

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES COURTOIS

**La première valeur propre non nulle du laplacien des  $p$ -formes**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 8 (1989-1990), p. 73-75

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1989-1990\\_\\_8\\_\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__73_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE NON NULLE DU LAPLACIEN DES $p$ -FORMES

par Gilles COURTOIS

Cet exposé est un résumé de [C-C] dans lequel les auteurs étudient les relations entre l'existence de petites valeurs propres non nulles pour le laplacien des  $p$ -formes et la géométrie d'une variété riemannienne compacte  $M$ .

Cette étude est motivée par le cas du laplacien des fonctions (*i.e.*  $p = 0$ ) où les inégalités de Buser et Cheeger permettent de comprendre l'allure d'une variété  $M$  dont la première valeur propre  $\lambda_1(M)$  est petite. Dans ce cas, en effet,  $M$  ressemble à une haltère, ce qui veut dire que la constante isopérimétrique de Cheeger  $h(M)$  est elle aussi petite.

La constante de Cheeger est définie par

$$(0.1) \quad h(M) = \inf \left[ \text{vol } \partial\Omega / \text{vol } \Omega, \text{ vol } \Omega \leq \text{vol } M/2 \right]$$

et nous avons les inégalités suivantes, *cf.* [Bu 1], [Bu 2], [CR].

$$(0.2) \quad \frac{1}{4} h^2(M) \leq \lambda_1(M) \leq c_1 (\delta h(M) + h^2(M))$$

où  $c_1$  est une constante qui dépend de la dimension de  $M$  et  $\delta$  un minorant de la courbure de Ricci. Soit  $\lambda_1(p, M)$  la première valeur propre non nulle du laplacien  $\Delta = d\delta + \delta d$  agissant sur les  $p$ -formes différentielles de  $M$ .

Rappelons que  $\delta$  est l'adjoint de la différentielle extérieure  $d$  par rapport au produit scalaire  $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \beta$  où  $*$  est l'opérateur de Hodge.

Contrairement au cas des fonctions, la constante de Cheeger  $h(M)$  ne permet pas de minorer  $\lambda_1(p, M)$  si  $1 \leq p \leq n - 1$ ,  $n = \dim M$ .

**THÉORÈME 1 ([C-C]).** — *Soit  $m \geq 3$  et  $1 \leq p \leq (m - 1)$  des entiers. Il existe une famille  $M_t = (M, g_t)$ ,  $0 < t \leq 1$  de variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  et de courbures sectionnelles et diamètre bornés telles que*

(a)  $h(M_t) \geq c > 0$ ,  $c$  indépendant de  $t$ .

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_1(p, M_t) = 0$ .

Les exemples du théorème 1 sont obtenus par des effondrements d'une variété  $M$  sur une variété  $N$  ayant plus de topologie que  $M$ , (cf. [PA], [C-G 1], [C-G 2] pour des définitions précises d'un effondrement). Par exemple les métriques de Berger  $g_t$  sur  $S^{2n+1}$  réalisent un effondrement de  $S^{2n+1}$  sur  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , (cf. [C-G], exemple 1.2) et  $\lambda_1(S_{g_t}^{2n+1}, 2k)$  est arbitrairement petit, pour  $1 \leq k \leq (n-1)$ .

Ces exemples obtenus par effondrements sont en fait les seuls exemples de variétés à courbure et diamètre bornés ayant une petite valeur propre (non nulle). En effet, soit  $\mathcal{M}(n, a, b)$  l'ensemble des variétés riemanniennes de courbure sectionnelle et diamètre bornés respectivement par  $a$  et  $b$ . On a le :

**THÉORÈME 2.** — *Il existe  $\varepsilon = \varepsilon(n, a, b) > 0$  tel que si  $M \in \mathcal{M}(n, a, b)$  et  $\lambda_1(M, p) < \varepsilon$  pour un entier  $0 < p < n$ , alors  $M$  admet des effondrements.*

*Remarque.* — La propriété pour  $M$  d'admettre des effondrements est une propriété topologique de  $M$ , cf. [C-G 1], [C-G 2].

*Plan de preuve du théorème 2.* — Soit  $\mathcal{M}(n, a, b, c)$  l'ensemble des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , à courbure et diamètre majorés par  $a$  et  $b$  respectivement et à rayon d'injectivité minoré par  $c$ . Un théorème de Peters, [Pe], assure la relative compacité de  $\mathcal{M}(n, a, b, c)$  dans la topologie  $C^1$  des métriques (modulo l'action des difféomorphismes). La continuité de  $\lambda_1(p, M)$  par rapport à la topologie  $C^1$  sur l'ensemble des métriques entraîne que  $\lambda_1(p, M)$  est minoré sur l'adhérence de  $\mathcal{M}(n, a, b, c)$ . Le fait que  $\lambda_1(p, M)$  soit petit pour  $M \in \mathcal{M}(n, a, b)$  entraîne donc que le rayon d'injectivité de  $M$  est petit. Le théorème 2 découle alors du théorème du rayon critique de Cheeger-Gromov, cf. [C-G 2].

## BIBLIOGRAPHIE

- [BU 1] BUSER P. — *On Cheeger inequality  $\lambda_1 \geq h^2/4$* , Proc. of Symp. in Pure Math., **36** (1980), 29–77.
- [BU 2] BUSER P. — *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Série 4, **15** (1982), 213–230.
- [C-C] COURTOIS G., COLBOIS B. — *A note on the first non zero eigenvalue of the laplacian acting on  $p$ -forms*, Manuscripta Math., **68** (1990), 143–160.
- [C-G 1] CHEEGER J., GROMOV M. — *Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I*, J. Diff. Geom., **23** (1986), 309–346.
- [C-G 2] CHEEGER J., GROMOV M. — *Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded II*, Preprint.
- [CR] CHEEGER J. — *A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian problems in analysis*, A symposium in honour of Bochner, Princeton University Press, N.J. (1970), 195–199.
- [PA] PANSU P. — *Dégénérescence des variétés riemanniennes, d'après J. Cheeger et M. Gromov*, Astérisque **121**, 1985.
- [PE] PETERS S. — *Convergence of riemannian manifolds compositio*, Math., **62** (1987), 1–16.

Gilles COURTOIS  
INSTITUT FOURIER  
Laboratoire de Mathématiques  
BP 74  
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)