Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LAURENT GUILLOPÉ

# Fonctions zêta de Selberg et surfaces de géométrie finie

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 8 (1989-1990), p. 89-94

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__89_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (89–94)

# FONCTIONS ZÊTA DE SELBERG ET SURFACES DE GÉOMÉTRIE FINIE

par *Laurent GUILLOPÉ*

**1** Soit $M$ une surface hyperbolique (*i.e.* à courbure constante $-1$) de géométrie finie à bord géodésique. Le spectre des longueurs $\{l_C\}$ des lacets géodésiques (orientés, se réfléchissant suivant les lois de l'optique géométrique sur le bord) est une partie discrète de $\mathbf{R}$ dont certaines propriétés de distribution sont reflétées par les propriétés analytiques d'un produit eulérien, la fonction zêta de Selberg de la surface $M$.

Soit $Z_l^i$ défini par $Z_l^i(s) = \prod_{k\geqslant 0} 1 - (-1)^{ik} e^{-l(s+k)}$, $s \in \mathbf{C}$, où $l$ est un réel non négatif et $i$ un entier.

La fonction zêta de Selberg $Z_M$ est définie comme le produit

$$Z_M = \prod_{\{C\}} Z_M(C)$$

portant sur tous les lacets géodésiques (orientés) $C$ de $M$ avec

$$Z_M(C)(s) = e^{l_C s/8} Z^0_{2l_C}(s/2)$$

si $C$, de longueur $l_C$, est porté par le bord et

$$Z_M(C) = Z^{i_C}_{l_C}$$

sinon, pour un lacet $C$ de longueur $l_C$ et de nombre d'intersection $i_C$ avec le bord.

La croissance exponentielle du volume des boules dans le plan hyperbolique implique classiquement la convergence de ce produit infini, au moins sur le demi-plan $\{\Re e s > 1\}$.

**2** L'objet de ce texte est le théorème suivant, dont la preuve sera seulement esquissée.

THÉORÈME. — *La fonction zêta de Selberg d'une surface hyperbolique de géométrie finie et à bord géodésique admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$.

Travail effectué en partie dans le cadre du Contrat CEE GADGET n° SC1–0105–C.

3 Si $M$ est d'aire finie, ce résultat classique (et utilisé de manière essentielle dans notre traitement des surfaces d'aire infinie) est issu de la formule de traces de Selberg ([SEL]), dont on peut reformuler un cas particulier de manière multiplicative : si $M$ est compacte, suivant Sarnak ([SAR]) ou Voros ([VOR]), $Z_M$ est égal, à des facteurs $\Gamma$ près, au déterminant $\det[\Delta_M - s(1-s)]$ ($\Delta_M$ note le laplacien riemannien sur $M$, le polynôme caractéristique $\det[\Delta_M - \lambda]$ est régularisé par la méthode de la fonction spectrale $\zeta$), alors que si $M$ ne l'est pas, Effrat ([EFF]) exprime $Z_M$ en termes d'un déterminant régularisé de valeurs propres ($L^2$ et résonances) et du déterminant $\det C_M(s)$ où $C_M(s)$ est le coefficient d'entrelacement du système des séries d'Eisenstein associé à l'ensemble (fini) des pointes de $M$.

Fried ([FRI]) démontre aussi ce théorème si l'ensemble récurrent du flot géodésique est compact, *i.e.* si la surface est compacte ou d'aire infinie sans pointes. La preuve repose sur l'existence d'une partition de Markov finie, avec applications de premier retour analytiques et expansives : $Z_M$ s'exprime alors comme produit de déterminants d'opérateurs dits de transfert. Si $M$ a des pointes, la dynamique du flot géodésique est décrite par une partition de Markov dénombrable, avec des applications de premier retour dont les propriétés d'expansion ne sont pas établies. Néanmoins, pour la surface modulaire $\mathbf{H}^2/PSL_2(\mathbf{Z})$, l'ensemble des géodésiques périodiques est en correspondance biunivoque avec celui des points périodiques d'une transformation de Gauß, ce qui permet à Mayer ([MAY]) d'exprimer $Z_M$ comme produit de deux opérateurs de transfert et d'établir par ce biais le prolongement méromorphe de $Z_M$.

4 Notre étude englobe le cas des surfaces d'aire infinie avec ou sans pointes et repose sur une formule de traces à la Selberg, en s'articulant le long des trois propositions ci-dessous. Par laplacien sur une variété riemannienne $X$ à bord, on entendra, dans cet abrégé, l'extension autoadjointe $\Delta_X$ du laplacien riemannien symétrique sur $C_0^\infty(X)$, avec conditions de Neumann sur le bord (des conditions mixtes Dirichlet/Neumann exigent une modification convenable de la définition de $Z_M$ afin que la formule de traces de la proposition C reste valide).

PROPOSITION A. — *Soit $V$ une courbe régulière compacte d'une surface riemannienne $M$.*

*(i) L'opérateur $T_{M,V}(\lambda) = (\Delta_M - \lambda)^{-1} - (\Delta_{M\setminus V} - \lambda)^{-1}$ est à trace, méromorphe sur le complémentaire du spectre essentiel de $\Delta_M$.*

*(ii) Si $M$ est de topologie finie et à courbure $-1$ au voisinage de l'infini, $\tau_{M,V}(s) = \mathrm{tr}T_{M,V}(s(1-s))$, définie sur $\{\Re es > 1\}$, admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.*

PROPOSITION B. — *Soit $M$ surface riemannienne de topologie finie et hyperbolique au voisinage de l'infini, pour laquelle $C_M(s)$ note le coefficient d'entrelacement des fonctions d'Eisenstein associées au laplacien $\Delta_M$. Soit $V$ une courbe régulière compacte de $M$.*

*(i) L'opérateur $C_M(s)C_{M\setminus V}(s)^{-1} - 1$ est à trace, méromorphe (en tant*

*qu'opérateur de $L^2(\Lambda^s M(\infty))$) en $s \in \mathbf{C}$.*

*(ii) Soit $S^T_{M,V} = \{(\rho, m_\rho)\}$ l'ensemble des pôles simples $\rho$ avec résidu $m_\rho$ de $(2s-1)\tau_{M,V}(s)$ sur $\{\Re es = 1/2\}$, $S^S_{M,V} = \{(\rho, m_\rho)\}$ (resp. $S_M^{p<1/4}$) l'ensemble des pôles et zéros (avec multiplicité) de $\det[\mathcal{C}_{M\setminus V}(s)^{-1}\mathcal{C}_M(s)]$ dans le demi-plan $\{\Re es < 1/2\}$ (resp. du produit $\prod_{\lambda<1/4}(\lambda - s(1-s))^{m_M(\lambda)}$ avec $m_M(\lambda)$ multiplicité de $\lambda$ comme valeur propre de $\Delta_M$) et $S_{M,V}$ l'union de $S^S_{M,V}, S^T_{M,V}, S_M^{p<1/4}$ et $(S_{M\setminus V}^{p<1/4})^{-1}$.*

*Si $\prod_{\rho\in S_{M,V}}(s-\rho)^{m_\rho}$ désigne une fonction entière dont l'ensemble des zéros/pôles (avec multiplicité) est $S_{M,V}$, alors il existe une fonction entière $F_{M,V}$ telle que*

$$\tau_{M,V}(s) = \frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log\Big[\prod_{\rho\in S_{M,V}}(s-\rho)^{m_\rho}e^{F_{M,V}(s)}\Big].$$

PROPOSITION C. — *Soit $M$ une surface de topologie finie, à courbure constante $-1$ et $V$ une courbe géodésique compacte de $M$.*

$$\tau_{M,V}(s) = \frac{1}{2s-1}\frac{d}{ds}\log[Z_M(s)/Z_{M\setminus V}(s)].$$

5 Soit donc $M$ surface de topologie finie, hyperbolique à l'infini. Cette surface se décompose en l'union d'une partie compacte et d'un nombre fini de bouts, demi-cylindres riemanniens $(S^1 \times (A,\infty), h^2(r)d\theta^2 + dr^2)$ de deux types : pointe ($h(r) = e^{-r}$) ou entonnoir ($h(r) = \operatorname{ch} r$). Les bouts pointus sont d'aire finie, alors que les bouts évasés sont en dehors de (la projection) de l'ensemble récurrent du flot géodésique. Ainsi, les surfaces envisagées ont un ensemble géodésique récurrent d'aire finie (voire compact si $M$ n'a pas de pointes). Suivant Mazzeo–Melrose ([MAMEL]), il convient de considérer $M$ comme l'intérieur d'un espace compact $\overline{M}$ dont le bord à l'infini $M(\infty) = \overline{M} \setminus M$ ($= \{\rho = 0\}$ pour une fonction $\rho$ sur $\overline{M}$ convenablement choisie) est l'union compacte de composantes de dimension 1 (bords circulaires des entonnoirs) et de points (les pointes) ($\overline{M}$ privé des pointes est une variété à bord).

La proposition B repose sur la théorie de la diffusion (stationnaire et non stationnaire) sur les surfaces $M, M \setminus V$. On introduit, en guise de fonctions propres du spectre continu, les fonctions $E_M(s, m_\infty)(m)$, dites fonctions d'Eisenstein (en souvenir des séries d'Eisenstein avec lesquelles elles coïncident, à un facteur près, si $M$ est hyperbolique), définies comme les traces du noyau

$$(\Delta_M - s(1-s))^{-1}(m,m')\rho(m')^{\mathrm{rg}(m')-s}$$

sur la strate $M \times M(\infty)$ du bord de $\overline{M} \times \overline{M}$, où l'application rg est constante au voisinage de $M(\infty)$, égale à $1 - \dim C$ sur chaque composante $C$ de $M(\infty)$. Pour gommer au possible leur dépendance vis-à-vis du choix de la fonction $\rho$, il est utile d'introduire le fibré $\Lambda^s M(\infty)$ des $s$-densités sur $M(\infty)$ et de considérer les fonctions $E_M(s, m_\infty)(m)$ comme des sections du fibré $\Lambda^s M(\infty)$ de base $M(\infty) \times M$.

Le comportement à l'infini des sections $E_M(s)$ ($\Re es \in (0,1)$) est décrit simplement en termes des coefficients d'Eisenstein $\mathcal{C}_M$, opérateurs à noyaux sections de $\Lambda^s M(\infty) \boxtimes \Lambda^{1-s} M(\infty)$, sections qui sont (après normalisation convenable) des traces distributionnelles de $E_M(s, m_\infty)(m)$ sur le bord $M(\infty) \times M(\infty)$. Aussi le comportement du noyau de la résolvante (et de son prolongement méromorphe en $s \in \mathbf{C}$) est–il au cœur de notre présentation de la diffusion (qui s'inspire très largement des travaux de Agmon ([AGM]) et Perry ([PER])) sur ces surfaces; il est obtenu simplement en examinant celui des résolvantes associées aux cylindres (hyperboliques ou paraboliques) portant les bouts de $M$ (l'analyse en dimension supérieure est d'un tout autre ordre de difficultés).

Cette analyse des fonctions d'Eisenstein génère d'une part la décomposition spectrale de la partie absolument continue du laplacien $\Delta_M$, d'autre part les équations fonctionnelles auxquelles sont assujettis les fonctions et coefficients d'Eisenstein :

$$E_M(s) = \mathcal{C}_M(1-s)E_M(1-s)$$
$$\mathcal{C}_M(s)\mathcal{C}_M(1-s) = 1,$$

ce qui permet d'expliciter les opérateurs d'onde de la théorie de diffusion non stationnaire du couple $(\Delta_M, \Delta_{M\setminus V})$. La proposition B découle alors de principes généraux établis par Birman, Kato et Krein ([BIR],[KAT],[KRE]). Notons au passage que, si la proposition A établit le prolongement méromorphe de la trace $\tau_{M,V}$, sa preuve est incapable de préciser l'ordre de ces pôles (et la valeur de leurs résidus), ce que réalise parfaitement la proposition B en exprimant cette trace en termes d'une dérivée logarithmique.

La proposition C, basée sur les calculs mis en œuvre par Selberg pour sa formule de traces, n'est valable que pour des surfaces $M, M \setminus V$ à courbure constante négative et bord totalement géodésique.

Le théorème résulte facilement de la combinaison de ces trois propositions : une surface hyperbolique de géométrie finie est l'union de surfaces dont le prolongement méromorphe des fonctions zêta est classiquement établi ([SEL]), à savoir sa région de Nielsen (ou cœur convexe, surface d'aire finie) $N$ et un nombre fini de demi–cylindres hyperboliques qui bordent $N$ le long d'une courbe géodésique $V = \partial N$.

**6** À tout fibré plat hermitien $\xi \longrightarrow M$ (de rang $d_\xi$) est associée une fonction zêta $Z_\xi$. Les énoncés précédents conservent, *mutatis mutandis*, leur validité pour des fibrés hermitiens avec connection, plats à l'infini. S'introduit notamment un espace singulier $\overline{\xi}$, fibré sur la compactification $\overline{M}$ : sa partie à l'infini $\xi(\infty)$ est un fibré de rang $d_\xi$ sur les composantes de dimension 1 de $M(\infty)$ et de rang $d_\xi(p_\infty)$ sur une pointe $p_\infty$ si $d_\xi(p_\infty)$ est la multiplicité de la valeur propre 1 de l'holonomie de $\xi$ pour un lacet autour de cette pointe. Les fonctions d'Eisenstein $E_\xi(s)$ sont définies comme des sections du fibré $(\Lambda^s M(\infty) \otimes \xi(\infty)) \boxtimes \xi^*$ de base $M(\infty) \times M$.

**7** Nous renvoyons à [GUIL] pour les démonstrations et nous contenterons de clore ce texte par quelques questions.

**8** La fonction zêta $Z_M$ est d'ordre 2 (si $Z_M$ a des pôles, cela signifie qu'elle est quotient de deux fonctions entières d'ordre 2) si $M$ est d'aire finie (par la voie spectrale, *cf.* [VEN]) ou de volume infini sans pointes (par la voie dynamique, *cf.* [FRI]); qu'en est-il en général?

Quel est le type de croissance du déterminant $\det[\mathcal{C}_{M\setminus V}^{-1}(s)\mathcal{C}_M(s)]$? Quelles relations entre zéros et pôles de ce déterminant et les pôles des résolvantes $R_M(s)$, $R_{M\setminus V}$?

Y-a-t-il une possibilité d'utiliser ces méthodes en dimension supérieure; le premier cas d'intéret est celui des variétés de dimension 3 associées à des groupes quasi-fuchsiens, la géométrie y est plus élaborée : le cœur convexe (compact en l'absence de pointes) est bordé par une surface hyperbolique plissée le long d'une lamination géodésique.

Pour une surface supposée à courbure constante seulement au voisinage de l'infini (qui ne donne plus lieu à une formule de traces à la Selberg), le domaine de méromorphie de $Z_M$ contient un voisinage du demi-plan $\{\Re es \geqslant h_M\}$, où $h_M$ note l'entropie du flot géodésique (*cf.* par exemple [POL]). Ce voisinage serait-il égal à $\mathbf{C}$ tout entier?

Par un argument taubérien basé sur le théorème de Wiener-Ikehara, on peut préciser le comportement asymptotique de la fonction de comptage associée au spectre des longueurs des géodésiques périodiques $\pi_M(l) = \#\{C, l_C \leqslant l\}$ lorsque le bas du spectre $\lambda_M$ du laplacien $\Delta_M$ est constitué d'une valeur propre $\lambda_M$ (nécessairement simple alors) :

$$\pi_M(l) \sim \frac{e^{h_M l}}{h_M l}, l \to +\infty$$

où $h_M$, entropie du flot géodésique sur $M$ ($h_M > 1/2$ alors), détermine $\lambda_M$ suivant $\lambda_M = h_M(1 - h_M)$. Peut-on préciser cet asymptotique par une estimation du reste, comme c'est le cas pour des surfaces d'aire finie? Pour les surfaces à spectre purement continu (*i.e.* les surfaces sans pointes, d'aire infinie et à entropie au plus égale à $1/2$), un argument de dynamique symbolique permet à Lalley ([LAL]) d'obtenir l'asymptotique précédent; de quelle manière l'obtenir par la théorie spectrale?

Si $\alpha$ est une classe d'homologie de $M$ et $\pi_M^\alpha$ la fonction de comptage associée à l'ensemble des géodésiques homologues à $\alpha$, l'asymptotique de $\pi_M^\alpha$ est établi dans le cas $M$ compact par Katsuda-Sunada ([KS]) et Phillips-Sarnak ([PS]) et celui d'aire finie par Epstein ([EPS]) en analysant les propriétés spectrales de la famille $(\Delta_\xi)$ où $\xi$ parcourt la famille des fibrés en droites plats de base $M$ (ou de manière équivalente, le tore des caractères de l'homologie $H^1(M, \mathbf{Z})$). Peut-on mener un travail similaire pour $M$ d'aire infinie?

## Références


[1] AGMON S. — *On the spectral theory of the laplacian on non-compact hyperbolic manifolds*, Séminaire d'équations aux dérivées partielles, Saint-Jean de Monts, 1986.

[2] BIRMAN M., KREIN M. — *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **144** (1962), 475-478.

[3] EFFRAT I. — *Determinants of laplacians on surfaces of finite volume*, Commun. Math. Phys., **119** (1988), 443-451.

[4] EPSTEIN C. — *Asymptotics for closed geodesics in a homology class, the finite volume case*, Duke Math. J., **55** (1987), 717–757.

[5] FRIED D. — *Zeta Functions of Ruelle and Selberg I*, Ann. École Normale Sup., **19** (1986), 491–517.

[6] GUILLOPÉ L. — *Fonctions zêta de Selberg et surfaces de géométrie finie*, à paraître, 1990.

[7] KATO T. — *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1966.

[8] KATSUDA A., SUNADA T. — *Homology and closed geodesics in a compact riemann surface*, Amer. J. Math., (), .

[9] KREIN M. — *On the trace formule in the theory of perturbation*, Mat. Sb, **33** (1953), 597–626.

[10] LALLEY S. — *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, noneuclidian tesselations and their fractal limits*, Acta Math., **163** (1989), 1–55.

[11] MAYER D. — *Selberg's zeta function for $PSL(2,\mathbf{Z})$ via the thermodynamic formalism for the continued fraction map*, prépublication, 1990.

[12] MAZZEO R., MELROSE R. — *Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature*, J. Func. Anal., **75** (1987), 260–310.

[13] PERRY P. — *The laplace operator on a hyperbolic manifold. II. Eisenstein series and the scattering matrix*, J. Reine Angew. Math, **398** (1989), 67–91.

[14] PHILLIPS R., SARNAK P. — *Geodesics in homology classes*, Duke Math. J., **55** (1987), 287–297.

[15] POLLICOT M. — *Analytic extensions of the zeta functions for surfaces of variable negative curvature*, J. Differential Geo., **29** (1989), 699–706.

[16] SARNAK P. — *Determinants of laplacians*, Commun. Math. Phys., **110** (1987), 113–120.

[17] SELBERG A. — *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Ind. math. Soc, **20** (1956), 47–87.

[18] VENKOV A. — *Spectral theory of automophic functions*, Proc. Steklov Inst. Math, **153** (1981), 1–162.

[19] VOROS A. — *Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function*, Commun. Math. Phys., **110** (1987), 439–465.

Laurent GUILLOPÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)