer directement page 15)

Introduction

A la fin de son livre I des théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, en utilisant une formule de divergence sur une section d'espace, Lichnerowicz démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout modèle d'univers stationnaire, à comportement asymptotique euclidien, pour lequel les lignes de courant de la matière (supposée schématisée sous forme de fluide parfait) coïncident avec les lignes de temps, est partout statique au sens de Levi-Civita.*

Lichnerowicz ajoute alors : "ce théorème permet en particulier de réduire les postulats, que l'on présumait indépendants, qui conduisent à la construction du modèle d'univers de Schwarzschild."

Il semble naturel d'espérer la

CONJECTURE. — *Tout modèle d'univers stationnaire, à comportement asymptotique euclidien, pour lequel les lignes de courant de la matière (supposée schématisée sous forme de fluide parfait) coïncident avec les lignes de temps, est à symétrie sphérique (c'est à dire que le groupe SO_3 agit sur les sections d'espace comme groupe d'isométrie).*

C'est cet énoncé que nous appellerons "conjecture de Lichnerowicz" dans la suite de l'exposé. Cette conjecture n'est pas encore démontrée. Par contre, en ajoutant deux hypothèses supplémentaires, nous obtiendrons la symétrie sphérique.

Hypothèse supplémentaire 1.

Les hypothèses de la conjecture imposent qu'il existe une relation $f(\rho, p) = 0$ entre la densité ρ et la pression p du fluide. Nous imposerons que cette relation soit analytique.

Hypothèse supplémentaire 2.

Les hypothèses de la conjecture imposent que les sections d'espace soient difféomorphes à \mathbb{R}^3 . (cf [2]). Nous supposons de plus, en appelant ξ le module du vecteur de Killing temporel, que ξ est une fonction strictement positive et qui admet un unique point critique, ce point critique étant un minimum strict.

Remarque. — Supposer $\xi > 0$ revient à éliminer toute surface trappe. Supposer que ξ ne possède qu'un seul point critique et que ce point critique soit un minimum strict présuppose en fait la structure globale des sections d'espace et son feuilletage par les surfaces $\xi = C^{\text{te}}$. Cette hypothèse est implicite dans certains travaux.

En ajoutant une hypothèse supplémentaire très contraignante, et en utilisant des résultats de Lindbloom, Beig et Simon parviennent au résultat, pour des modèles dont l'équation d'état est réaliste.

Hypothèse supplémentaire de Beig et Simon.

Il existe un modèle à symétrie sphérique ayant la même équation d'état que le modèle étudié avec la même valeur limite de ξ et donc de p et de ρ sur la surface de séparation entre le fluide et le vide.

C'est cette hypothèse d'un modèle à symétrie sphérique de référence que nous démontrerons ici (et même beaucoup plus).

En dimension trois, le tenseur de Cotton caractérise les propriétés conformes d'une variété riemannienne. Dans notre cadre relativiste sa nullité (qui caractérise les espaces conformément plats) implique le résultat. L'idée consiste alors à étudier l'ensemble d'annulation du tenseur de Cotton des sections d'espace. C'est un stratifié de Whitney. Et il contient au moins une branche analytique jusqu'au minimum. En restreignant les équations d'Einstein le long de cette branche, nous obtenons le résultat. Pour ce faire nous sommes renvoyés à une autre conjecture très ancienne en géométrie classique des

surfaces : la conjecture de Carathéodory. En géométrie classique des surfaces un point est dit "ombilic" si les courbures principales de la surface sont égales en ce point (c'est une sorte de version ponctuelle de la symétrie sphérique pour une surface).

CONJECTURE DE CARATHÉODORY. — *Toute surface régulière (c'est-à-dire de classe C^k avec k suffisamment grand), difféomorphe à la sphère S^2 , strictement convexe, possède au moins deux ombilics.*

Cette conjecture n'est démontrée que si l'on sait que les gradients de la courbure intrinsèque et de la courbure moyenne ne sont pas nuls simultanément dans le cas C^∞ . Dans le cas analytique, le raisonnement avec les stratifiés de Whitney permet de s'affranchir de cette condition pour les surfaces de niveau d'une fonction analytique suffisamment proche d'un minimum de cette fonction. Mais c'est justement la simultanéité de l'annulation des variations de la courbure intrinsèque et de la courbure moyenne qui permet de conclure pour le problème relativiste.

Dans le cas analytique nous obtenons donc un résultat nouveau pour la conjecture de Lichnerowicz et un résultat nouveau pour la conjecture de Carathéodory. L'imbrication des deux problèmes se révèle ainsi très étroite ! De plus elle laisse penser que la conjecture de Carathéodory pourrait être fautive dans le cas C^∞ , alors que celle de Lichnerowicz resterait vraie.

Sommaire

1.	Rapide étude locale des solutions statiques des équations du vide ou d'un fluide parfait en relativité	5
2.	Introduction à l'étude locale conforme des espaces riemanniens de dimension 3 non conformément plats	10
3.	Expression du tenseur de Cotton pour un fluide parfait statique	13
4.	Définitions, rappels, les points ombilics, les lignes de courbure	15
5.	La conjecture de Carathéodory : Carathéodory a conjecturé que toute surface plongée dans \mathbb{R}^3 , compacte et strictement convexe avait au moins deux ombilics	22
6.	Une autre approche de la conjecture de Carathéodory et l'étude des points ombilics d'une surface de niveau d'une fonction analytique réelle autour d'un minimum strict de cette fonction	31
7.	Il existe un modèle à symétrie sphérique de référence pour la conjecture de Lichnerowicz	43
	Bibliographie	49

1. Rapide étude locale des solutions statiques des équations du vide ou d'un fluide parfait en relativité

Mise en équation. D'après le théorème de Lichnerowicz cité dans l'introduction, l'espace-temps est supposé statique au sens de Levi-Civita, c'est-à-dire que l'on peut trouver localement un système de coordonnées adapté tel que le ds^2 prenne la forme :

$$ds^2 = -\xi^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

où les g_{ij} et ξ ne dépendent que des variables (x^1, x^2, x^3) .

La signature choisie est $-+++$; la convention de sommation sur les indices répétés placés en haut et en bas est adoptée. Les composantes du tenseur de Riemann sont données par :

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\mu\delta},$$

où les $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les deuxièmes symboles de Christoffel :

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}).$$

Les composantes du tenseur de Ricci sont :

$$R_{\alpha\beta} = R^\delta_{\alpha\delta\beta}.$$

Les équations d'Einstein sont :

$$R_{\alpha\beta} = \chi (T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}),$$

où les $T_{\alpha\beta}$ sont les composantes covariantes du tenseur densité d'impulsion-énergie d'un fluide parfait :

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} \quad \text{où } u_\alpha u^\alpha = -1,$$

p est la pression du fluide et ρ sa densité; et $T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$.

Les équations d'Einstein dans le cas statique orthogonal s'écrivent :

$$(1) \quad \nabla_k \partial^k \xi = \frac{3p + \rho}{2} \chi \xi,$$

$$(2) \quad R_{ij} = \frac{\nabla_i \partial_j \xi}{\xi} + \frac{\chi}{2} g_{ij} (\rho - p),$$

où les indices latins i, j, k, \dots varient de 1 à 3, où les R_{ij} désignent les composantes covariantes du tenseur de Ricci de \mathcal{V}_3 (sous-espace défini par $t = C^{te}$), et où ∇ désigne la dérivation covariante de \mathcal{V}_3 .

Au voisinage d'un point où $\text{grad}_3 \xi \neq 0$, on peut rapporter \mathcal{V}_3 à un système de coordonnées orthogonales défini par les surfaces $x^3 = \xi = \text{constante}$ et leurs trajectoires orthogonales :

$$ds^2 = -\xi^2 dt^2 + V^2(x^1, x^2, \xi) d\xi^2 + g_{AB}(x^1, x^2, \xi) dx^A dx^B \quad (A, B = 1, 2).$$

En utilisant les projections du tenseur de Ricci liées à des coordonnées orthogonales [3], ce qui introduit un tenseur de courbure de plongement des surfaces $\xi = C^{\text{te}}$ dans \mathcal{V}_3 : $\Omega_{AB} = \frac{1}{2V} \partial_3 g_{AB}$ et les invariants $K = \Omega_A^A$, $\Omega^2 = \Omega^{AB} \Omega_{AB}$, nous obtenons le système suivant :

$$(3) \quad \frac{\Omega_{AB}}{V\xi} + \frac{\chi}{2} g_{AB}(\rho - p) = \frac{\overset{*}{R}}{2} g_{AB} - \frac{\partial_3 \Omega_{AB}}{V} - \frac{\overset{*}{\nabla}_A \partial_B V}{V} - K \Omega_{AB} + 2\Omega_A^C \Omega_{CB},$$

$$0 = \left(\frac{\overset{*}{R}}{2} - \frac{\chi}{2}(p - \rho) \right) \delta_A^B - \frac{\partial_3 \Omega_B^A}{V} - \frac{\overset{*}{\nabla}^A \partial_B V}{V} - \left(K + \frac{1}{V\xi} \right) \Omega_B^A,$$

$$(4) \quad -\frac{\partial_A V}{V^2 \xi} = \overset{*}{\nabla}_B (\Omega_A^B - \delta_A^B K),$$

$$(5) \quad -\frac{\chi}{2} V(\rho - p) + \frac{\partial_3 V}{V^2 \xi} = \overset{*}{\Delta}_2 V + \partial_3 K + V \Omega^2,$$

$$(6) \quad K - \frac{\partial_3 V}{V^2} = \frac{\chi}{2} \xi V(\rho + 3p),$$

$$(7) \quad \overset{*}{R} = \frac{2K}{V\xi} + K^2 - \Omega^2 - 2\chi p.$$

Le signe $*$ est affecté aux éléments relatifs aux variétés $\xi = C^{\text{te}}$ munies de la métrique $g_{AB} dx^A dx^B$ et $\overset{*}{\Delta}_2$ désigne le Laplacien associé.

Premières propriétés de ce système.

L'utilisation des identités de Bianchi montre que :

$$\frac{\partial_i p}{p + \rho} = -\frac{\partial_i \xi}{\xi}.$$

Ainsi p et ρ ne dépendent que de ξ et il existe obligatoirement une relation $f(p, \rho) = 0$ entre p et ρ .

Une utilisation minutieuse du système montre que si V ne dépend que de ξ , alors l'espace est "localement à symétrie ou sphérique, hyperbolique, cylindrique ou plane".

Si pour toute surface $\xi = C^{\text{te}}$, $\overset{*}{R}$ et V ne sont pas des fonctions indépendantes, alors il existe un vecteur de Killing de genre espace, c'est-à-dire que l'espace est "localement à symétrie axiale".

(Ces deux résultats ne sont pas du tout évidents.)

Müller zum Hagen ([2]) a démontré qu'il existait des atlas constitués de cartes dans lesquelles les coefficients $g_{\alpha\beta}$ de la métrique étaient analytiques. Son travail permet de montrer que ces atlas contiennent des cartes locales adaptées à la précédente décomposition suivant les surfaces $\xi = C^e$. On en déduit ainsi qu'il est possible de travailler dans des cartes locales telles que toutes les quantités qui apparaissent dans les équations (3), (4), (5), (6) et (7) soient des fonctions analytiques des coordonnées x^1, x^2, ξ . (Pour cela il faut supposer que ρ est une fonction analytique de p).

L'article d'Israël [5] et ses extensions.

En 1967, Israël étudie les trous noirs statiques. Il démontre que parmi toutes les solutions statiques du vide, asymptotiquement plates, feuilletées par des surfaces $\xi = C^e$ non singulières, difféomorphes à S^2 , la solution de Schwarzschild est l'unique solution qui ait une surface trappe $\xi = 0$ non singulière d'aire finie. Ce résultat, totalement inattendu à cette époque, est basé sur la démarche suivante :

① montrer que la symétrie est imposée aux frontières du domaine. Sur la surface $\xi = 0$, Israël le montre à peu de frais (il passe sous silence le traitement à l'infini, voir [6] pour un exposé);

② utiliser des identités ayant comme fonction d'étendre la symétrie à l'intérieur du domaine si on la connaît aux frontières. Israël utilise pour se faire deux identités obtenues après un calcul en coordonnées. Depuis ces types d'identités ont été étudiés et généralisés par certains auteurs ([7], [8]).

Toutes ces quantités introduites dérivent en fait d'invariants conformes caractéristiques de la géométrie conforme de dimension 3 des sections d'espace. Dans le prochain chapitre, nous faisons un rappel à propos du tenseur de Cotton associé à cette géométrie conforme. Voici le plus brièvement possible un exemple d'un telle démarche.

THÉORÈME. — *Soit un modèle du vide statique au sens de Levi-Civita (il existe donc localement un système de coordonnées tel que $ds^2 = -\xi^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$ où ξ et les g_{ij} ne dépendent pas de t) tel que les surfaces $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$ soient sans bord (on aura $\xi_1 < \xi_2$ par exemple) et tel que ξ n'admette pas de points critiques pour $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$. Alors si le tenseur de Cotton est nul sur les surfaces $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$ et si le tenseur de courbure extrinsèque du plongement des surfaces $\xi = C^e$ dans \mathcal{V}_3 reste défini positif, alors le tenseur de Cotton est nul à l'intérieur du domaine limité par ces deux surfaces. (Si les surfaces $\xi = C^e$ sont difféomorphes à S^2 alors le modèle est à symétrie sphérique).*

Preuve. — Nous introduisons (pour tout point M tel que $\text{grad}_3 \xi \neq 0$) un repère orthonormé direct $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ où $\vec{f}_3 = \frac{\overline{\text{grad}_3 \xi}}{\|\overline{\text{grad}_3 \xi}\|}$ et où \vec{f}_1 et \vec{f}_2 sont deux directions de courbure du plongement de la surface $\xi = C^e$ dans \mathcal{V}_3 (c'est-à-dire des directions propres du tenseur symétrique Ω caractérisant la courbure extrinsèque (2^e forme fondamentale).

Dans un tel repère mobile orthonormé $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ nous appellerons V la valeur

de $\frac{1}{\|\text{grad}_3 \xi\|}$ évaluée au point M ; Ω_1^1 et Ω_2^2 les courbures principales dans les directions principales \bar{f}_1 et \bar{f}_2 ; $\nabla_1 V$, $\nabla_2 V$, $\nabla_3 V$ les dérivées covariantes suivant les vecteurs $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ de la fonction V .

$\int f(M) ds$ désignera $\int_{[\xi = C^e]} f(M) ds$ où ds est la mesure d'aire pour les surfaces $[\xi = C^e]$ (au sens de la géométrie induite sur ces surfaces par leur plongement dans V_3).

L'utilisation des équations d'Einstein conduit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\int \frac{\Omega^2 - \frac{K^2}{2}}{V^n} ds - \frac{1}{2} \int \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^{n+2}} ds \right) &= \int \left(-\frac{n}{2} \Omega_1^1 + \frac{3n-2}{2} \Omega_2^2 \right) \frac{(\nabla_1 V)^2}{V^{n+1}} ds \\ &+ \int \left(-\frac{n}{2} \Omega_2^2 + \frac{3n-2}{2} \Omega_1^1 \right) \frac{(\nabla_2 V)^2}{V^{n+1}} ds \\ &- \frac{2}{\xi} \int -\frac{\Omega^2 - \frac{K^2}{2}}{V^n} ds - \frac{2}{\xi} \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^{n+2}} ds \\ &- (n+1) \int \frac{K}{V^{n+1}} \left(\Omega^2 - \frac{K^2}{2} \right) ds. \end{aligned}$$

Alors pour $0 < n < \frac{2}{3}$, en posant

$$X_n = \int \frac{\Omega^2 - \frac{K^2}{2}}{V^n} ds - \frac{1}{2} \int \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^{n+2}} ds$$

on obtient une fonction de ξ qui vérifie $X_n(\xi_1) = X_n(\xi_2) = 0$ et $\frac{dX_n}{d\xi} \leq 0$. Donc $\frac{dX_n}{d\xi} = 0$ et donc par exemple $\int \frac{\Omega^2 - \frac{K^2}{2}}{V^n} ds = \int \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^{n+2}} ds = 0$ pour tout ξ tel que $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ (rappelons que $\Omega^2 - \frac{K^2}{2} = \frac{1}{2}(\Omega_1^1 - \Omega_2^2)^2$ est une quantité toujours positive) d'où $\Omega^2 - \frac{K^2}{2} = 0 = \partial_A V$, d'où la nullité du tenseur de Cotton.

Commentaire. — Cette démonstration fait explicitement intervenir que

$$\int_{\xi = C^e} (\nabla_A F^A) ds = 0$$

parce que les surfaces $\xi = C^e$ n'ont pas de bords (qu'elles soient difféomorphes à S^2 n'intervient pas). Elle ne peut pas se ramener à une expression du genre $\text{div } \vec{F} = Q \geq 0$ (s'il en était ainsi le résultat du théorème 2 ne dépendrait pas des surfaces formant le bord du volume étudié. Cela ne semble pas être le cas).

Lindbloom, puis Beig et Simon ont poussé cette démarche. Il en résulte que si l'on sait qu'il existe un modèle à symétrie sphérique de référence, alors la conjecture est démontrée via l'unicité du modèle pour une large classe d'équations d'états. (Mais le feuilletage des sections d'espace par les surfaces $\xi = C^e$ difféomorphes à S^2 reste implicitement admis). Un des ingrédients nouveaux introduit est l'utilisation du principe du maximum pour des solutions d'une équation elliptique portant sur $\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_0}$ si V_0 est la valeur qu'aurait V dans le cas de la symétrie sphérique. D'où l'impérative nécessité

de savoir si un tel modèle à symétrie sphérique de référence existe. Nous obtiendrons un résultat plus fort que la simple existence d'un modèle à symétrie sphérique de référence. Une synthèse des différents travaux permet alors de conclure.

C'est l'aspect géométrique conduisant au modèle à symétrie sphérique que nous allons exposer. Pour cela, nous étudierons l'ensemble d'annulation du tenseur de Cotton. Commençons donc par l'étude de ce tenseur en géométrie riemannienne de dimension trois.

2. Introduction à l'étude locale conforme des espaces riemanniens de dimension 3 non conformément plats

Pour les espaces riemanniens (et pseudo-riemanniens) de dimension 3, Cotton a introduit un tenseur défini dans un système de coordonnées par

$$(13) \quad R_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + \frac{1}{4}(g_{ik} \partial_j R - g_{ij} \partial_k R),$$

où les R_{ij} sont les composantes du tenseur de Ricci, où ∇ représente la dérivation covariante associée à la structure riemannienne et où R est la courbure scalaire $R = R^i_i$.

Ce tenseur est antisymétrique en les indices j et k : $R_{ijk} = -R_{ikj}$. Si on effectue une transformation conforme

$$(14) \quad \bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}$$

alors

$$(15) \quad \bar{R}_{ijk} = R_{ijk}.$$

Ainsi les composantes R_{ijk} sont invariantes par transformation conforme, mais elles dépendent du système de coordonnées choisi.

Nous voudrions savoir s'il existe des invariants conformes, c'est-à-dire des quantités (scalaires) indépendantes de tout système de coordonnées et qui soient invariantes par transformation conforme. Nous renvoyons à l'article de Fefferman et Graham [4]. Ces auteurs font apparaître le tenseur de Cotton comme une partie du tenseur de Riemann d'un espace de dimension supérieure. Ils définissent un invariant conforme comme étant un polynôme $P(g)$ en $(\det g_{ij})^{-1}$ et en les dérivées $\partial^\alpha g_{ij}$ (α est un multi-indice de longueur supérieure ou égale à un) satisfaisant à deux propriétés d'invariance :

a) si g et g' sont isométriques $P(g) = P(g')$

b) si $g = \lambda(x)g'$ pour une fonction $\lambda(\cdot)$ régulière et positive alors $P(g) = \lambda^{-k} P(g')$ où k est appelé le poids de l'invariant.

Ici, nous voudrions trouver des quantités scalaires invariantes conformes de poids nul, mais pas forcément polynomiales.

Pour cela, nous introduisons le tenseur α défini par ses composantes dans un système de coordonnées :

$$(16) \quad \alpha^{ih} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} R_{jk}^h.$$

(Dans cette définition g est le déterminant de la matrice formée par les g_{ij} et ϵ^{ijk} vaut 1 si (i, j, k) est obtenu à partir d'une permutation paire de $(1, 2, 3)$, vaut -1 pour une permutation impaire et 0 sinon. Cette égalité (16) définit bien un tenseur parce que les

composantes $\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}$ sont celles d'un tenseur (à dérivée covariante nulle) et il en est de même pour $\sqrt{g}\epsilon_{ijk}$ où $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$; une autre manière de considérer cette transformation algébrique est d'envisager l'adjonction de Hodge).

Les identités de Bianchi sur le tenseur de Riemann conduisent à l'identité classique :

$$(17) \quad \nabla_i R_j^i = \frac{1}{2} \partial_j R.$$

Cette dernière relation permet de montrer que α est un tenseur symétrique, de trace et de divergence nulles :

$$(18) \quad \alpha^{ij} = \alpha^{ji}; \quad \nabla_j \alpha^{ij} = 0; \quad \alpha^i_i = 0.$$

α définit donc un tenseur symétrique, transverse et sans trace au sens de York [5].

Appelons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs propres de α^{ij} relativement à g^{ij} . Elles sont réelles et vérifient :

$$(19) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Effectuons la transformation conforme (14). Alors $\bar{\alpha}^{ij} = e^{-5\sigma} \alpha^{ij}$ de par la définition (16). En un point choisissons un système de coordonnées qui soit orthogonal et principal pour α relativement à g . Alors $\alpha^{11} = \lambda_1 g^{11}$, $\alpha^{22} = \lambda_2 g^{22}$ et $\alpha^{33} = \lambda_3 g^{33}$.

Appelons $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ les valeurs propres de $\bar{\alpha}^{ij}$ relativement à \bar{g}^{ij} . Nous obtenons $\bar{\alpha}^{11} = \bar{\lambda}_1 \bar{g}^{11}$, $\bar{\alpha}^{22} = \bar{\lambda}_2 \bar{g}^{22}$ et $\bar{\alpha}^{33} = \bar{\lambda}_3 \bar{g}^{33}$, d'où :

$$(20) \quad \bar{\lambda}_1 = e^{-3\sigma} \lambda_1, \quad \bar{\lambda}_2 = e^{-3\sigma} \lambda_2, \quad \bar{\lambda}_3 = e^{-3\sigma} \lambda_3;$$

et ces relations ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé pour les démontrer.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où \mathcal{V}_3 n'est pas conformément plat. Alors, d'après (15), une au moins des valeurs propres λ_1, λ_2 ou λ_3 est non nulle (sinon l'espace serait conformément plat) et par (19) une au plus est nulle. Supposons par exemple que λ_3 ne soit pas nulle. Alors

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_3} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_3}.$$

Ainsi les rapports des valeurs propres du tenseur α (quand ils sont définis) introduisent des quantités scalaires invariantes par transformation conforme et indépendantes du système de coordonnées.

En considérant de tels quotients nous n'obtenons pas des invariants conformes au sens de [10] ou [11]. Le problème reste donc ouvert de savoir si ce sont les seules quantités scalaires invariantes conformes, si toute autre quantité scalaire invariante conforme est fonction d'un tel quotient. Si F est un polynôme invariant de degré $2s$ et Φ la connection de Levi-Civita, alors $F(\Phi)$ s'exprime en fonction du tenseur de Weyl. (cf Avez [12]). En dimension trois, le tenseur de Weyl étant nul, il faudrait trouver une relation entre le tenseur de Cotton et les invariants secondaires au sens de Chern et Simons.

Toutes les considérations précédentes sont indépendantes du problème relativiste traité dans cette étude et sont vraies pour tout espace de dimension 3 non conformément plat. Nous avons donc obtenu des invariants conformes en dimension trois, mais cette construction n'est valable que sur des domaines où \mathcal{V}_3 n'est pas conformément plat. Comment se comportent ces quantités invariantes au passage d'un domaine non conformément plat à un domaine conformément plat? Cette question est aussi ouverte. Toute la démonstration qui va suivre est l'étude de ce comportement localement autour du minimum C non dégénéré de ξ (et où $\xi > 0$). En effet, en ce point nous montrerons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La symétrie sphérique est une conséquence de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ dans \mathcal{V}_3 . Ainsi, nous supposons que $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ n'est pas identiquement nul dans un voisinage de C . (Sinon la symétrie sphérique en C est alors évidente).

3. Expression du tenseur de Cotton pour un fluide parfait statique

Pour notre problème relativiste nous aurons besoin de l'expression en coordonnées locales du tenseur α , dual du tenseur de Cotton, si nous prenons un repère (défini localement autour d'un point où $\text{grad } \xi \neq 0$) tel que :

$$ds_3^2 = V^2(x^1, x^2, \xi) d\xi^2 + g_{AB}(x^1, x^2, \xi) dx^A dx^B .$$

Un calcul dans de telles coordonnées utilisant les équations (3),(4),(5),(6) et (7) permet d'obtenir :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} ((\alpha_{ij})) = \frac{2\sqrt{g}}{V^3\xi^2} \begin{pmatrix} -2\Omega_1^2 & \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & \partial^2 V \\ \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & 2\Omega_2^1 & -\partial^1 V \\ \partial^2 V & -\partial^1 V & 0 \end{pmatrix} \\ ((\alpha^{ij})) = \frac{2}{\sqrt{g}V\xi^2} \begin{pmatrix} -2\Omega_2^1 & \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & \frac{\partial_2 V}{V^2} \\ \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & 2\Omega_1^2 & -\frac{\partial_1 V}{V^2} \\ \frac{\partial_2 V}{V^2} & -\frac{\partial_1 V}{V^2} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} .$$

Il est remarquable que ce résultat soit le même dans le vide que dans le fluide. Ceci généralise la remarque de Lindblom [7] sur une expression de $R_{ijk} R^{ijk}$ identique dans le vide et dans le fluide.

Pour la suite de ce paragraphe, nous nous restreignons à un voisinage U sur lequel le gradient de la fonction ξ ne s'annule pas. Nous introduisons (pour tout point M dans U) un repère orthonormé direct $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ où $\vec{f}_3 = \frac{\overline{\text{grad}_3 \xi}}{\|\text{grad}_3 \xi\|}$ et où \vec{f}_1 et \vec{f}_2 sont deux directions de courbure du plongement de la surface $\xi = C^{lc}$ dans \mathcal{V}_3 (c'est-à-dire des directions propres du tenseur symétrique Ω caractérisant la courbure extrinsèque (2ème forme fondamentale)).

Un tel repère mobile orthonormé $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ peut être défini de manière analytique dans un voisinage de tout point M qui ne soit pas point ombilic de la surface $\xi = \xi(M) > \xi_{inf}$ (en un point ombilic les deux courbures principales du plongement de la surface $\xi = \xi(M)$ dans \mathcal{V}_3 sont égales). Pour un point M ombilic de la surface $\xi = \xi(M)$ il existe une infinité de repères $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ obtenus par rotation autour de \vec{f}_3 qui rendent \vec{f}_1 et \vec{f}_2 directions de courbure.

Dans un tel repère mobile orthonormé $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ nous appellerons V la valeur de $\frac{1}{\|\text{grad}_3 \xi\|}$ évaluée au point M ; Ω_1^1 et Ω_2^2 les courbures principales dans les directions principales \vec{f}_1 et \vec{f}_2 ; $\nabla_1 V, \nabla_2 V, \nabla_3 V$ les dérivées covariantes suivant les vecteurs $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ de la fonction V . Alors (21) devient

$$(22) \quad ((\alpha_{ij})) = \frac{2}{V\xi^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V} & \frac{\nabla_2 V}{V^2} \\ \frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V} & 0 & -\frac{\nabla_1 V}{V^2} \\ \frac{\nabla_2 V}{V^2} & -\frac{\nabla_1 V}{V^2} & 0 \end{pmatrix}$$

où les α_{ij} sont les composantes du tenseur α dans le repère orthonormé $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. De la même manière l'expression en coordonnées locales du tenseur de composantes $\nabla_i \partial_j \xi$ est

$$((\nabla_i \partial_j \xi)) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_{11}}{V} & \frac{\Omega_{12}}{V} & -\frac{\partial_1 V}{V} \\ \frac{\Omega_{12}}{V} & \frac{\Omega_{22}}{V} & -\frac{\partial_2 V}{V} \\ -\frac{\partial_1 V}{V} & -\frac{\partial_2 V}{V} & -\frac{\partial_3 V}{V} \end{pmatrix},$$

ceci si nous utilisons des coordonnées (x^1, x^2, ξ) définies localement autour d'un point où $\overrightarrow{\text{grad}} \xi \neq \vec{0}$ telles que $ds_3^2 = V^2(x^1, x^2, \xi) d\xi^2 + g_{AB}(x^1, x^2, \xi) dx^A dx^B$. Nous en déduisons alors les expressions des composantes du tenseur $\nabla \partial \xi$ dans le repère orthonormé $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$

$$(23) \quad ((\nabla_i \partial_j \xi)) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_1^1}{V} & 0 & -\frac{\nabla_1 V}{V^2} \\ 0 & \frac{\Omega_2^2}{V} & -\frac{\nabla_2 V}{V^2} \\ -\frac{\nabla_1 V}{V^2} & -\frac{\nabla_2 V}{V^2} & -\frac{\nabla_3 V}{V^2} \end{pmatrix}.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres du tenseur symétrique α relativement à la métrique g et μ_1, μ_2, μ_3 celles du tenseur symétrique $\nabla \partial \xi$ relativement à la métrique g . Les λ_i sont solutions de l'équation $\det((\alpha_{ij} - \lambda g_{ij})) = 0$, et les μ_i sont solutions de l'équation $\det((\nabla_i \partial_j \xi - \mu g_{ij})) = 0$. En utilisant un repère $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ nous obtenons $\lambda^3 - P\lambda + Q = 0$, où

$$(24) \quad P = \frac{4}{V^2 \xi^4} \left[\left(\frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V} \right)^2 + \left(\frac{\nabla_1 V}{V^2} \right)^2 + \left(\frac{\nabla_2 V}{V^2} \right)^2 \right]$$

en tout point distinct de C , et où

$$(25) \quad Q = \frac{16}{V^3 \xi^6} \left(\frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V} \right) \frac{\nabla_1 V}{V^2} \frac{\nabla_2 V}{V^2}$$

en tout point distinct de C . Ensuite, en utilisant (23) nous obtenons

$$(26) \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \left(\frac{\Omega_1^1}{V} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_2^2}{V} \right)^2 + \left(\frac{\nabla_3 V}{V^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\nabla_1 V}{V^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\nabla_2 V}{V^2} \right)^2,$$

en tout point distinct de C .

Ainsi étudier l'ensemble d'annulation du tenseur de Cotton revient à étudier l'ensemble des points où le gradient (bidimensionnel) de V dans la direction de $\xi = C^e$ s'annule et qui soient des ombilics des surfaces $\xi = C^e$. Il est alors naturel de revenir à l'étude des points ombilics d'une surface dans \mathbb{R}^3 .

4. Définitions, rappels, les points ombilics, les lignes de courbure

Un plan π qui contient la normale à une surface S plongée dans \mathbb{R}^3 coupe la surface suivant une courbe plane appelée section droite dont le rayon de courbure au point M dépend de la position du plan π autour de la normale. L'inverse de ce rayon de courbure est le module relativement à une forme quadratique (la 2^e forme fondamentale de la surface) du vecteur unitaire tangent à la section droite. (Pour s'en rendre compte il suffit de représenter localement S par la relation $z = z(x, y)$ dans un repère orthonormé centré en M tel que Mz porte la normale, et de définir (dans ce repère et en M) la 2^e forme fondamentale par la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ et de se souvenir que la courbure de la courbe d'équation $z=f(x)$ telle que $f'(0) = f''(0) = 0$ est $\frac{1}{f''(0)}$ à l'origine).

En général les valeurs propres de la 2^e forme fondamentale sont distinctes et il existe donc deux directions perpendiculaires qui donnent le maximum et le minimum des courbures des sections droites de S . Ces deux directions (quand elles sont définies) s'appellent *les directions de courbure* de la surface au point M . Les courbes (sur la surface) intégrales des ces directions s'appellent *les lignes de courbure* de la surface.

Un point est un ombilic de la surface si les deux valeurs propres de la 2^e forme fondamentale y sont égales. En un tel point toutes les sections droites ont la même courbure.

Si on appelle $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ les valeurs propres de la 2^e forme fondamentale alors Gauss a montré que le produit $R_1 R_2$ ne dépendait pas du plongement de la surface dans \mathbb{R}^3 . Pour cela Gauss donne une formule explicite de ce produit en fonction des coefficients de la première forme fondamentale (métrique induite par \mathbb{R}^3 sur la surface), formule que Riemann a généralisée en la définition du tenseur de courbure intrinsèque d'une variété munie d'une métrique.

THÉORÈME. — *Si dans un voisinage U de la surface S tout point est ombilic alors ce voisinage est une portion de sphère ou de plan.*

Preuve. — Pour cela rappelons les relations qui relient les courbures extrinsèques (qui dépendent du plongement, qui sont données par la 2^e forme fondamentale) et les courbures intrinsèques au sens de Riemann. Notons R le tenseur de Riemann (nul) de \mathbb{R}^3 muni de sa métrique canonique dans lequel S est plongée.

Soit $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère mobile orthonormé tel que \vec{e}_3 soit la normale à la surface (localement on a donc décidé d'une orientation). Notons par Ω la deuxième forme fondamentale, par \hat{R} la courbure de Gauss de la surface, par K la trace de la 2^e forme fondamentale et par Ω^2 la trace du carré de la 2^e forme fondamentale.

Nous avons avec ces notations l'équation de Gauss :

$$R(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = \dot{R} - \frac{K^2 - \Omega^2}{2} = 0$$

(si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux alors $\frac{K^2 - \Omega^2}{2} = \frac{1}{R_1 R_2}$)

et l'équation de Codazzi :

$$\sum_{i=1}^3 R(\bar{e}_i, \bar{e}_A, \bar{e}_i, \bar{e}_3) = \sum_{B=1}^{B=2} \dot{\nabla}_B (\Omega_A^B - \delta_A^B K) = 0 \quad (A = 1, 2).$$

Si dans un voisinage U de \mathcal{S} on a $R_1 = R_2$, cela signifie que $\Omega_A^B = \frac{K}{2} \delta_A^B$. Mais alors l'équation de Codazzi devient $\frac{1}{2} \partial_A K = 0$ pour $A = 1, 2$. Donc K est constant sur le voisinage U de la surface, d'où Ω^2 aussi et, d'après l'équation de Gauss, \dot{R} est aussi constant. Comme $\dot{R} = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} = \left(\frac{1}{R}\right)^2$, \dot{R} est positif ou nul et constant.

Si $\dot{R} > 0$ et \dot{R} constant, les sections droites sont des lignes planes de rayon de courbure constant donc des arcs de cercles, la surface est une portion de sphère.

Si $\dot{R} = 0$ les sections droites sont des lignes planes de courbure nulle en chaque point. Ce sont donc des segments de droite et la surface est une portion de plan.

(Fin de la démonstration)

Soit (C) une courbe (paramétrée par son abscisse curviligne s) tracée sur la surface. Le repère de Darboux de cette courbe sera $(\bar{\tau}, \bar{u}, \bar{n})$ où \bar{n} est la normale à la surface et $\bar{u} = \bar{n} \wedge \bar{\tau}$. Alors comme le repère de Darboux est orthonormé nous pouvons poser

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{u} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{u} \\ \bar{n} \end{pmatrix} ;$$

τ_g est la torsion géodésique de la courbe (C) et nous sommes en mesure de donner des caractérisations des lignes de courbure.

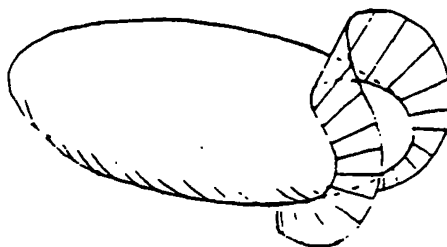
(C) est une ligne de courbure de la surface si 1), 2), 3) ou 4) est vérifié.

1) la tangente en chacun des points de (C) est portée par une direction de courbure,

2) la torsion géodésique de (C) est nulle en chacun de ses points ou encore le long de (C) on a $\frac{d\bar{n}}{ds} = -k_n \bar{\tau}$,

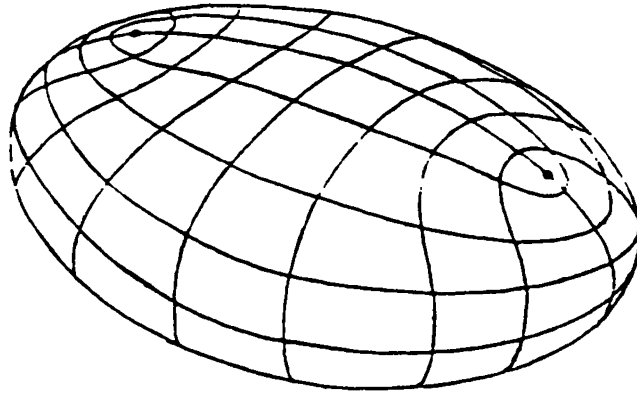
3) la surface formée par les normales à la surface \mathcal{S} de départ est plate,

4) les normales à la surface le long de (C) admettent une enveloppe (et cette enveloppe est le lieu des centres de courbure des sections droites de la surface le long de \mathcal{S} , mais pas le lieu des centres de courbure de la ligne de courbure, cette situation particulière survenant pour les surfaces de révolution).

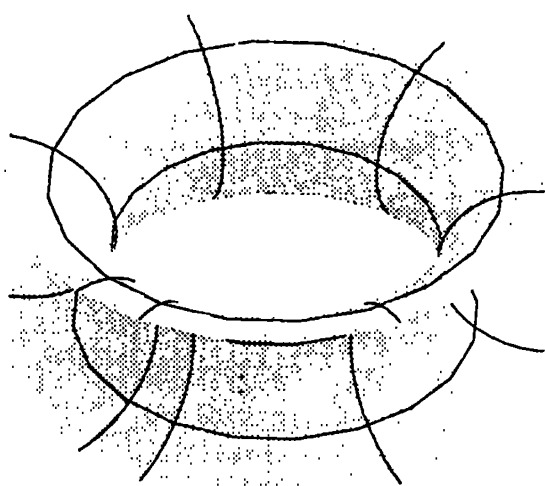
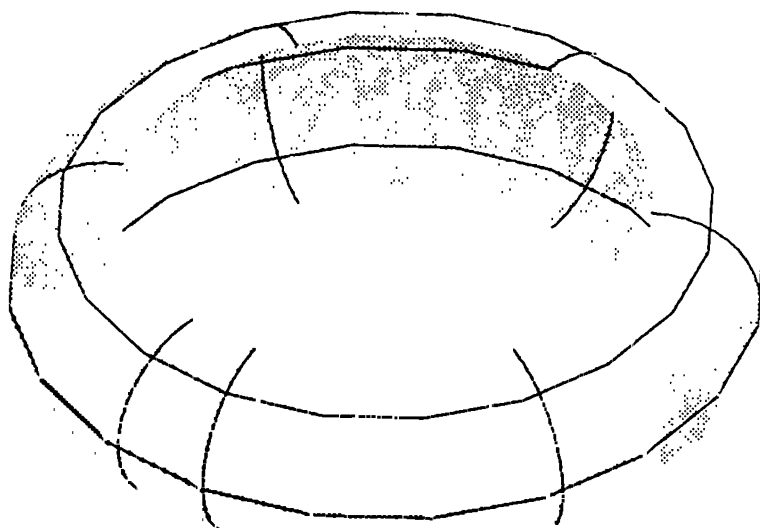
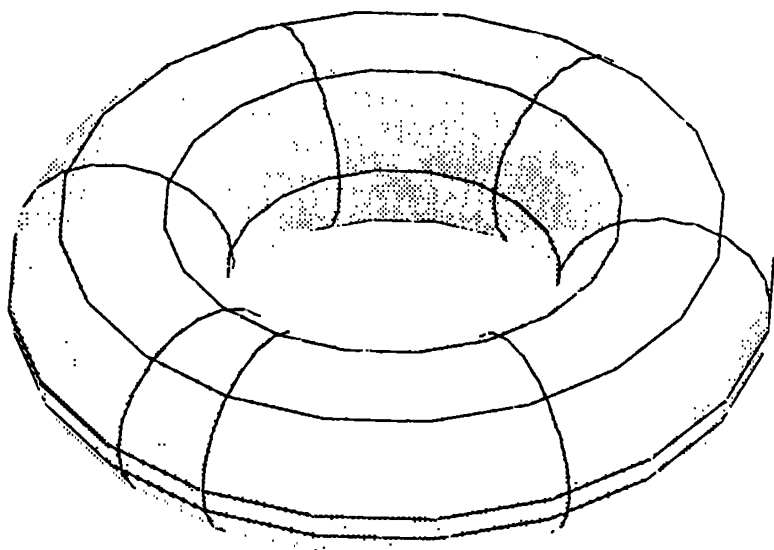


Exemples. —

Les quatre points ombilics d'un ellipsoïde : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ avec $a < b < c$



(intersection de quadriques homofocales)

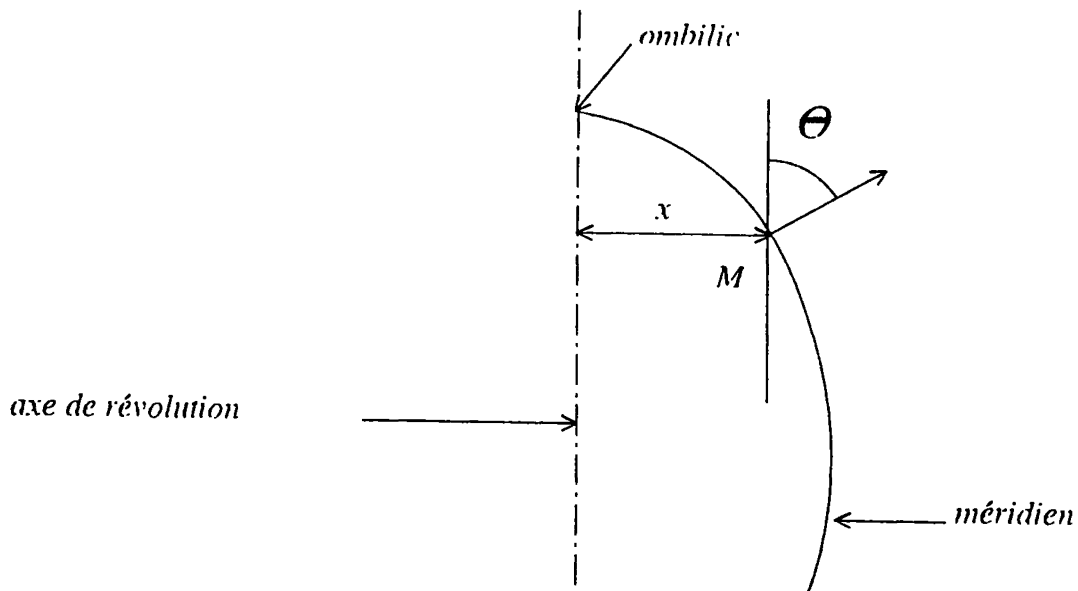


Un tore n'a pas de points ombilic, ni sur sa partie de courbure positive, et encore moins sur sa partie de courbure négative!

Les points ombilics d'une surface de révolution : Une surface de révolution est engendrée par la rotation autour d'un axe d'une courbe plane. Les sections de cette surface par des plans qui contiennent l'axe s'appellent des méridiens et les sections par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles appelés parallèles.

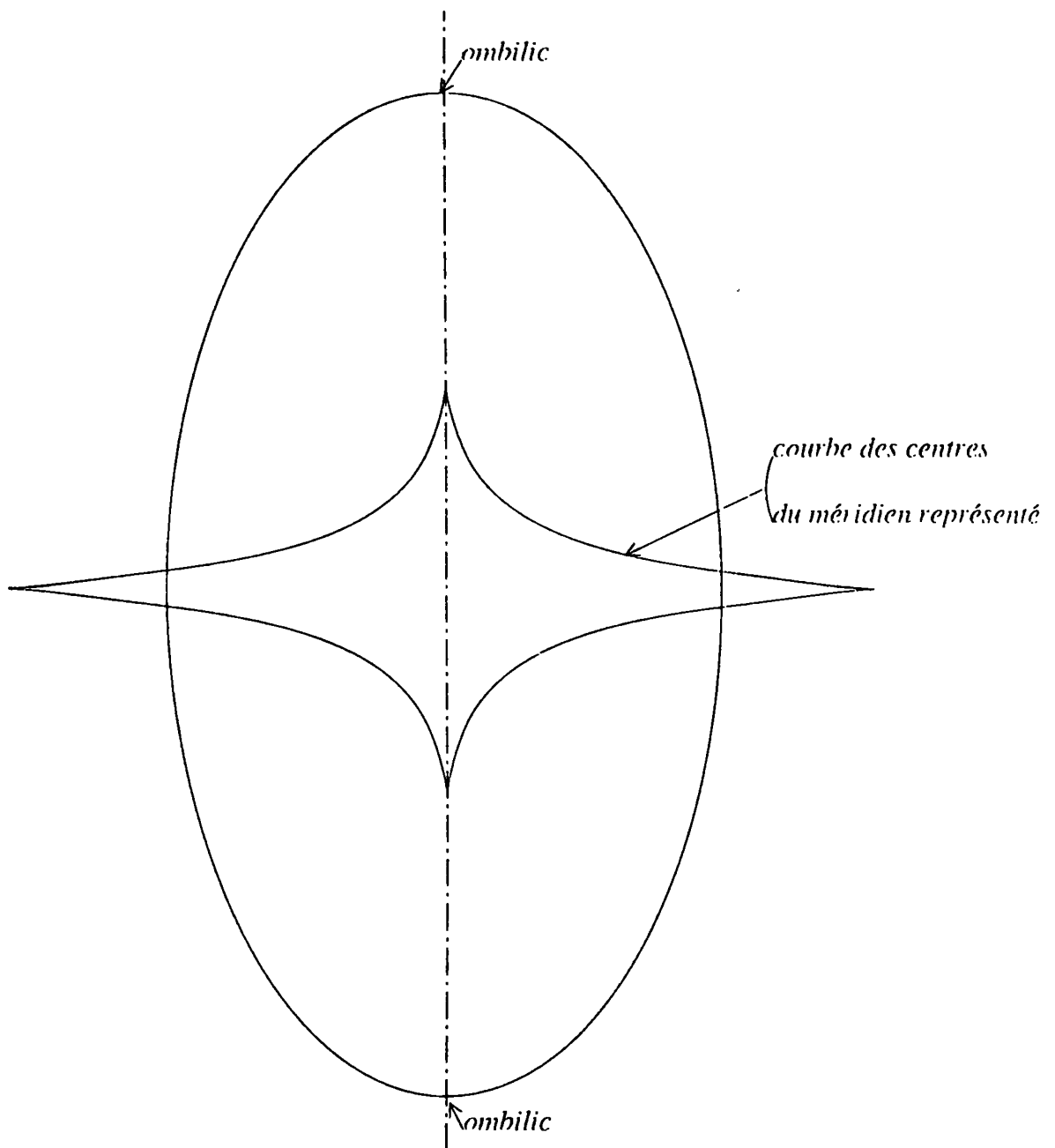
Quand un méridien rencontre l'axe de révolution, pour que la surface soit lisse, il faut qu'il le rencontre perpendiculairement ce que nous supposons toujours. Les lignes de courbure d'une surface de révolution sont les méridiens et les parallèles (il suffit de constater que les normales aux méridiens et aux parallèles engendrent des surfaces plates (plan contenant l'axe ou bien cône de révolution ayant son sommet sur l'axe)).

Si nous appelons R le rayon de courbure d'un méridien et θ l'angle formé par la normale en M à la surface et l'axe de révolution, alors les courbures principales sont $\frac{1}{R}$ et $\frac{\sin \theta}{x}$ si x est la distance de M à l'axe.

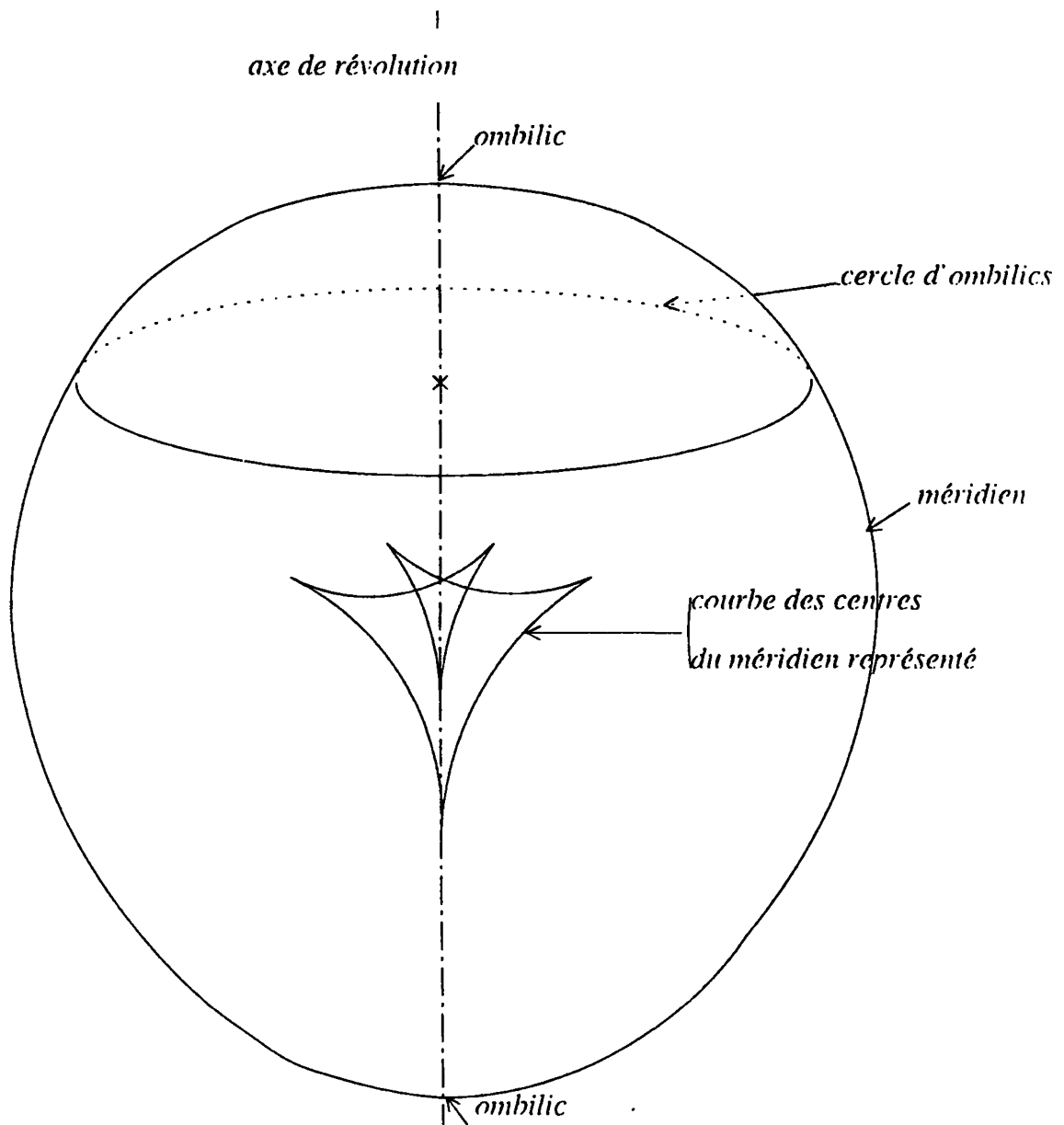


Toute famille de droites dans le plan admet (dans le cas générique) une enveloppe. Ainsi l'ensemble des centres de courbure d'un méridien constitue une courbe et pour qu'un point soit ombilic il faut que $\frac{1}{R} = \frac{\sin \theta}{x}$ ce qui signifie que le centre de courbure du méridien considéré est sur l'axe de révolution pour un point ombilic. Il est alors facile de construire des surfaces de révolution diffeomorphes à S^2 qui n'aient que deux ombilics. Il suffit en effet de prendre une courbe des centres qui soit toujours du même côté de l'axe de révolution, qui soit tangente en deux points à l'axe de révolution et de considérer une développée d'une telle courbe pour obtenir une courbe méridienne donnant naissance par rotation autour de l'axe à une surface de révolution qui n'admette que deux points ombilics.

Par contre, si la courbe des centres recoupe (non tangentiellement) l'axe une fois on obtiendra en plus des deux points ombilics aux sommets un parallèle entier de points ombilics et l'on peut aussi avoir autant de cercles d'ombilics que l'on veut.



Par exemple, un ellipsoïde de révolution n'a que deux ombilics.



Cette surface de révolution a une infinité d'ombilics, mais les lignes de courbures (les parallèles et les méridiens) n'ont que deux points singuliers.

5. La conjecture de Carathéodory :

Carathéodory a conjecturé que toute surfaxe plongée dans \mathbb{R}^3 , compacte et strictement convexe avait au moins deux ombilics

Commençons par exposer ce que l'on connaît en 1991 sur ce sujet dans le cas C^∞ .

La démonstration de Brian Smyth et Frederico Xavier.

Elle est basée sur deux ingrédients de base.

1) Une extension propre à la dimension 2 du *théorème de Poincaré-Hopf*

«Soit M une variété compacte orientable et un champ de vecteurs défini sur M n'ayant qu'un nombre fini de zéros, alors la somme des indices de ce champ de vecteurs en chacun des zéros est égale à la caractéristique d'Euler de cette variété».

En dimension deux, on donne un sens à l'indice d'un champ de directions autour d'un point singulier isolé de ce champ, indice qui généralise l'indice d'un champ de vecteurs et le théorème de Poincaré-Hopf est encore vrai pour un champ de directions.

2) Si la surface n'a qu'un nombre fini d'ombilics (points singuliers d'un des deux champs de directions de courbure) on cherche à appliquer le théorème de Poincaré-Hopf aux champs de directions de courbure.

Voici le résultat :

THÉORÈME DE BRIAN SMYTH ET FREDERICO XAVIER [13]. — Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion lisse d'une surface lisse dans \mathbb{R}^3 ayant un ombilic isolé au point p_0 d'indice j . Si

$$\|\nabla K\| + \|\nabla \bar{R}\| + \sum_{r=0}^3 \|\nabla^r (K^2 - \bar{R})\| \neq 0 \text{ au point } p_0$$

alors $|j| \leq \frac{1}{2}$.

K et \bar{R} désignent encore ici la courbure moyenne et la courbure de Gauss (ou intrinsèque) de la surface.

Le dernier terme $\|\nabla^r (K^2 - \bar{R})\|$ peut paraître étrange. Sur une surface en un point non ombilic sont définies deux courbures principales. Elles sont égales en un point ombilic. En dehors d'un ombilic, l'on peut distinguer la plus grande courbure de la plus petite. En prolongeant la définition de la plus grande courbure et de la plus petite en un ombilic, la nullité du dernier terme exprime simplement que les courbures principales ont *séparément* des gradients nuls; mais comme ces quantités pourraient ne pas être différentiables en un ombilic Brian Smyth et Frederico Xavier utilisent cette expression très peu parlante. L'expression $(K^2 - \bar{R})$ est égale à la moitié du carré de

la différence des courbures principales et la nullité de ses dérivées d'ordre 3 alliée aux équations de Codazzi toujours vérifiées sur une surface, exprime bien la "nullité du gradient" de chacune des courbures principales.

En résumé le résultat de Brian Smyth et Frederico Xavier exprime qu'en un point où au moins une des trois quantités courbure de Gauss, plus grande et plus petite courbure principale, "a un gradient non nul", alors l'indice des champs de directions principales est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ (il est nul en un point non ombilic).

En particulier Brian Smyth et Frederico Xavier en déduisent le corollaire suivant.

COROLLAIRE . — *Si pour une surface compacte et orientable, les ensembles des points critiques de la courbure moyenne et de la courbure de Gauss sont disjoints, alors la surface possède au moins $2|\chi(M)|$ ombilics, où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M . En particulier pour une telle surface difféomorphe à S^2 , le nombre des ombilics est au moins quatre.*

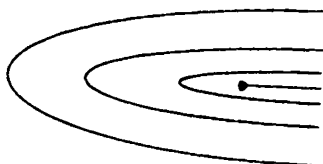
L'extension propre à la dimension deux du théorème de Poincaré-Hopf (d'après Spivak [4]). Soit donc M une variété compacte orientable et X un champ de vecteurs sur M qui ait un zéro isolé en un point P , définissons alors l'indice de X au point P . Commençons par le cas d'un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^n ayant un zéro à l'origine O contenue dans U . En tout point de U , $\frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ définit un point de S^{n-1} et à tout point de S^{n-1} on peut faire correspondre un point de U en associant à $\vec{\eta}$, vecteur de norme 1 associé à un point de S^{n-1} le point M tel que $\vec{OM} = \alpha \vec{\eta}$ ($\alpha > 0$). Nous avons donc défini une application de S^{n-1} dans S^{n-1} :

$$S^{n-1} \longrightarrow U \longrightarrow S^{n-1}.$$

Quand α est suffisamment petit le degré de cette application ne dépend pas de α et ce degré définit l'indice du champ de vecteurs en O . Comme cette quantité est invariante par difféomorphisme, on définit ainsi l'indice d'un champ de vecteurs en un point d'une variété. En dimension deux, il existe une interprétation géométrique de cet indice : considérons un chemin fermé qui entoure une fois l'origine dans le sens direct et à chaque point de ce chemin associons le point H tel que $\vec{OH} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$. L'indice du champ de vecteurs en O est le nombre de tours qu'effectue le point H sur le cercle unité S^1 (en ayant choisi un sens d'orientation). C'est aussi le quotient par 2π de la variation de l'angle $\theta = (\vec{OH}, \vec{i})$ (où \vec{i} est un vecteur constant) quand on parcourt un chemin qui enlace une fois l'origine dans le sens direct.

Considérons maintenant un champ Δ de directions ayant un point singulier isolé en O .

(Exemple de champ de directions ne provenant pas d'un champ de vecteurs :



c'est l'aspect des lignes de courbure d'une famille autour d'un ombilic sur un ellipsoïde quelconque). Ce champ Δ de directions est donc défini sur $U \setminus O$ mais pas en O . P^1 peut être considéré comme $S^1 \setminus \{+-\}$, comme l'ensemble des directions de R^2 , comme un demi-cercle avec ses extrémités identifiées, ce qui donne une application de P^1 dans S^1 . Mais nous connaissons aussi une application de S^1 dans P^1 qui à un vecteur $\vec{u} = \frac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|}$ unitaire de R^2 lui associe sa direction. Nous pouvons donc construire une application :

$$S^1 \longrightarrow P^1 \longrightarrow S^1$$

et nous définirons l'indice i du champ de direction Δ comme étant la moitié du degré de cette application composée de S^1 dans S^1 .

Soit $\tilde{M} \xrightarrow{\omega} M$ un revêtement à deux feuillet de M ; étendons localement autour du point de branchement la définition du champ de directions. Nous obtenons ainsi un champ de vecteurs $\tilde{\Delta}$ sur \tilde{M} et l'indice \tilde{i} de $\tilde{\Delta}$ autour d'un point de branchement. Alors $\tilde{i} = 2i - 1$. De même $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M) - l$ où l est le nombre de points de branchements. Alors le théorème de Poincaré-Hopf pour le champ de vecteurs $\tilde{\Delta}$; permet de démontrer l'extension de ce théorème pour le champ de directions Δ . L'interprétation géométrique de ce second indice est identique à celle du premier, sauf que pour le second si l'on parcourt un chemin qui enlace une fois le point singulier le point H défini par

$\vec{OH} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$ peut ne pas faire un nombre entier de tours mais aussi des demi-tours.

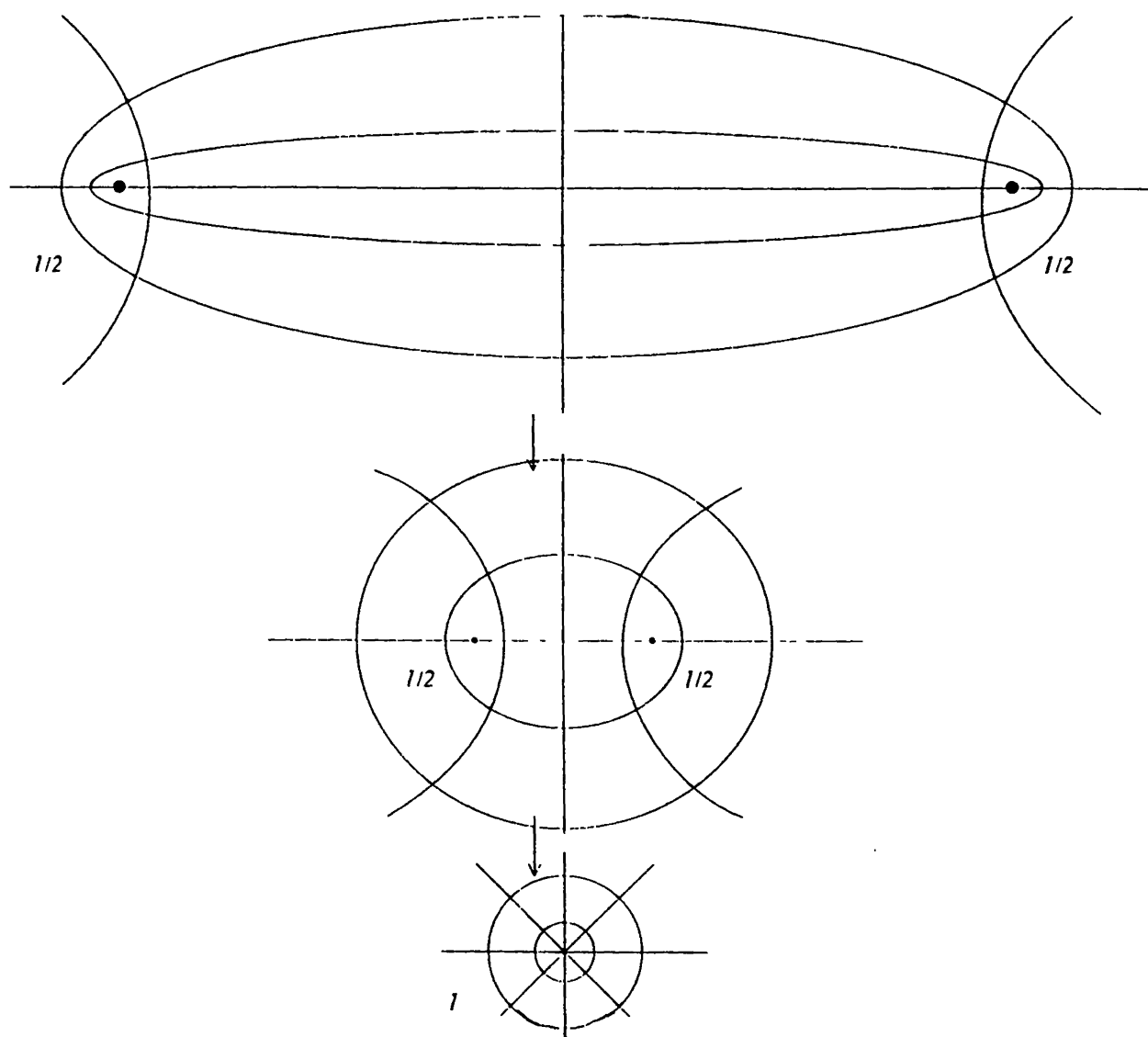
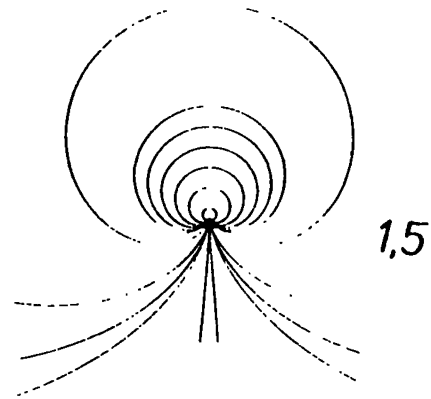
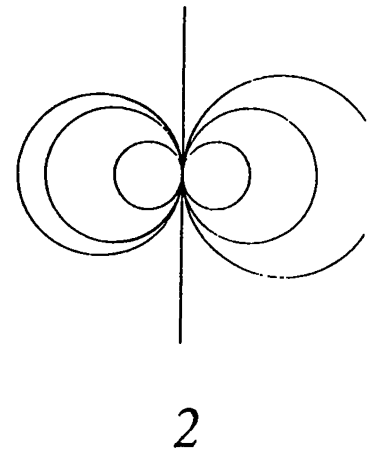
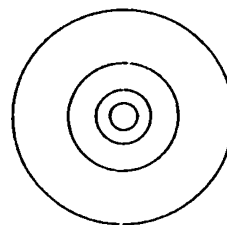
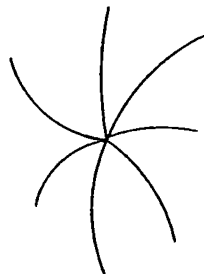
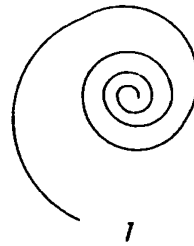
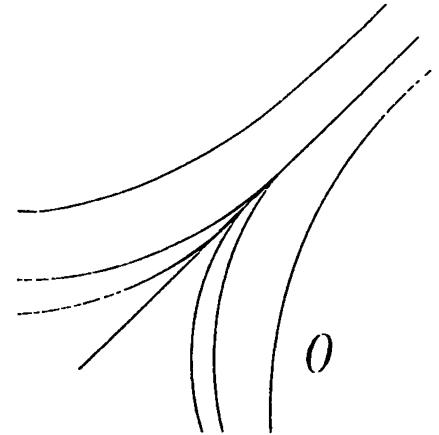
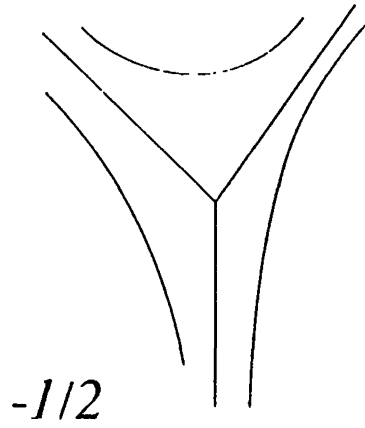
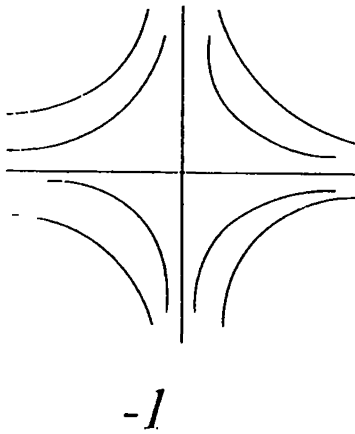


Illustration de ce résultat (1).

Les quatre points de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ avec $a < b < c$ se rassemblent en deux points quand $b \rightarrow c$ par exemple. Chaque point ombilic de l'ellipsoïde de révolution éclate en deux points ombilics et l'indice qui valait un pour un sommet de l'ellipsoïde révolution "éclate" en la somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.



Voici l'aspect des courbes intégrales d'un champ de directions autour d'un point singulier et l'indice correspondant pour 8 exemples particuliers. Nous allons revenir sur une classification possible de ces comportements.



La démarche de Brian Smyth et Frederico Xavier.

Nous connaissons maintenant la notion d'indice d'un champ de directions autour d'un point singulier. Brian Smyth et Frederico Xavier cherchent à estimer l'indice d'un champ de directions principales à partir de propriétés géométriques de la surface. Ce résultat est obtenu grâce à un Lemme dont nous nous servons dans le problème relativiste. Si A est un tenseur symétrique de type (1,1) sur une variété riemannienne de dimension deux, sa diagonalisation relativement à la métrique définit des directions propres. Nous dirons que p_0 est un ombilic pour A si p_0 est un point singulier d'une des directions propres de A .

LEMME DE BRIAN SMYTH ET FREDERICO XAVIER. — Soit A un tenseur symétrique de type (1, 1) sur une variété riemannienne de dimension deux. Soit p_0 un ombilic isolé de A d'index j . Si $|j| \geq 1$ alors

$$\nabla_X A = \frac{1}{2} X(\text{Tr} A) I$$

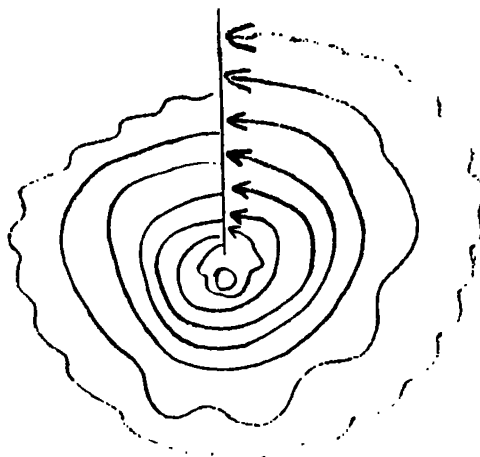
pour tout vecteur tangent X au point p_0 . (Ou bien exprimé en notation à la Levi-Civita : $\nabla_i A_{jk} = \frac{1}{2} \partial_i (A_l^l) g_{jk}$ quel que soit (i, j, k)).

Pour comprendre l'origine de ce résultat, quelques rappels ([15], pages 84,85):

DÉFINITION D'UNE TRAJECTOIRE CARACTÉRISTIQUE. — Etant donné une équation différentielle dans un voisinage du plan : $\frac{dx}{dt} = V(x)$, $x \in U$ où $V(x)$ est un champ de vecteurs défini sur U , nous appellerons courbe de phase de l'équation différentielle, une courbe intégrale du champ de vecteurs (donc tangente en chaque point au champ $V(x)$) paramétrée par t .

Une courbe de phase d'une équation différentielle dans le plan est appelée *une trajectoire caractéristique du point singulier* si quand $t \rightarrow \infty$ ou quand $t \rightarrow -\infty$, le point courant approche le point singulier et la trajectoire devient tangente à une ligne droite fixe.

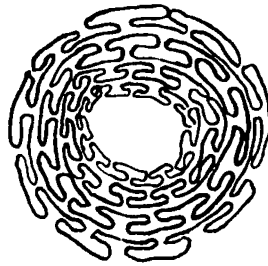
DÉFINITION D'UN POINT MONODROMIQUE. — Un point singulier d'un champ de vecteurs est dit *monodromique* s'il existe un voisinage de ce point et un arc lisse (et que l'on peut prolonger localement à ses extrémités) dont l'origine est le point singulier et qui est transverse au champ de vecteurs en chacun de ses points excepté au point singulier, avec la propriété que dans ce voisinage moins l'arc lisse en question le champ de vecteurs est difféomorphe à un champ standard.



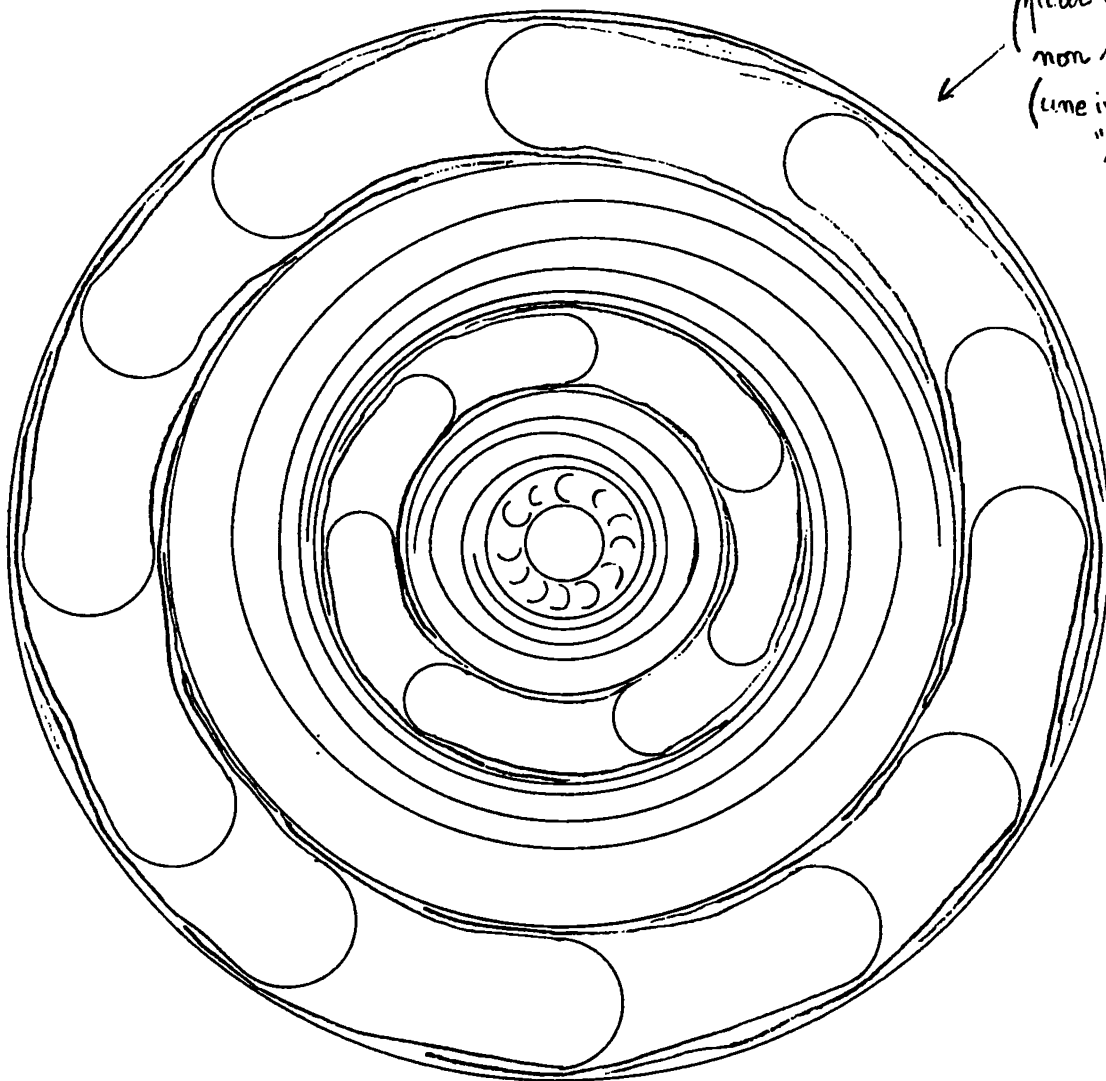
Etant donné un point sur un tel arc, l'application qui le transporte sur ce même arc en suivant une trajectoire du champ de vecteurs (qui ne recoupe pas l'arc) s'appelle la transformation monodromique du point singulier.

THÉORÈME . — *Un point singulier d'un champ de vecteurs lisse dans le plan en lequel le champ de vecteurs n'est pas plat (il existe au moins une dérivée partielle d'un ordre quelconque qui ne soit pas nulle au point sigulier) doit ou bien avoir une trajectoire caractéristique ou bien être monodromique.*

Exemple de point monodromique sans trajectoire caractéristique : (le champ de vecteurs est forcément plat en un tel point)

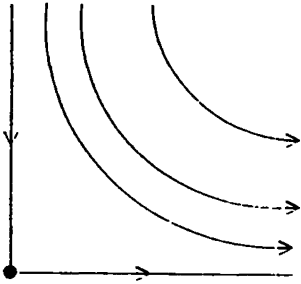


← ---- plat mais monodromique

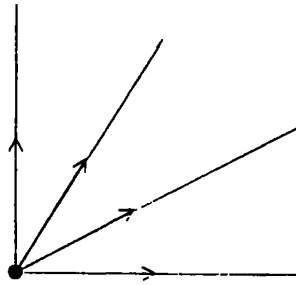


← plat et non monodromique (une infinité de "cycles limite")

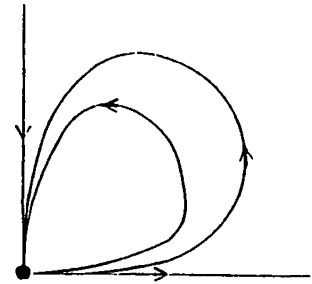
DÉFINITIONS . — La fermeture S d'un ensemble ouvert dont la frontière contient l'origine est appelé un secteur hyperbolique, ou secteur parabolique, ou secteur elliptique d'un champ de vecteurs ayant une singularité à l'origine, s'il existe un homéomorphisme $S_h \rightarrow S$ ou bien $S_p \rightarrow S$ ou bien $S_e \rightarrow S$ qui transporte les courbes de phase du champ V_h ou V_p ou V_e en les courbes de phase de V et les trajectoires caractéristiques du champ V_h ou V_p ou V_e en les trajectoires caractéristiques de V et où les champs V_h, V_p et V_e (qui peuvent être définis rigoureusement) ont cette allure :



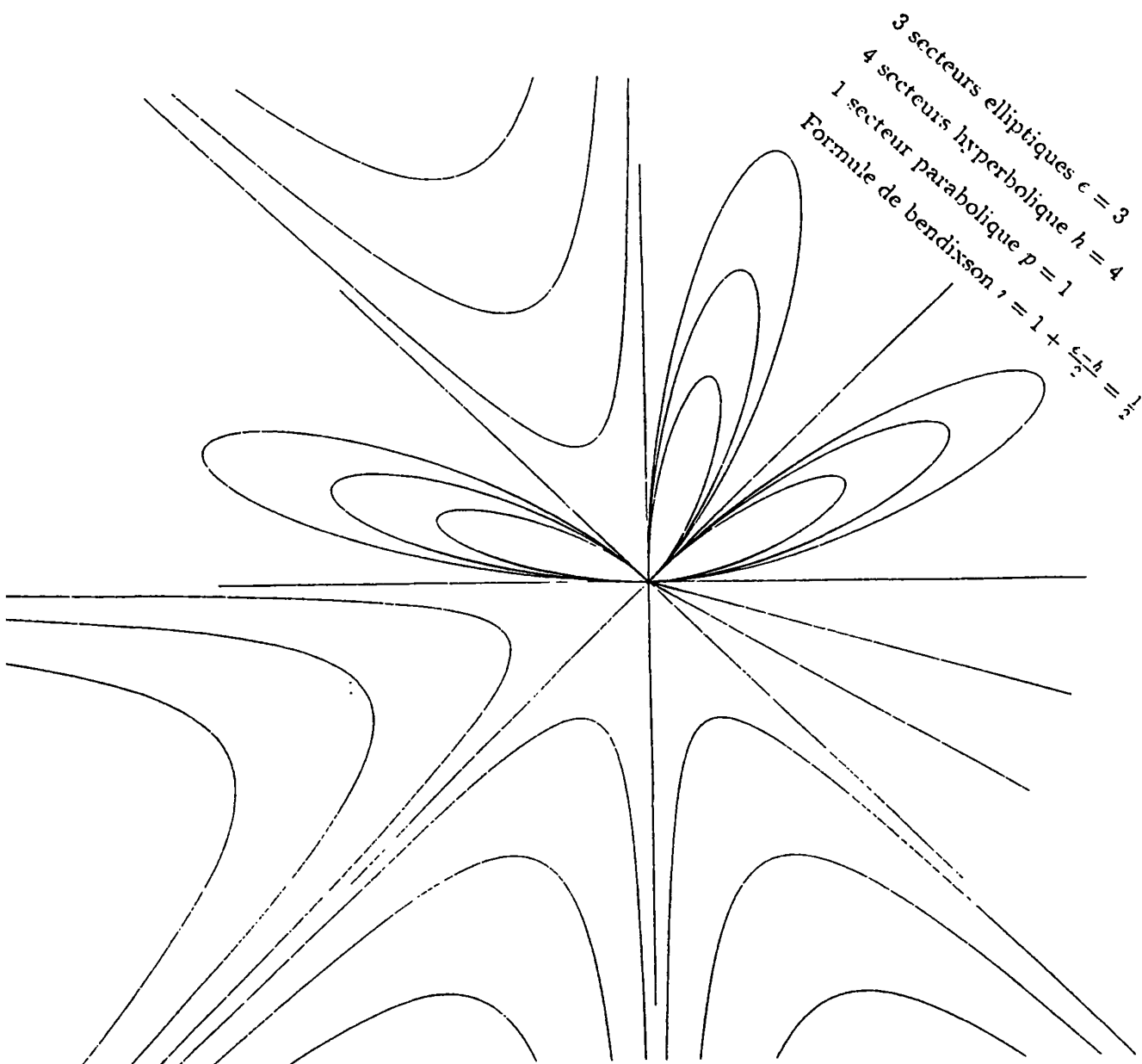
secteur hyperbolique



secteur parabolique



secteur elliptique



3 secteurs elliptiques $\epsilon = 3$
 4 secteurs hyperboliques $h = 4$
 1 secteur parabolique $p = 1$
 Formule de Bendixson $\nu = 1 + \frac{\epsilon - h}{2} = 1$

THÉORÈME . — *Soit V un champ de vecteurs lisse ayant un point singulier isolé non plat. Si le point singulier a une trajectoire caractéristique et un voisinage qui ne contient pas un nombre infini dénombrable de secteurs elliptiques sans points intérieurs communs, alors il possède un voisinage qui se scinde en une réunion finie de secteurs paraboliques, elliptiques et hyperboliques de V qui n'ont pas de points intérieurs communs.*

En résumé, ou bien le point singulier est monodromique, ou bien il admet une trajectoire caractéristique, et dans ce cas s'il ne possède pas une infinité dénombrable de secteurs elliptiques sans points intérieurs communs alors il possède un voisinage qui se scinde en une réunion finie de secteurs paraboliques, elliptiques, hyperboliques qui n'ont pas de points intérieurs communs. De plus dans ce dernier cas l'indice du champ de vecteurs au point singulier est donné par la formule de Bendixson :

$$j = 1 + \frac{e - h}{2}$$

où e désigne le nombre de secteurs elliptiques et h le nombre de secteurs hyperboliques.

Le lemme de Brian Smyth et Frederico Xavier s'obtient en considérant autour du point singulier de A le tenseur $B = A - \frac{\text{Tr}A}{2}I$ et le champ $X = B_{11}\partial_1 + B_{12}\partial_2$ défini dans des coordonnées isothermes autour du point singulier. L'indice de ce champ de vecteurs est le double de l'indice d'un champ de directions propres de A . Comme Brian Smyth et Frederico Xavier supposent que $|j| \geq 1$ on en déduit que l'on peut se ramener au cas où l'indice de X est j_0 avec $j_0 \geq 2$. En considérant un point non plat, nous sommes alors assurés que X a ou bien une trajectoire caractéristique (ce qui est impossible parce que cela conduit à $j_0 = 1$) ou bien une infinité de secteurs elliptiques ou bien se scinde autour du point singulier comme précédemment expliqué. Dans ce dernier cas la formule de Bendixson montre qu'il doit y avoir forcément au moins un secteur elliptique. Donc dans tous les cas il existe un secteur elliptique. Ce qui conduit à ce que la divergence de X change de signe à l'intérieur de toute région enlacée par une trajectoire de X . Ce qui conduit par continuité à annuler la divergence de X au point singulier. En répétant ce raisonnement avec un deuxième champ de vecteurs $Y = B_{11}\partial_1 - B_{12}\partial_2$ le lemme de Brian Smyth et Frederico Xavier se trouve démontré.

Dans le raisonnement relativiste, nous ferons un raisonnement lui aussi basé sur cette classification des singularités en dimension 2.

**6. Une autre approche de la conjecture de Carathéodory
et l'étude des points ombilics d'une surface de
niveau d'une fonction analytique réelle
autour d'un minimum strict de cette fonction**

Reprenons l'exemple des deux points ombilics d'un ellipsoïde qui tendent vers un sommet d'un ellipsoïde de révolution et le comportement des indices. Dans cette démarche qui illustre celle de Brian Smyth et Frederico Xavier, intuitivement la variation de la surface dans \mathbb{R}^3 n'intervient pas, c'est une analyse intérieure à la dimension deux qui est faite. Dans la démarche que je propose, la surface étudiée fait partie de la famille des surfaces de niveau d'une fonction analytique autour d'un minimum strict de cette fonction et c'est l'ensemble de tous les points ombilics de toutes ces surfaces que je vais étudier, les points ombilics d'une surface particulière de la famille n'étant que l'intersection de cet ensemble et de cette surface.

LEMME 1. — *Soit ξ une fonction analytique réelle (définie sur un voisinage de \mathbb{R}^3 et à valeurs dans \mathbb{R}) ayant un minimum strict en C . Alors il existe un voisinage U du minimum strict C et une fonction analytique réelle f (définie sur U et à valeurs dans \mathbb{R}) telle que l'ensemble*

** de tous les points ombilics de toutes les surfaces de niveau de ξ contenues dans U*

** et du minimum*

soit l'ensemble $\{x \in U, f(x) = 0\}$.

Preuve. — En dehors de C utilisons les surfaces $\xi = C^{\text{te}}$ et leurs trajectoires orthogonales pour définir localement un système de coordonnées. Nous obtenons ainsi localement l'expression de la métrique canonique de \mathbb{R}^3 en coordonnées curvilignes (x^1, x^2, ξ) :

$$ds^2 = V^2(x^1, x^2, \xi)d\xi^2 + \sum_{A,B=1}^2 g_{AB}(x^1, x^2, \xi)dx^A dx^B$$

($\frac{1}{V}$ est la norme du gradient de ξ).

Le tenseur $\nabla\partial\xi$ admet comme composantes dans un tel système de coordonnées locales :

$$((\nabla_i \partial_j \xi)) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_{11}}{V} & \frac{\Omega_{12}}{V} & \frac{-\partial_1 V}{V} \\ \frac{\Omega_{21}}{V} & \frac{\Omega_{22}}{V} & \frac{-\partial_2 V}{V} \\ \frac{-\partial_1 V}{V} & \frac{-\partial_2 V}{V} & \frac{-\partial_3 V}{V} \end{pmatrix}.$$

Dans cette expression la 2^e forme fondamentale de la surface apparaît avec ses

composantes

$$\Omega_{AB} = \frac{1}{2V} \partial_3 g_{AB}(x^1, x^2, \xi)$$

(avec comme notation $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial \xi}$).

Ainsi la deuxième forme fondamentale n'est que la restriction au plan tangent à la surface de la forme quadratique $(\nabla \partial \xi)$ (au coefficient $\|\text{grad } \xi\|$ près).

Comme cette forme quadratique est définie sur U et même en C , voilà l'intuition de ce lemme 1. Pour cela étudions donc la forme quadratique $(\nabla \partial \xi)$ et appelons μ_1, μ_2 , et μ_3 ses valeurs propres (qui sont toutes les trois réelles). Définissons encore K comme la trace de la 2^e forme fondamentale de la surface $\xi = C^e$, Ω^2 la trace de son carré. L'écriture du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(\nabla \partial \xi - \mu g)$ où g est la métrique canonique de \mathbb{R}^3 conduit aux relations suivantes :

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \frac{\Omega^2}{V^2} + \left(\frac{\partial_3 V}{V^3} \right)^2 + 2 \sum_{A=1}^2 \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4},$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{K}{V} - \frac{\partial_3 V}{V^3},$$

$$\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 = -\frac{K}{V} \frac{\partial_3 V}{V^3} + \frac{K^2 - \Omega^2}{2V^2} - \sum_{A=1}^2 \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4},$$

(où par définition $\partial^A V = \sum_{B=1}^2 g^{AB} \partial_B V$).

De cette dernière relation nous pouvons déduire :

$$\frac{\Omega^2 - \frac{K^2}{2}}{2V^2} = -\frac{K}{V} \frac{\partial_3 V}{V^3} + \frac{K^2}{4V^2} - \sum_{A=1}^2 \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4} - (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3).$$

Un peu de patience conduit alors à

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2 - \frac{K^2}{2}}{2V^6} = f = & + [\|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2 \cdot (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (\|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \xi] \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (\|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \xi \right) \\ & + \frac{1}{4} [(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (\|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \xi]^2 \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (\|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2) \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\| \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{4} \|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}} (\|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^2)\|^2 \\ & \left. - \|\overrightarrow{\text{grad}} \xi\|^4 (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3) \right]. \end{aligned}$$

L'expression obtenue à droite ne dépend pas du système utilisé et est une fonction analytique : toutes les opérations effectuées préservent l'analyticité à partir de celle de ξ et de celle de la métrique canonique de \mathbb{R}^3 et les expressions symétriques des valeurs

propres μ_1 , μ_2 et μ_3 sont aussi analytiques (alors que ces valeurs propres ne le sont pas, *a priori*). Donc l'expression $(\frac{\Omega^2 - K^2}{2V^6})$ est analytique. Mais cette expression s'annule (en dehors de C) si et seulement si elle est évaluée en un point ombilic d'une surface $\xi = C^{te}$.

L'expression

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \frac{\Omega^2}{V^2} + \left(\frac{\partial_3 V}{V^3}\right)^2 + 2 \sum_{A=1}^2 \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4}$$

montre que les quantités $\frac{1}{R_1 V}$, $\frac{1}{R_2 V}$, $\frac{\partial_3 V}{V^3}$ et $\sum_{A=1}^2 \frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4}$ restent bornées quand le point courant M où elles sont évaluées tend vers C . Mais alors

$$f = \frac{1}{4R_1^2 V^6} + \frac{1}{4R_2^2 V^6} - \frac{1}{2R_1 R_2 V^6}$$

tend vers zéro quand M tend vers C . La fonction f étant analytique, nous en déduisons que f est nulle en C .

(Fin de la démonstration du Lemme 1).

Conclusion. — l'étude des points ombilics revient à l'étude de l'ensemble $f^{-1}(0)$ où f est une fonction analytique réelle de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} .

LEMME 2. — *Le minimum C qui appartient à l'ensemble $[f = 0]$ est un point d'accumulation de cet ensemble.*

Preuve. — En effet d'après l'extension au cas $n = 2$ du théorème de Poincaré-Hopf, une surface difféomorphe à S^2 a forcément un point ombilic puisque sa caractéristique d'Euler, 2, est non nulle. Donc sur chaque surface $\xi = C^{te}$, difféomorphe à S^2 , localement autour du minimum C de la fonction ξ , il existe au moins un point ombilic. Quand la surface $\xi = C^{te}$ varie, ce point ombilic, s'il est isolé, décrit une courbe. Cette courbe est analytique en un point différent de C et elle est continue en C . A priori, nous ne savons pas si elle est analytique jusqu'en C mais nous avons bien démontré dans tous les cas (même si le point ombilic en question n'est pas isolé sur la surface $\xi = C^{te}$) que C est point d'accumulation de l'ensemble $\{x \in U, f(x) = 0\}$.

(Fin de la preuve du lemme 2).

Nous allons montrer maintenant qu'il existe au moins une courbe de points ombilics qui soit analytique jusqu'en C . Le prolongement de cette courbe nous donnera le résultat recherché.

THÉORÈME. — *Soit ξ une fonction analytique réelle définie sur un voisinage $U \in \mathbb{R}^3$ d'un point C où ξ admet un minimum strict. Alors il existe une constante ε strictement positive telle que toutes les surfaces de niveau de ξ caractérisées par $\xi = \xi_{inf} + \alpha$ avec $\alpha < \varepsilon$, admettent au moins deux points ombilics.*

(Voir la démonstration de ce théorème page 38).

La preuve de ce théorème passe par une étude des ensembles $\{x \in R^n, f(x) = 0\}$ quand f est une fonction analytique réelle. De plus il faut s'intéresser au *cas réel* qui

présente bien des différences avec le cas complexe. Les rappels qui suivent le sont pour le cas réel (voir par exemple [16]).

Un sous ensemble A d'un espace réel analytique est dit *semi-analytique* en un point x_0 de X s'il existe un voisinage V ouvert de x_0 dans X et un nombre fini de fonctions réelles analytiques g_{ij} et f_{ij} telles que :

$$A \cap V = \bigcup_i \{x \in V / g_{ij}(x) = 0, f_{ij}(x) > 0 \text{ pour tout } j\}.$$

THÉORÈME DE BRUHAT-WHITNEY (1959). — *Soit X un espace réel analytique et A un sous ensemble de X semi-analytique. Soit x_0 un point dans la fermeture de $A \setminus \{x_0\}$. Alors pour tout voisinage N de x_0 , nous pouvons trouver un voisinage ouvert U de x_0 qui soit contenu dans N et qui ait la propriété suivante :*

si y est un point de $U \cap A \setminus \{x_0\}$, alors il existe une application réelle analytique ϕ :

$$[-1, +1] \xrightarrow{\phi} X$$

telle que $\phi(0) = x_0$ et $y \in \phi([0, 1]) \subset U \cap A$.

(Fin de l'énoncé du théorème de Bruhat-Withney).

Notons pour mémoire une extension de ce théorème :

Un sous ensemble A est dite *sous-analytique* en un point x_0 de X s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un nombre fini de fonctions réelles analytiques propres :

$$Y_{ij} \longrightarrow X \quad 1 \leq i \leq p \quad j = 1, 2$$

telles que

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^{i=p} (Im f_{i1} - Im f_{i2}).$$

A est dit sous-analytique si A est sous analytique en chacun de ses points.

THÉORÈME. — *Soit A un sous ensemble sous-analytique d'un espace réel analytique. Soit x appartenant à la fermeture de A . Alors il existe une application ϕ réelle analytique $[-1, +1] \xrightarrow{\phi} X$ telle que $\phi(0) = x$ et $\phi([-1, +1]) \subset A$.*

Voici l'aboutissement historique de cette démarche :

THÉORÈME. — *Soit A un sous ensemble réel analytique d'un espace X qui est dénombrable à l'infini. Alors A admet une stratification de Whitney, c'est-à-dire qu'il existe une décomposition $A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ qui a les propriétés suivantes :*

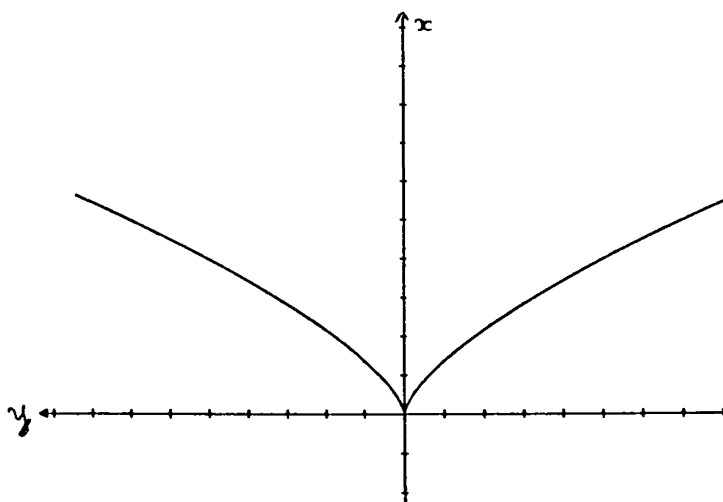
1) $A_{\alpha} \cap A_{\beta} = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$ et les A_{α} sont des variétés réelles analytiques sous variétés (lisses et connectées) de X et sous analytiques dans X ,

2) la famille A_{α} est localement finie dans X

3) $\overline{A_{\alpha}} \cap A_{\beta} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{A_{\alpha}} \supset A_{\beta}$

4) si $A_\alpha \supset A_\beta$ alors (A_α, A_β) satisfait à la condition de Whitney (cf [16]) en tout point de A_β .

Le théorème de Bruhat-Withney nous apprend donc l'existence d'une application réelle analytique $[-1, +1] \xrightarrow{\phi} X$ avec $\phi(0) = x$ et $y \in \phi(0, 1) \subset U \cap A$. Il ne faut pas croire dans le cas réel que la courbe correspondante soit lisse (il est tout à fait possible d'avoir un point de rebroussement, par exemple avec $\phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ associée à l'ensemble $x^3 - y^2 = 0$).



Il n'est pas du tout évident que la 2^e partie de la courbe (obtenue pour $t \geq 0$) ne se confonde pas avec la première (obtenue pour $t \leq 0$). Même l'aspect stratifié de Whitney ne permet pas d'être sûr de cela parce qu'il correspond au cas sous-analytique où cela est possible.

Voici une suggestion de Demailly pour répondre à la question .

Limitons nous au cas $n = 2$ et l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}$ avec comme hypothèses :

* f analytique

* $(0, 0)$ est point adhérent de cet ensemble et cet ensemble ne contient pas de voisinage ouvert de $(0, 0)$.

En raisonnant dans \mathbb{C}^2 au lieu de \mathbb{R}^2 (simplement en considérant la fonction analytique $f(x, y)$ réelle et en y remplaçant dedans x et y par $\alpha + i\beta$ et $\gamma + i\delta$), à une rotation des axes près, on peut trouver un développement de Puiseux de degré m autour du point $(0, 0)$ tel que l'ensemble $[f = 0]$ soit décrit localement autour de $(0, 0)$ par les

m branches définies par m séries entières

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{k>0} c_k^1 (x^{\frac{1}{m}})^k \\ y_2 &= \sum_{k>0} c_k^2 (x^{\frac{1}{m}})^k \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= \sum_{k>0} c_k^m (x^{\frac{1}{m}})^k \end{aligned}$$

Dans ces formules $x^{\frac{1}{m}}$ désigne une détermination complexe de la racine m^e de x et quand on remplace cette détermination par une autre dans un des y_i on change de branche (en obtenant un autre y_j).

Considérons alors une suite de points M_i , distincts de l'origine qui appartiennent à $[f = 0]$ et qui tendent vers zéro point adhérent de cet ensemble. On obtient une suite de valeurs $(x(M_i))^{\frac{k}{m}}$ réelles qui tendent vers zéro et une suite $y(M_i)$ qui tend vers zéro. Mais pour chaque indice i le choix de la détermination de la racine m^e peut être différent. Dans y_1 on peut bien choisir la détermination réelle de $x^{\frac{1}{m}}$ en modifiant s'il le faut les coefficients c_k^1 ; alors supposons que l'on ait effectué cette substitution dans tous les y_1, y_2, \dots, y_m . Nous avons maintenant une seule détermination de $x^{\frac{1}{m}}$ dans la formule de chaque branche. Par extraction de sous-suites on est sûr qu'au moins un des y_i (notons $i = h$ cette valeur) vérifie pour une sous-suite encore notée (M_i) :

$$y_h(M_i) = \sum_{k>0} c_k^h (x(M_i))^{\frac{k}{m}}.$$

Dans cette égalité les $y_h(M_i)$ et les $x(M_i)$ sont réels.

Considérons le premier c_k non nul. Il ne peut avoir de partie imaginaire. Sinon posons $c_{k_0}^h = a + ib$ pour le premier c_k^h non nul noté $c_{k_0}^h$. On a

$$y_h(M_i) - (a + ib)(x(M_i))^{\frac{k_0}{m}} = \sum_{k>k_0} c_k^h (x(M_i))^{\frac{k}{m}}$$

et donc $b = 0$ en extrayant une sous-suite telle que $\frac{y_h}{x}(M_i)$ converge. Ainsi de proche en proche tous les c_k sont réels et ainsi nous sommes assurés de l'existence d'une branche analytique réelle qui contienne tous les points de la sous-suite extraite et qui soit analytique jusqu'en zéro. Allons plus loin.

1^{er} cas - m pair. — Si tous les k tels que $c_k \neq 0$ sont pairs m n'était pas le degré et donc nous pouvons nous ramener dans la situation où il existe un k impair avec $c_k \neq 0$, mais si m est pair quand on fait la substitution ($x \rightarrow -x$) on passe d'une détermination de la racine m^e à une autre mais alors le point

$$\tilde{y} = \sum_{k>0} c_k (-x^{\frac{1}{m}})^k$$

est aussi dans l'ensemble $[f = 0]$ et est distinct du point de la branche initiale.

2^e cas - m impair. — Considérons

$$y_k = \sum_{k>0} c_k^h(x^{\frac{k}{m}})$$

la branche choisie. Dans cette formule quand on fait la substitution ($x \rightarrow -x$), y se transforme en $-y$ et donc $f(x, y) = 0$ implique que $f(-x, -y) = 0$ et donc il y a bien un point en dehors de la branche de départ.

Ainsi on trouve aussi près que l'on veut de $(0, 0)$ un point de $[f = 0]$ qui ne soit pas dans la branche initiale et donc nous obtenons l'existence d'une suite (N_j) de points qui rendent réelle une autre branche du développement en série de Puiseux par le même raisonnement.

Conclusion. — Il y a deux branches au moins du développement en série de Puiseux qui sont réelles.

Démonstration de l'existence de deux points ombilics au moins sur toute surface de niveau d'une fonction ξ réelle analytique suffisamment proche d'un minimum strict de cette fonction.

Nous savons donc que l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$ contient tous les ombilics et aussi le point C , minimum de ξ de coordonnées $(0, 0, 0)$; et que ce point C est point d'accumulation de l'ensemble des ombilics. Autour du point C cet ensemble $[f = 0]$ est un stratifié de Whitney.

Si le minimum est adhérent à une strate contenant une portion de surface, alors toute surface de niveau suffisamment proche du minimum contient une infinité d'ombilics.

Traisons donc le cas où ce stratifié de Whitney localement autour de C ne contient que des branches de courbe. Nous savons alors que dans un domaine $0 \leq \xi - \xi_{inf} \leq \varepsilon$ avec ε assez petit, l'ensemble $[f = 0]$ se réduit à l'intersection d'une boule et d'un graphe.

Comme $f = \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})^2}{V^6}$ est une fonction positive, en tout point de $[f = 0]$ nous savons que $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{0}$ et ceci illustre un moyen pour adjoindre à l'équation $(f = 0)$ d'autres équations nous conduisant comme dans le cas $n = 2$ à pouvoir décrire l'ensemble $[f = 0]$ (après une rotation des axes si nécessaire) par m branches définies par :

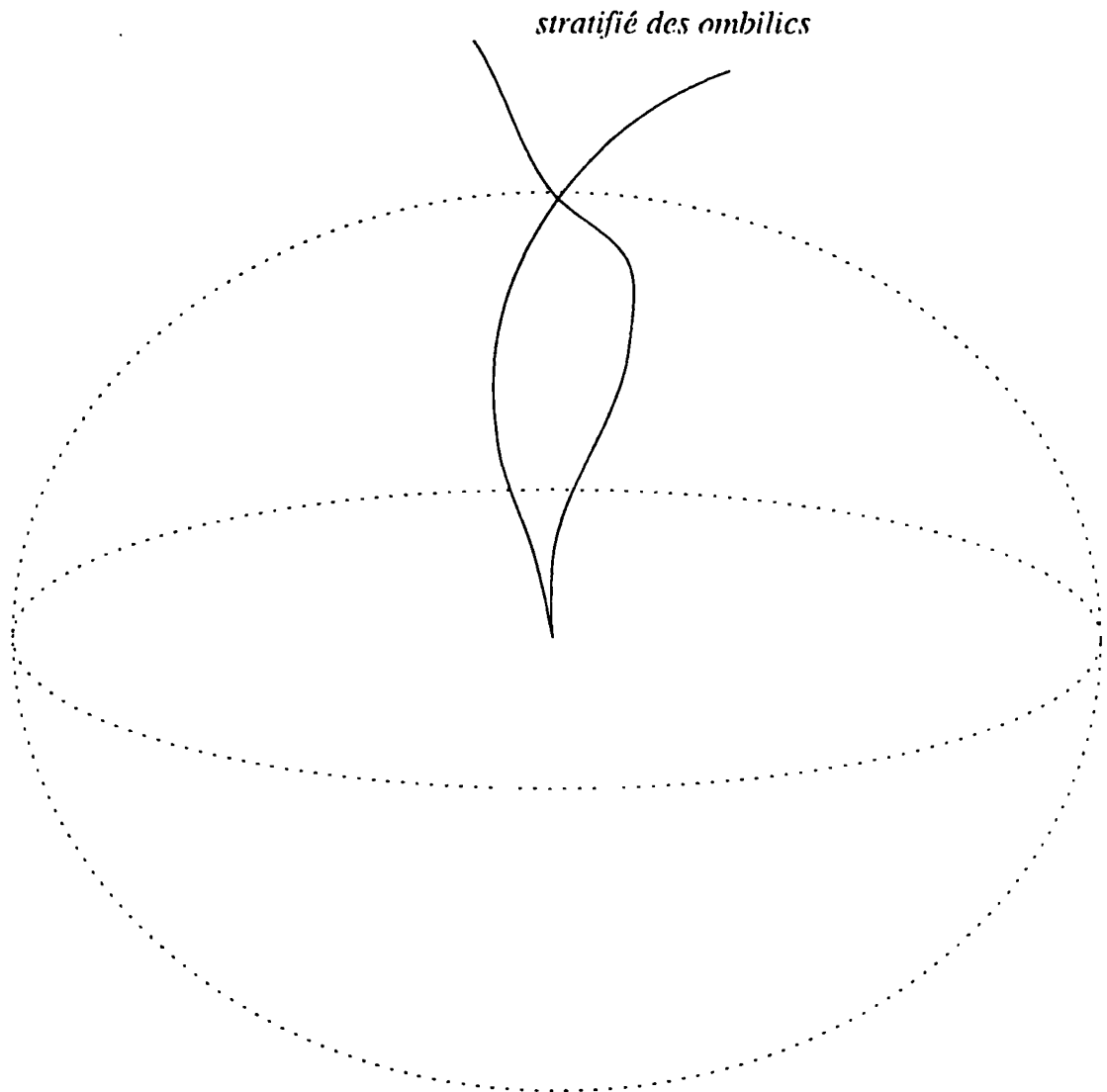
$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{k>0} c_k^1 (x^{\frac{1}{m}})^k & ; & & z_1 &= \sum_{k>0} d_k^1 (x^{\frac{1}{m}})^k \\ & \dots & ; & & \dots & \\ & \dots & ; & & \dots & \\ y_m &= \sum_{k>0} c_k^m (x^{\frac{1}{m}})^k & ; & & z_m &= \sum_{k>0} d_k^m (x^{\frac{1}{m}})^k \end{aligned}$$

Reprenons alors la démarche utilisée pour le cas $n = 2$ pour conclure exactement de la même manière à l'existence d'un deuxième point ombilic sur toute surface de niveau de la fonction ξ , surface suffisamment proche du minimum.

Extension de ce résultat.

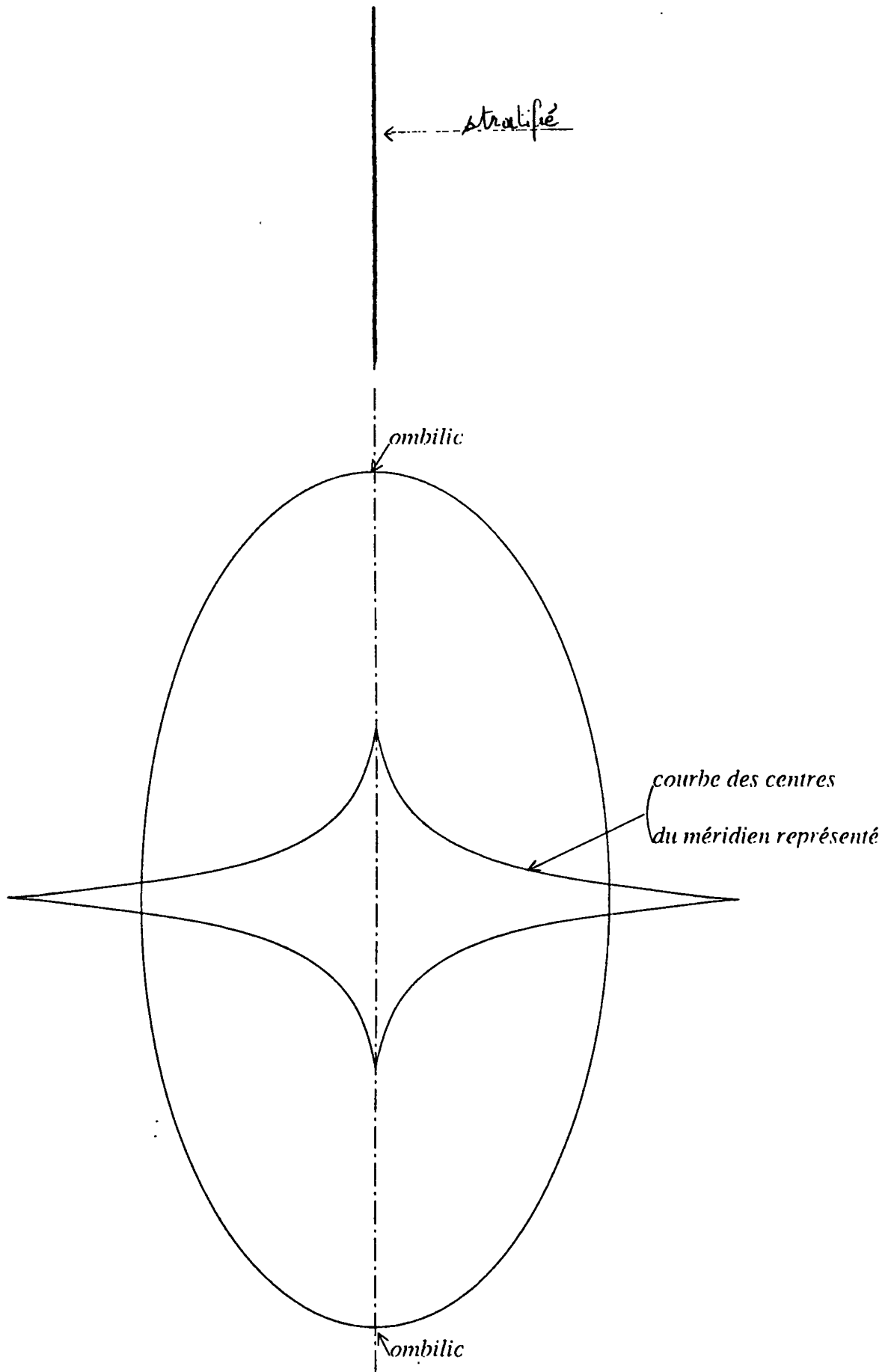
Sullivan [17] a démontré que tout ensemble analytique réel était localement topologiquement un cône au dessus d'un polyèdre (un simplexe) de caractéristique d'Euler paire. C'est la généralisation à toute dimension du nombre pair de branches que nous avons trouvé. En utilisant ce résultat il est alors possible de montrer que *génériquement* toute surface de niveau d'une fonction analytique de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} possédant un minimum possède des ombilics et que leur ensemble est équivalent topologiquement à un graphe dont la caractéristique d'Euler est paire. Mais ce résultat ne peut être que générique. En particulier le dessin suivant du stratifié des ombilics n'est pas impensable et conduirait à une surface difféomorphe à S^2 ne contenant qu'un seul ombilic. Je ne possède pas actuellement un tel contre-exemple mais la démarche tend à en rechercher

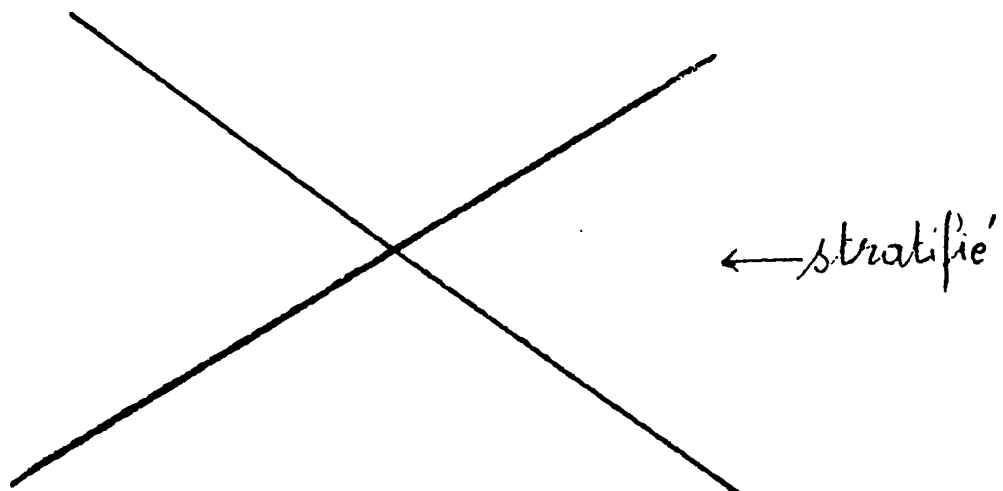
un. Une investigation systématique par ordinateur donnera peut-être un résultat en s'appuyant sur les travaux de Bonnet, Bol et Klotz ([18], [19], [20], [21]).



Une surface difféomorphe à la sphère pourrait-elle n'avoir qu'un ombilic ?

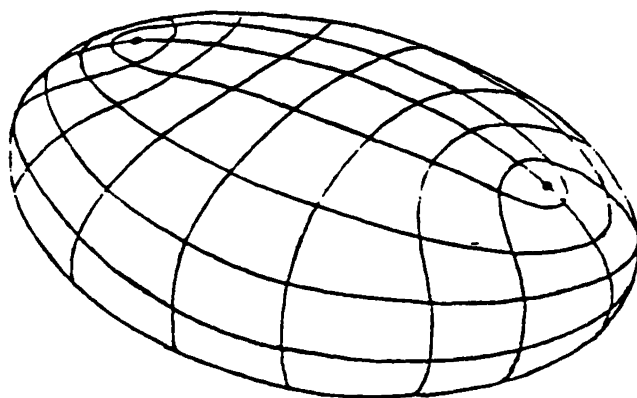
Nous disposons donc maintenant de deux approches pour traiter des ombilics sur une surface analytique : une estimation géométrique de l'indice d'un ombilic et le stratifié de Whitney des ombilics. C'est la combinaison de ces deux démarches que nous allons utiliser dans notre problème relativiste. Pour conclure voici des dessins des stratifiés de Whitney associés aux surfaces présentées en introduction de l'étude des ombilics.



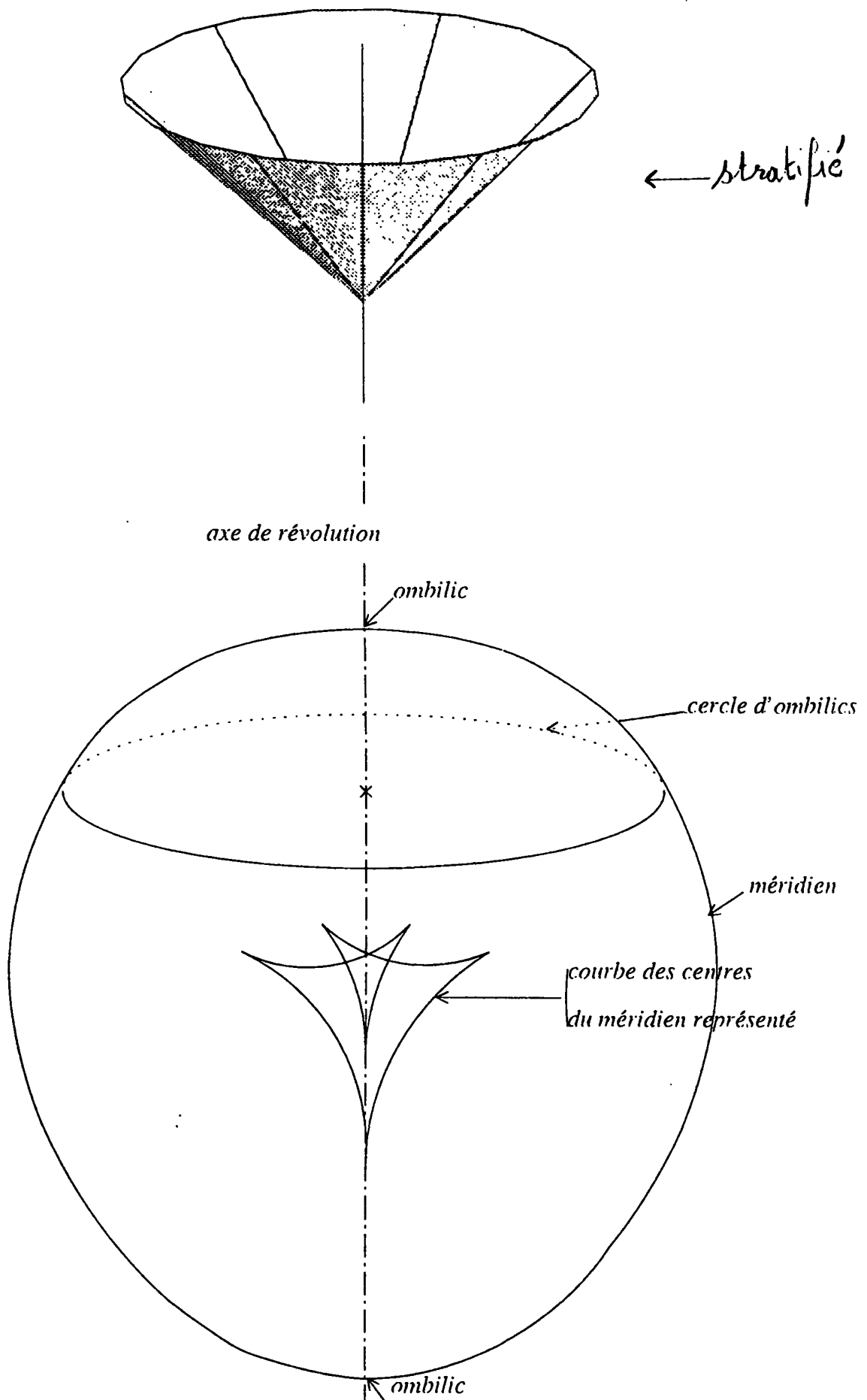


Les quatre points ombilics d'un ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ avec } a < b < c$$



(intersection de quadriques homofocales)



7. Il existe un modèle à symétrie sphérique de référence pour la conjecture de Lichnerowicz

Rappelons que nous utiliserons les 2 hypothèses supplémentaires décrites en introduction: relation analytique entre p et ρ d'une part et existence d'un seul point critique pour ξ d'autre part (ce point critique C devant être un minimum strict et positif pour ξ).

En utilisant l'expression de $f = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 - \kappa^2}{V^6}$ déjà mentionnée pour l'étude des points ombilics d'une surface, nous savons que l'ensemble $[f = 0]$ est un ensemble analytique réel, et donc un stratifié de Whitney. Si C est adhérent à une strate de dimension trois de ce stratifié de Whitney alors il existe un ouvert contenant C où l'espace est à symétrie sphérique. En effet les surfaces $\xi = C^{le}$ indéterminant leurs lignes de courbure, la métrique (voir [Eisenhart page 182]) se réduit localement autour d'un point où $\overrightarrow{\text{grad}}_3 \xi \neq \vec{0}$ à la forme:

$$ds^2 = -\xi^2 dt^2 + A(x^1, x^2, \xi) a_{BC}(x^1, x^2) dx^B dx^C + V^2(x^1, x^2, \xi) d\xi^2.$$

Les équations d'Einstein appliquées à cette forme particulière de la métrique conduisent alors à la symétrie sphérique qui s'étend à tout l'espace parce que nous sommes dans une situation analytique.

Nous devons donc traiter deux cas: ou bien C est adhérent à une strate de dimension 1 de $[f = 0]$, ou C est adhérent à au moins une strate de dimension 2. En effet il est impossible que C soit un point isolé de $[f = 0]$ parce que les surfaces $\xi = C^{le}$ difféomorphes à S^2 admettent au moins un ombilic qui annule f .

a) Si C est adhérent à au moins une strate de dimension 1 de $[f = 0]$ mais à aucune strate de dimension 2.

Rappelons l'expression de Q obtenue dans un repère mobile $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ tel que $\vec{f}_3 = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}_3 \xi}{\|\overrightarrow{\text{grad}}_3 \xi\|}$ et tel que \vec{f}_1 et \vec{f}_2 soient directions de courbure de $\xi = C^{le}$.

$$(25) \quad Q = \frac{16}{V^3 \xi^6} \left(\frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V} \right) \frac{\nabla_1 V}{V^2} \frac{\nabla_2 V}{V^2}$$

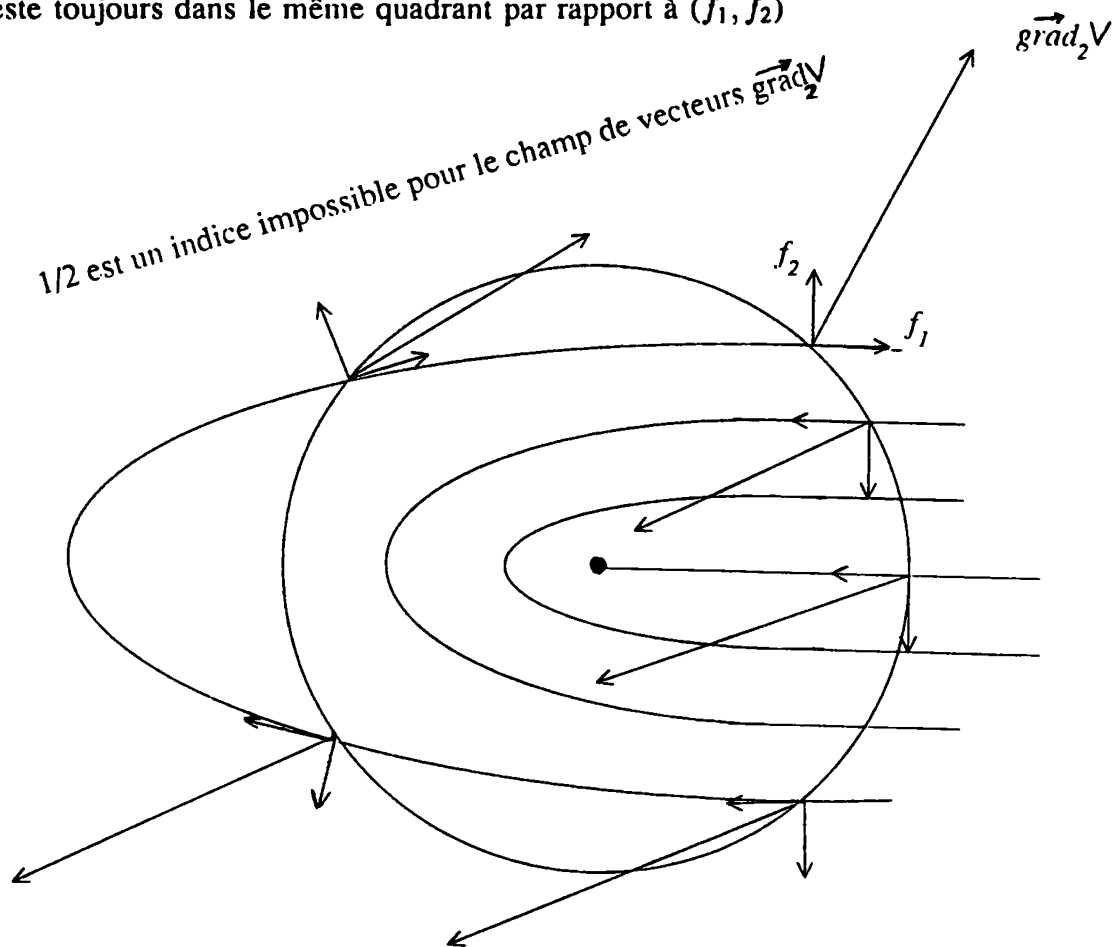
Comme $\lambda^3 - P\lambda + Q = 0$ est l'équation caractéristique pour les valeurs propres du dual du tenseur de Cotton, le coefficient Q est une fonction analytique. Donc l'ensemble $[Q = 0]$ est aussi un ensemble analytique et donc stratifié de Whitney.

** Commençons par le cas où C n'est adhérent à aucune strate de dimension 2 ou 3 de $[Q = 0]$.*

$f = 0$ implique que $Q = 0$. Plaçons nous alors en un point de $\xi = C^{\text{te}}$ qui annule f . Dans la surface $\xi = C^{\text{te}}$, ce point est un point isolé de $[Q = 0]$. Donc Q garde un signe constant dans un voisinage de ce point (sauf en ce point où Q s'annule).

L'expression (25) a été obtenue dans un repère mobile $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. Suivons par continuité ce repère mobile le long d'un chemin qui enlace une fois notre point isolé (dans le sens direct par exemple).

Comme Q garde un signe constant, si nous choisissons que \vec{f}_1 soit associé à la plus grande courbure extrinsèque du plongement de $\xi = C^{\text{te}}$ dans \mathcal{V}_3 et \vec{f}_2 à la plus petite, nous en déduisons que $(\nabla_1 V)(\nabla_2 V)$ garde un signe constant le long du chemin suivi et ne s'annule jamais. Mais cela montre que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V = (\nabla_1 V)\vec{f}_1 + (\nabla_2 V)\vec{f}_2$ reste toujours dans le même quadrant par rapport à (\vec{f}_1, \vec{f}_2)



Mais alors $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V$ effectue exactement autant de demi-tour que \vec{f}_1 ou que \vec{f}_2 le long de ce chemin. Donc les indices de $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V$ et d'une direction de courbure sont les mêmes en ce point isolé. Mais cela interdit que cet indice soit demi-entier puisque $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V$ est un champ de vecteur. Donc l'indice $\frac{1}{2}$ est exclu. Comme la somme des indices des points ombilics de la surface $\xi = \xi^{\text{te}}$ doit être égal à 2, pour une surface proche de C , il est nécessaire qu'il existe au moins un ombilic d'indice supérieur ou égal à 1. De plus l'indice de $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V$ sera aussi non nul en ce point et donc $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V$ y sera nul. Appliquons le lemme de Brian Smyth et Frederico Xavier pour le tenseur de courbure

extrinsèque Ω en ce point. Nous en déduisons qu'en ce point $\overset{*}{\nabla}_B \Omega_{AC} = \frac{1}{2}(\partial_B K)g_{AC}$ pour tout triplet (A, B, C) . L'équation de Codazzi (et $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V = \vec{0}$) conduisent alors à $\partial_A K = 0$ en ce point d'où $\overset{*}{\nabla}_A \Omega_{BC} = 0$ pour tout triplet (A, B, C) . Nous savons donc que C est adhérent à une strate de dimension un de $[P = 0]$ et que tout point de cette strate vérifie $\overset{*}{\nabla}_A \Omega_{BC} = 0$ pour tout triplet (A, B, C) . L'équation (3) permet d'obtenir

$$\partial_3(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) + (KV + \frac{1}{\xi})(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) = - \overset{*}{\nabla}^1 \partial_1 V + \overset{*}{\nabla}^2 \partial_2 V$$

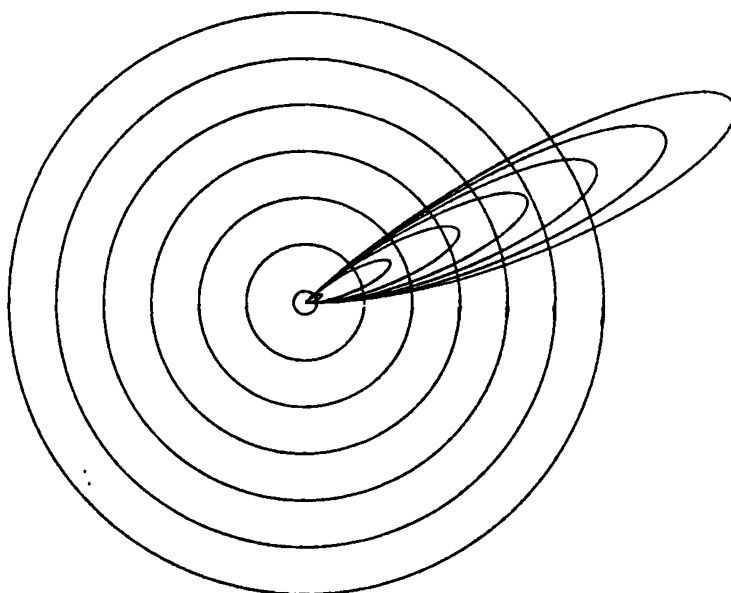
dans un système de coordonnées.

La strate de $[P = 0]$ envisagée est un ensemble analytique réel qui contient donc un arc de courbe analytique ayant C dans son adhérence. Appelons s l'abscisse curviligne le long de cet arc de courbe. Alors en ayant défini un repère mobile $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ en chaque point de cet arc de courbe tel que \vec{f}_1 et \vec{f}_2 soient directions de courbure et en appelant $\overset{*}{\nabla}_1 \overset{*}{\nabla}_1 V$ et $\overset{*}{\nabla}_2 \overset{*}{\nabla}_2 V$ les composantes de la hessienne de dimension 2 de V dans la surface $\xi = C^c$ et dans les directions de \vec{f}_1 et de \vec{f}_2 nous obtenons que

$$0 = \partial_s(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) = \sum_{A=1}^2 \partial_A(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) \frac{dx^A}{ds} + \partial_3(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) \frac{d\xi}{ds} = \partial_3(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) \frac{d\xi}{ds}$$

et donc $\overset{*}{\nabla}_1 \overset{*}{\nabla}_1 V = \overset{*}{\nabla}_2 \overset{*}{\nabla}_2 V$. Nous obtenons aussi que la hessienne de dimension 2 de V est proportionnelle au tenseur métrique.

Mais cela conduit à ce que V possède un minimum ou un maximum dans la surface $\xi = C^c$ en ce point si $\overset{*}{\Delta}_2 V \neq 0$. Mais alors $\overrightarrow{\text{grad}}_2 V$ ne pourra contenir aucun secteur elliptique comme l'exige le lemme de Brian Smyth et Frederico Xavier si $\overset{*}{\Delta}_2 V \neq 0$ et si \vec{f}_1 n'est pas monodromique.



Si \vec{f}_1 est monodromique reprenons plus en détail le lemme de Brian Smyth et Frederico Xavier.

Brian Smyth et Frederico Xavier étudient le vecteur $X = B(\partial_1)$ où $B = \Omega - (\frac{K}{2})Id$. (Ω est la deuxième forme fondamentale de la surface, Id est l'identité, K la trace de Ω , appelée courbure (extrinsèque) moyenne de la surface) et enfin ∂_1 est simplement la première direction des lignes coordonnées isothermes choisies sur un voisinage du point singulier étudié, ces coordonnées étant bien définies au point singulier, nous choisirons de plus que $g_{11} = g_{22} = 1$ au point singulier étudié. Alors dans ces coordonnées isothermes X a comme composantes :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_1^1}{2} - \frac{\Omega_2^2}{2} \\ \Omega_1^2 \end{pmatrix}$$

Nous savons que l'indice de X est le double de celui d'une des directions de courbure et donc l'indice de X est supérieur ou égal à 2. Donc la formule de Bendixon nous affirme qu'il possède au moins deux secteurs elliptiques. (Brian Smyth et Frederico Xavier n'utilisent qu'un seul de ces secteurs elliptiques et nous ferons de même). X a donc 2 trajectoires caractéristiques au moins.

Soit donc Ω une forme quadratique en dimension 2. Appelons ν_1 et ν_2 ses valeurs propres. Son expression dans un repère quelconque orthonormé est alors :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \cos^2 \theta + \nu_2 \sin^2 \theta & (\nu_1 - \nu_2) \sin \theta \cos \theta \\ (\nu_1 - \nu_2) \sin \theta \cos \theta & \nu_1 \sin^2 \theta + \nu_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

Donc dans nos coordonnées isothermes nous obtenons les composantes suivantes de X :

$$X = \begin{pmatrix} (\frac{\nu_1}{2} - \frac{\nu_2}{2}) \cos 2\theta \\ (\nu_1 - \nu_2) \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

Mais alors le long d'une trajectoire caractéristique de X nous en déduisons que θ a une limite finie déterminée. Rappelons l'expression de Q obtenue dans un repère mobile $(M, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ tel que $\vec{f}_3 = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}_3 \xi}{\|\overrightarrow{\text{grad}}_3 \xi\|}$ et tel que \vec{f}_1 et \vec{f}_2 soient directions de courbure de $\xi = C^{\text{te}}$.

$$(25) \quad Q = \frac{16}{V^3 \xi^6} \left(\frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V} \right) \frac{\nabla_1 V}{V^2} \frac{\nabla_2 V}{V^2}$$

Nous obtenons

$$Q = \left(\frac{16}{V^3 \xi^6} \right) (\nu_1 - \nu_2) (\cos \theta (\partial_1 V) + \sin \theta (\partial_2 V)) (-\sin \theta (\partial_1 V) + \cos \theta (\partial_2 V))$$

Si nous supposons que V est non dégénéré au point singulier étudié, alors à l'ordre 1, nous obtenons :

$$Q \sim \left(\frac{8 \dot{\Delta}_2 V}{V^3 \xi^6} \right) (\nu_1 - \nu_2) (\cos \theta(x) + \sin \theta(y)) (-\sin \theta(x) + \cos \theta(y))$$

Alors le long d'une trajectoire caractéristique de X nous obtenons

$$Q \sim \left(\frac{4\dot{\Delta}_2 V}{V^8 \xi^6} \right) r^2 (\nu_1 - \nu_2) \sin 2\theta$$

où $r^2 = x^2 + y^2$ Ainsi le long de chaque trajectoire caractéristique de X , $\sin 2\theta$ doit avoir le même signe.

Faisons parcourir à un point courant M le chemin

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \\ y = r \sin \psi \end{cases} \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

et pour chaque ψ , appelons $\theta(\psi)$ l'angle que fait \bar{f}_1 avec la direction ∂_1 des coordonnées isothermes employées. Nous obtenons le long de ce chemin :

$$Q \sim - \left(\frac{4\dot{\Delta}_2 V}{V^8 \xi^6} \right) r^2 (\nu_1 - \nu_2) \sin 2(\theta(\psi) - \psi)$$

Nous savons que X a au moins deux trajectoires caractéristiques, la première par exemple pour $\psi = \phi$ et la seconde pour $\psi = \phi + \gamma$. Dans un tel secteur elliptique l'angle (∂_1, X) augmente de $\gamma + \pi$ et alors $\sin 2(\theta(\psi) - \psi)$ change de signe au moins une fois, ce qui est en contradiction avec le signe constant de Q

Donc dans tous les cas $\bar{\nabla}_A \partial_B V = 0$ pour tout couple (A, B) en tout point de cet arc de courbe. En procédant comme pour f nous pourrions trouver des entiers l et m tels que la fonction g définie par

$$g = \frac{(\bar{\nabla}^A \partial_B V)(\bar{\nabla}^B \partial_A V) - \frac{(\dot{\Delta}_2 V)^2}{2}}{V^m} + \frac{(\dot{\Delta}_2 V)^2}{V^l}$$

soit une fonction analytique.

Alors la fonction $h = P + g$ est une fonction analytique et le point C est adhérent à au moins une strate de dimension 1 de $[h = 0]$. Cet ensemble est un stratifié de Whitney analytique réel. L'arc de courbe qui contient C dans sa fermeture "ne peut pas s'arrêter". Cela signifie que dans un compact cet ensemble $[h = 0]$ ne possède qu'un nombre fini de strates et qu'il ne peut être borné. Nous pouvons donc trouver une suite dénombrable d'arcs analytiques $CP_1, P_1P_2, \dots, P_kP_{k+1}, \dots$ telle que $d(C, P_k) \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$.

(La surface de raccordement entre le fluide et le vide brise l'analyticité de la solution, mais en reprenant le même raisonnement à partir de cette surface de raccordement, nous obtenons bien notre suite dénombrable d'arcs analytiques; il se pourrait qu'à la traversée de cette surface, l'arc provenant de l'intérieur de l'étoile ne coïncide pas avec l'arc provenant de l'extérieur de l'étoile mais cela ne modifie en rien le résultat qui ne nécessite ce raisonnement qu'à l'intérieur de l'étoile).

Restreignons alors les équations (6) et (7) le long d'un arc particulier $P_k P_{k+1}$ et tenons compte de $\partial_A V = \partial_A K = \dot{\Delta}_2 V = 0$ le long de cet arc. Nous obtenons :

$$\begin{cases} -\frac{\chi}{2} V(\rho - p) + \frac{\partial_3 V}{V^2 \xi} = (\partial_3 K) + V \frac{K^2}{2} \\ K - \frac{\partial_3 V}{V^2} = \frac{\chi}{2} \xi V(\rho + 3p) \end{cases}$$

le long de l'arc de courbe $P_k P_{k+1}$. Ce système différentiel est identique à celui obtenu pour la symétrie sphérique, ce qui nous donne l'existence d'un modèle à symétrie sphérique de référence.

Pour tous les autres cas.

Les mêmes ingrédients (stratifiés de Whitney, développements limités de V , Q , et f , et classification des singularités analytiques en dimension deux) permettent d'obtenir le même résultat. (Une discussion des courbes d'ombilics sur une surface doit être amorcée !)

Bibliographie

- [1] LICHNEROWICZ A. — *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955.
- [2] MASOOD-UL-ALAM A.K.M. — *The Topology of Asymptotically Euclidean Static Perfect Fluid Space-time*, Commun. Math. Phys., 108 (1987), 193–211.
- [3] AVEZ A. — *Le ds^2 de Schwarzschild parmi les ds^2 stationnaires*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 1, (3) (1964), 291–300.
- [4] MULLER ZUM HAGEN. — *On the analyticity of static vacuum solutions of Einstein's equations*, Proc. Camb. Phil. Soc., 67 (1970), 415.
- [5] ISRAËL W. — *Event Horizons in Static Vacuum Space-Times*, Physical Review, 164, (5) (1967), 1776–1779.
- [6] BEIG R. — *Gen. Rel. Grav.*, 12, (1980), 439.
- [7] LINDBLOM L. — *Some properties of static general relativistic stellar models*, J. Math. Phys., 21, (6) (1980), 1455–1459.
- [8] BEIG R., SIMON W. — *On the Spherical Symmetry of Static Perfect Fluid in General Relativity*, Preprint, Institut Für Theoretische Physik, Universität Wien, UW Th 1Ph, 14, 1990.
- [9] FEFERMAN C., GRAHAM C.R. — *Conformal Invariants*, Astérisque, hors série, 95–116, 1985.
- [10] YORK J.W. — *Covariant decomposition of symmetric tensors in the theory of gravitation*, Ann. Inst. Henri Poincaré A, XXI, (4) (1974), 319–332.
- [11] VEY J. — *Un théorème de P. Gilkey*, Publication de l'université de Grenoble, Institut Fourier.
- [12] AVEZ A. — *Characteristic classe and Weyl tensors : applications to general relativity*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 66 (1970), 265–268.
- [13] SMYTH B., XAVIER F. — *A geometric estimate of the index of an umbilic on a smooth surface*, Preprint communiqué par Marcel Berger. (Research supported by NSF Grant DMS 87-02383).
- [14] SPIVAK M. — *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 3, Second Edition. Publish of Perish, 1979.
- [15] ARNOLD V.I., YU S., IL'YASENKO. — *Ordinary Differential Equation in Dynamical System I*, Encyclopedia of Mathematical Sciences Volume 1. D.V. Anosov V.I. Arnold Eds. Springer-Verlag, 1988.
- [16] HIRONAKA H. — *Ensemble sous analytique*, Number Theory Algebraic Geometry and Commutative Algebra, In honor of Yasuo Akisuki, 1973.
- [17] BENEDETTI, RISLER. — *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann, 1990, p. 178, Theorem 3.10.4.
SULLIVAN. — *Liverpool singularities symposium*, Springer lecture notes, 192, p. 165.
- [18] BONNET O. — *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces*, Journal de Liouville 2^e série, V (1860), 153–266.
- [19] HAMBURGER H. — *Beweis einer Carathéodoryschen Vermutung*, Teil I. Ann. of Math., 41 (1940), 63–86 – Acta Math. 73 (1941), 175–228 – Acta Math. 73 (1941), 229–332.
- [20] BOL G. — *Über Nabelpunkte auf einer Eifläche*, Math. Z., 49 (1944), 389–410.
- [21] KLOTZ T. — *On G.Bol's Proof of Carathéodory's conjecture*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 277–311.

LUC ROZAY
 INSTITUT FOURIER
 Laboratoire de Mathématiques
 BP 74
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)