

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

COLETTE ANNÉ

## **Majoration de multiplicité pour l'opérateur de Schrödinger**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 8 (1989-1990), p. 53-62

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1989-1990\\_\\_8\\_\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__53_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MAJORATION DE MULTIPLICITÉ POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER

par *Colette ANNÉ*

### INTRODUCTION

Toute métrique  $g$  sur une variété  $M$ , compacte ou ouverte, définit un opérateur de Laplace  $\Delta_g$ . Pour chaque fonction  $V$  de classe  $C^\infty$  sur la variété, on peut alors définir un opérateur de Schrödinger  $H = \Delta_g + V$ . En choisissant le domaine de  $H$  on est assuré que  $H$  est elliptique autoadjoint et à résolvante compacte; il admet alors un spectre discret minoré :

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$$

(Le théorème de Courant, cité plus bas, nous dit en particulier que la première valeur propre est simple.)

Si  $M$  est compacte le domaine  $\mathcal{D}$  de  $H$  est l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^2(M)$  des fonctions de carré intégrable ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2. Si  $M$  est ouverte le domaine de  $H$  est soit

$$\mathcal{H}_D^2(M) = \{f \in \mathcal{H}^2(M) / f|_{\partial M} = 0\}$$

qui correspond aux conditions de Dirichlet, soit

$$\mathcal{H}_N^2(M) = \left\{f \in \mathcal{H}^2(M) / \frac{\partial}{\partial \vec{n}} f|_{\partial M} = 0\right\}$$

qui correspond aux conditions de Neumann ( $\vec{n}$  est la normale au bord).

Comme  $H$  est elliptique  $E(\lambda) = \{f \in \mathcal{D} / Hf = \lambda f\}$  est toujours de dimension finie. Notons  $m(\lambda) = \dim E(\lambda)$  la multiplicité de  $\lambda$ .

La question est alors de savoir s'il y a des majorations a priori (topologiques) de  $m(\lambda)$ . Gérard Besson, en affinant un résultat de Cheng a donné un majorant de  $m(\lambda_k)$  linéaire en  $k$  et en le genre d'une *surface compacte* (voir [B] et [C]).

Colin de Verdière a montré qu'en dimension supérieure ou égale à 3 il n'y a pas de telle majoration (on peut construire sur une variété de dimension supérieure à 3 un opérateur de Schrödinger dont  $\lambda_k$  a une multiplicité arbitrairement grande, voir [CdV]). Il a par ailleurs conjecture que la multiplicité maximale de  $\lambda_1$  était liée au nombre chromatique d'une surface compacte, c'est-à-dire quelque chose en racine carrée du genre.

Nous présentons ici les résultats de Nadirashvili, [N], sur cette question (ces résultats ont partiellement été donné aussi par Colin de Verdière) Nadirashvili donne un résultat sur les surfaces compactes qui améliore légèrement celui de Besson :

**THÉORÈME 0.**

sur $S^2$	$m(\lambda_k) \leq 2k + 1$
sur $\mathbb{R}P^2$	$m(\lambda_k) \leq 2k + 3$
sur $\pi^2$ tore	$m(\lambda_k) \leq 2k + 4$
sur $K^2$ bouteille de Klein	$m(\lambda_k) \leq 2k + 3$
sur $M$ de caractéristique d'Euler	$\chi(M) < 0$
	$m(\lambda_k) \leq 2(k + 2 - \chi(M)) - 1$ .

La démonstration de ce théorème est présentée dans [An]. Nous nous intéressons ici aux résultats concernant les ouverts bornés de  $\mathbb{R}^2$ , en détaillant les points restés obscurs dans l'article.

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $U$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $H = \Delta_g + V$  un opérateur de Schrödinger sur  $U$  alors son spectre  $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots$  avec condition de Dirichlet ou de Neumann vérifie*

$$m(\lambda_i) \leq 2i + 1 .$$

Notons  $\lambda_{i|i \geq 0}^D$  et  $\lambda_{i|i \geq 0}^N$  le spectre pour Dirichlet et Neumann. On a les raffinements suivants pour des Laplaciens ( $V = 0$ ).

**THÉORÈME 2.** — *Si  $U$  est difféomorphe à un disque et est muni d'une métrique à courbure  $K \leq 0$  alors, pour  $\Delta_g$ ,*

$$m(\lambda^N, 1) \leq 2 .$$

**THÉORÈME 3.** — *Si  $U$  est difféomorphe à un disque et est muni d'une métrique à courbure négative, admet une symétrie d'ordre  $n \geq 3$  alors, pour  $\Delta_g$ ,*

$$m(\lambda_1^N) = 2 .$$

**THÉORÈME 4.** — *S'il existe un ouvert  $U$ , non simplement connexe, qui vérifie, pour  $\Delta_g$ ,*

$$m(\lambda_1^N) = 3 .$$

*Remarque.* — Colin de Verdière a montré par des méthodes de transversalité  $m(\lambda_1) \leq 3$  et aussi le théorème 3.

### DÉMONSTRATIONS

Elles utilisent un certain nombre de lemmes qui seront prouvés dans l'appendice. Donnons tout de suite les théorèmes importants utiles ici :

**THÉORÈME D'ARONSZAJN.** — *Une solution d'une équation elliptique du deuxième ordre, nulle en un point ainsi que toutes ses dérivées (à tous ordres) est nulle.*

Voir [A].

**THÉORÈME DE COURANT.** — *Soit  $H$  un opérateur de Schrödinger sur une variété  $M$  compacte ou ouverte avec conditions de Dirichlet ou Neumann et  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \dots$  son spectre. Si  $F$  est une fonction propre de  $H$  pour la valeur propre  $\lambda_k$ , alors  $M - \{F = 0\}$  a au plus  $k + 1$  composantes connexes.*

*En conséquence une fonction propre relative à  $\lambda_0$  ne peut changer de signe et  $\lambda_0$  est forcément de multiplicité 1.*

Voir [CH], p. 452 et [An] pour une démonstration complète.

**THÉORÈME DE CHENG (variante).** —  *$M$  est de dimension 2. Si  $F$  est fonction propre de l'opérateur de Schrödinger  $H$  et s'annule à l'ordre  $N$  en un point  $x_0$  (c'est-à-dire dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $N - 1$  sont nulles en ce point); choisissons une carte  $(x_1, x_2)$  centrée en  $x_0$  et telle que  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$  soit orthonormée en ce point;  $F(x) = p_N(x) + O(|x|^{N+1})$ ,  $p_N$  est alors un polynôme homogène de degré  $N$ , harmonique (pour  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ). Si  $p_N$  est non nul alors  $F$  est  $R$ -équivalente à  $p_N$  : il existe un difféomorphisme local  $\varphi$  qui fixe 0 et est tangent en ce point à Id tel que  $f = p_N \circ \varphi$ .*

*En conséquence la ligne nodale  $\{F = 0\}$  est en ce point tangente à une étoile équiangulaire à  $2N$  branches.*

Ce théorème est en fait la compilation de plusieurs résultats essentiellement dus à Cheng, voir [C] et [An].

### INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES

Soit  $\mathcal{U}$  un domaine simplement connexe muni d'une métrique à courbure  $K \leq 0$ . Alors :

$$(1) \quad \lambda_0^D \geq \frac{\pi j_0^2}{\text{Vol}(\mathcal{U})}$$

si  $j_0$  est le premier zéro de la fonction de Bessel  $J_0$ .

$$(2) \quad \lambda_1^N \leq \frac{\pi j_1^2}{\text{Vol}(\mathcal{U})}$$

si  $j_1'$  est le premier maximum de la fonction de Bessel  $J_1$ .

*Commentaires.* —

(1) est une inégalité du type Faber-Krahn qui compare  $\lambda_0^D$  à la première valeur propre de Dirichlet du disque euclidien de même volume,  $\mathcal{U}$  n'a pas besoin d'être simplement connexe. Elle est due à Peetre.

(2) est une conséquence du mini-max. Elle compare  $\lambda_1^N$  à la deuxième valeur propre de Neumann du disque euclidien de même volume. Elle est due à Nadirashvili, et est démontrée dans l'appendice.

Remarquons enfin que pour des métriques euclidiennes ces inégalités sont bien connues. (1) a été démontré en toute dimension par Polya et Szegö et (2) par Weinberger (sans que  $\mathcal{U}$  soit nécessairement simplement connexe).

La généralisation à  $K \leq 0$  utilise le fait que si  $g$  est une métrique à courbure négative ou nulle sur la boule de rayon  $\alpha$  et de même volume que celui de la boule euclidienne de rayon  $\alpha$  alors :

$$\forall r, 0 \leq r \leq \alpha, \text{Vol}_g(B(0, r)) \leq \text{Vol}(B(0, r)) = \pi r^2.$$

Une conséquence de (1) et (2) est :

$$\lambda_0^D > \lambda_1^N.$$

On trouve en effet dans les bons livres (par exemple [PS], p. 3) les développements :  $j_0 \simeq 2,4048 \dots$  et  $j_1' \simeq 1,8412 \dots$ . ■

### 1. Démonstration du théorème 1.

Gardons les notations de l'énoncé; soit  $x_0 \in \mathcal{U}$ ; si  $m(\lambda_i) \geq 2i + 2$  il existe une fonction propre non nulle  $u \in E(\lambda_i)$  qui s'annule à l'ordre  $N \geq i + 1$  en  $x_0$ . En effet, Gérard Besson a montré que pour une fonction qui vérifie une équation du deuxième ordre elliptique  $Hu = \lambda_i u$ , il suffit de  $2i + 1$  conditions pour l'annuler à l'ordre  $i + 1$  :

$$i = 0 : u(x_0) = 0$$

$$i = 1 : u(x_0) = 0, \frac{\partial}{\partial x_1}(x_0) = 0, \frac{\partial}{\partial x_2}(x_0) = 0$$

ensuite pour chaque ordre on ajoute deux conditions :  $\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(x_0) = 0$  et  $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} u(x_0) = 0$ , les autres conditions étant entraînées par l'équation  $Hu = \lambda_i u$ , voir [B].

Prenons alors un petit disque  $Q$  autour de  $x_0$ . La ligne nodale de  $u$  coupe  $\partial Q$  en  $2N$  points  $b_1 \dots b_{2N}$ , d'après le théorème de Cheng.

Prenons entre les  $b_j$  des points  $a_1 \dots a_{2N}$ . Alors (th. de Cheng)  $u(a_j)u(a_{j+1}) < 0$ ,  $\forall j, 1 \leq j \leq 2N - 1$ .

Soit alors  $G_j$  la composante connexe de  $\mathcal{U} - \{u = 0\}$  qui contient  $a_j$ . On montre par récurrence sur  $N$  :

LEMME 1. — *Au moins  $N + 1$  des  $G_j$  sont distincts.*

Ceci contredit le théorème de Courant ( $N + 1 \geq i + 2$ ).

## 2. Démonstration du théorème 2.

Notons  $0 = \lambda_0^N < \lambda_1^N \leq \dots$  le spectre du Laplacien de Neumann de  $\mathcal{U}$ . Pour montrer  $m(\lambda_1^N) \leq 2$  il faut deux lemmes.

LEMME 2. — *Soit  $u$  une fonction propre de valeur propre  $\lambda_1^N$  alors  $u|_{\partial\mathcal{U}}$  change de signe et la ligne nodale de  $u$  est une courbe lisse dont les extrémités sont sur  $\partial\mathcal{U}$ .*

LEMME 3. — *Si  $m(\lambda_1^N) = 3$  il existe  $u \in E(\lambda_1^N)$  non nulle qui s'annule 3 fois sur  $\partial\mathcal{U}$ .*

Donc  $m(\lambda_1^N) \leq 2$  car d'après le Lemme 2 une fonction propre de  $\lambda_1^N$  ne peut s'annuler que deux fois sur le bord.

## 3. Démonstration du théorème 3.

Supposons de plus que  $\mathcal{U}$  admet une rotation  $r$  d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  comme isométrie ( $n \geq 3$ ).

Si  $m(\lambda_1^N) = 1$  et  $u$  est une fonction propre de  $\lambda_1^N$  alors  $u \circ r$  doit être colinéaire à  $u$  et donc la ligne nodale doit être invariante par  $r$  ce qui d'après le Lemme 2 est impossible si  $n > 2$ .

## 4. Démonstration du théorème 4.

Considérons  $Q_\alpha$  pour  $0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$  :

$$Q_\alpha = \mathcal{U} - \{(r, \varphi)/r = \frac{1}{2}, 0 \leq 3\varphi \leq 3\alpha \bmod 2\pi\}$$

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{R}^2 / |z| < 1\}$$

$Q_\alpha$  est invariant par la rotation  $r$  d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ . Notons  $G$  le groupe  $\{e, r, r^2\}$ .

PROPOSITION. — *Le spectre du Laplacien de Neumann de  $Q_\alpha$ ,  $0 = \lambda_0(\alpha) \leq \lambda_1(\alpha) \dots$  est continu en  $\alpha$ .*

En effet les valeurs propres sont décroissantes en  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \alpha_2 &\implies Q_{\alpha_1} \subset Q_{\alpha_2} \implies H^1(Q_{\alpha_1}) \subset H^1(Q_{\alpha_2}) \\ &\implies \lambda_k(\alpha_2) \leq \lambda_k(\alpha_1), \end{aligned}$$

d'après le mini-max.

Par ailleurs, si  $\alpha_n | n \in \mathbb{N}$  est une suite croissante qui converge vers  $\alpha$  et  $\varphi_n$  des fonctions propres normées de  $Q_{\alpha_n}$  de valeur propre  $\lambda_k(\alpha_n)$ , et  $\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\alpha_n)$ . On voit facilement que la suite  $\varphi_n$  étant bornée dans  $H_1(Q_\alpha)$  on peut en extraire, en passant par la topologie faible une sous-suite qui converge vers une fonction  $\varphi$  qui se révèle être fonction propre de  $Q_\alpha$  pour  $\lambda_k$ . On fait un raisonnement analogue pour la continuité à droite.

Supposons maintenant que  $\forall \alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}] \dim E(\lambda_1(\alpha)) \leq 2$ .

(1) Si  $\dim E(\lambda_1(\alpha)) = 2$  alors  $\forall u \in E(\lambda_1(\alpha)) - \{0\}$  si  $u(0) = 0$ , et  $u$  et  $u \circ r$  forment une base de  $E(\lambda_1(\alpha))$ .

En effet  $u$  et  $u \circ r$  ne peuvent être colinéaire car la ligne nodale de  $u$  est simple en 0 et ne peut être invariante par  $r$ .

(1')  $\dim E(\lambda_1(\alpha)) = 2 \Rightarrow \exists u \in E(\lambda_1(\alpha)) - \{0\}; u(0) = 0$ . Donc  $\forall v \in E(\lambda_1(\alpha))$ ,  $v$  est combinaison linéaire de  $u$  et  $u \circ r$  et donc  $v(0) = 0$ .

(2) Soit maintenant  $\mathcal{E} = \{ \alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}[; \dim E(\lambda_1(\alpha)) = 1 \}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \lambda_1(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \lambda_2(\alpha) = \lambda_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \neq 0,$$

donc  $\mathcal{E}$  n'est pas vide.  $0 \in \mathcal{E}^c$  donc  $\mathcal{E}^c$  n'est pas vide.

$\mathcal{E}$  est ouvert d'après la continuité du spectre.  $\mathcal{E}$  est aussi fermé : soit  $\alpha_n | n \in \mathbb{N}$  une suite de  $\mathcal{E}$  qui converge vers  $\alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ .

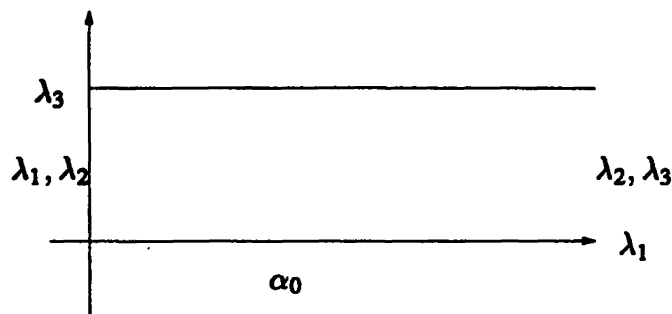
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists v_n \in E(\lambda_1(\alpha_n)), \|v_n\| = 1.$$

$v_n$  et  $v_n \circ r$  sont proportionnels donc  $v_n(0) \neq 0$ . Mais  $r(0) = 0$  donc  $v_n = v_n \circ r$ .

Soit  $\beta$  une borne supérieure des  $\alpha_n$ ,  $v_n$  est une suite bornée de  $H^1(Q_\beta)$  on peut donc en extraire une sous-suite  $\alpha_{n_k}$  qui converge vers  $v$  qui est fonction propre de  $Q_\alpha$  pour  $\lambda_1(\alpha)$ . Mais  $\lim_{k \rightarrow \infty} (L_2(u))v_{n_k} = v$  donc  $v = v \circ r$  et  $v \neq 0$  et donc d'après le point (1) ci-dessus

$$\dim (E(\lambda_1(\alpha))) = 1.$$

Tout ceci est incompatible donc  $\exists \alpha_0 \in ]0, \frac{2\pi}{3}[, \dim E(\lambda_1(\alpha_0)) = 3$ . La courbe des valeurs propres est la suivante :



## APPENDICE

I. LEMME 1. —  $a_1 \cdots a_{2N}$  sont des points sur le bord d'un petit disque  $Q$  centré en  $x_0$ ,  $u(x_0) = 0$ ,  $u$  fonction propre de  $\lambda_i$ , pour l'opérateur de Schrödinger  $H$  sur l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $u(a_j)u(a_{j+1}) < 0$ .

$G_j$  est la composante connexe de  $U \setminus \{u = 0\}$  qui contient  $a_j$ . Alors il y a au moins  $N + 1$   $G_j$  distincts.

*Démonstration.* — Par récurrence sur  $N$ .

Si  $N = 1$  sur  $G_1$ ,  $u$  est du signe de  $u(a_1)$   
sur  $G_2$ ,  $u$  est du signe de  $u(a_2)$   
donc  $G_1 \neq G_2$ .

Si la proposition est vraie jusqu'au rang  $N$ . Supposons que les  $a_i$  sont au nombre de  $2(N + 1)$ , si les  $G_k$  sont tous distincts  $N \geq 1 \Rightarrow 2N \geq N + 1$  c'est démontré.

Si  $\exists j < k$ ,  $G_j = G_k$  alors  $u(a_k) \cdot u(a_j) > 0 \Rightarrow k - j \geq 2$ . Soit alors  $A = \{j, j + 1, \dots, k - 1\}$ ,  $B = \{k, \dots, 2(N + 1), 1, \dots, j - 1\}$ .

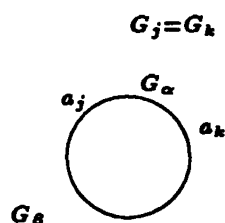
$$\begin{aligned} \#A &= k - 1 \geq 2, & \#A &\leq 2N \\ \#B &= 2N + 2 - k + j \leq 2N, & \#B &\geq 2 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence au moins  $\frac{k-1}{2} + 1$  des  $G_\alpha | \alpha \in A$  sont distincts et  $N - \frac{(k-j)}{2} + 2$  des  $G_\beta | \beta \in B$  sont distincts.

Enfin, si  $\alpha \in A - \{j\}$ ,  $G_\alpha$  est intérieur à une ligne tracée dans  $G_j$  allant de  $a_j$  à  $a_k$ . Si  $\beta \in B - \{k\}$ ,  $G_\beta$  en est extérieur.  $G_j = G_k$  est donc le seul domaine commun possible entre les  $G_\alpha$  et les  $G_\beta$ ; et donc au moins

$$\left(\frac{k-j}{2} + 1\right) + \left(N - \frac{(k-j)}{2} + 2\right) - 1 = N + 2$$

des  $G_i$  sont distincts.



II. LEMME 2. —  $U$  est simplement connexe et muni d'une métrique à courbure négative et  $u$  est fonction propre du Laplacien de  $U$  avec condition de Neumann pour  $\lambda_1(N)$ . Alors la ligne nodale de  $u$  est une courbe lisse dont les extrémités sont situées dans le bord  $\partial U$  de  $U$ .



*Démonstration.* —

a) Si la ligne nodale de  $u$  se refermait il existerait un domaine  $G \subset \mathcal{U}$  tel que  $\lambda_1^N = \lambda_0^D(G)$  première valeur propre du problème de Dirichlet de  $G$ . Mais  $\lambda_0^D(G) \geq \lambda_0^D(\mathcal{U})$  d'après le minimax et donc  $\lambda_1^N \geq \lambda_0^D$  mais ceci est faux d'après les inégalités isopérimétriques.

b) Si il existe  $x_0 \in \mathcal{U}$ ,  $u(x_0) = 0$  et  $d_{x_0}u = 0$  alors la ligne nodale de  $u$  aurait au moins 4 branches en  $x_0$ , à cause de a) elles ne pourraient se recouper et  $\mathcal{U} - \{u = 0\}$  aurait au moins 4 composantes connexes, ce qui contredit le théorème de Courant.

III. LEMME 3. —  $\mathcal{U}$  est simplement connexe

$$m(\lambda_1(N)) = 3 \Rightarrow \exists u \in E(\lambda_1(N)), u \not\equiv 0$$

et  $u$  s'annule trois fois sur  $\partial\mathcal{U}$ .

*Démonstration.* — Soit  $(u_1, u_2, u_3)$  une base de  $E(\lambda_1(N))$  si il existe  $\theta_1 \in \partial\mathcal{U}$  tel que  $u_1(\theta_1) = u_2(\theta_1) = u_3(\theta_1) = 0$  soit alors  $\theta_2$  et  $\theta_3$  deux autres points de  $\partial\mathcal{U}$  il existe  $u$  dans  $E(\lambda_1(N))$  non nulle telle que  $u(\theta_1) = 0$  et  $u(\theta_2) = 0$  alors  $\mathcal{U}$  s'annule 3 fois. Si un tel  $\theta_1$  n'existe pas, construisons

$$F : \begin{array}{ccc} \partial\mathcal{U} = S^1 & \longrightarrow & S^2 \\ \partial & \longmapsto & (u_1(\theta), u_2(\theta), u_3(\theta)) / \sqrt{u_1^2(\theta) + u_2^2(\theta) + u_3^2(\theta)} \end{array}$$

et  $\Gamma = F(\partial\mathcal{U})$ .

Définissons par ailleurs pour  $\alpha \in S^2$ ,  $\Gamma_\alpha = S^2 \cap \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0\}$  c'est un grand cercle de  $S^2$ .

Par hypothèse,  $\forall \alpha \in S^2$ ,  $\#(\Gamma_\alpha \cap \Gamma) \geq 2$ . En effet,  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$  s'annule au moins 2 fois.

Plaçons-nous sur un intervalle  $]\theta_0, \theta_1[$  sur lequel  $F$  est un difféomorphisme local sur l'image et soit  $z_0 \in ]\theta_0, \theta_1[$  et  $\Gamma_{\alpha_0}$  le grand cercle de  $S^2$  tangent à  $\Gamma$  en  $F(z_0)$ .

Si  $F(z_0)$  est un point triple, c'est-à-dire  $\Gamma$  traverse  $\Gamma_{\alpha_0}$  alors en tournant légèrement  $\Gamma_{\alpha_0}$  on a  $\#(\Gamma \cap \Gamma_\alpha) \geq 3$ . Si  $\Gamma$  ne traverse pas  $\Gamma_{\alpha_0}$  en  $F(z_0)$  alors  $F_{\alpha_0}$  et  $\Gamma$  se coupe aussi en un autre point et en bougeant légèrement  $\Gamma_{\alpha_0}$  on dédouble le point  $F(z_0)$  donc  $\#(\Gamma_\alpha \cap \Gamma) \geq 3$ . ■

IV. DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE (2). — Il suffit de voir : soient  $\mathcal{U}_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^2 ; |z| < \alpha\}$  où  $\alpha$  est le premier maximum de la fonction de Bessel  $J_1$  et  $g$  une métrique à courbure  $K \leq 0$  de même volume total :  $\int_{\mathcal{U}_\alpha} dv_g = \pi \alpha^2$ ,  $\lambda_1(N)$  la première valeur propre non nulle du problème de Neumann sur  $\mathcal{U}_\alpha$  relatif à la métrique  $g$ ; alors  $\lambda_1(N) \leq 1$ .

n.b. La première valeur propre non nulle du problème de Neumann de  $\mathcal{U}_\alpha$  pour la métrique euclidienne est 1, de multiplicité 2; les fonctions propres sont

$$v_\tau(r, \theta) = \zeta_1(r) \sin(\theta + \tau).$$

a) Soit  $s^{z_0}(z) = \alpha^2 \frac{z-z_0}{\alpha^2 - z_0 z}$  (transformation conforme de  $\mathcal{U}_\alpha$ ), alors

$$\exists z_0 \in \mathcal{U}_\alpha \text{ tel que } \forall \tau \in ]-\pi; \pi[ , \int_{\mathcal{U}_\alpha} v_\tau dv_{(s^{z_0})^*g} = 0 .$$

Posons en effet  $\psi_\tau(z_0) = \int_{\mathcal{U}_\alpha} v_\tau dv_{(s^{z_0})^*g}$  et  $\gamma_\tau = \{z_0 / \psi_\tau(z_0) = 0\}$ ,

$$\lim_{z_0 \rightarrow \alpha e^{i\theta}} \psi_\tau(z_0) = \pi \alpha^2 v_\tau(\alpha, \theta) \text{ (c'est le noyau de poisson!)}$$

$v_\tau$  change de signe deux fois au bord. Donc  $\nu_0$  contient une ligne qui relie  $-\alpha$  à  $\alpha$  et  $\nu_{\pi/2}$  une ligne qui relie  $-i\alpha$  à  $i\alpha$ . Donc  $\nu_0 \cap \nu_{\pi/2} \neq \emptyset$ ,  $z_0 \in \nu_0 \cap \nu_{\pi/2}$  convient.

b)

$$\int_{\mathcal{U}_\alpha} |dv_\tau|^2 dv_{(s^{z_0})^*g} = \int_{\mathcal{U}_\alpha} |dv_\tau|^2 |dz|^2 = \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_\tau|^2 |dz|^2 .$$

En effet, en dimension 2  $\int |df|^2 dv_g$  est un invariant conforme de la métrique. Mais  $\mathcal{U}_\alpha$  est de plus simplement connexe, toute métrique admet donc des coordonnées isothermes globales. En d'autres termes toutes les métriques sont conformes.

c) Posons  $g_0 = s^{z_0}g = \rho_0(dX^2 + dY^2)$ .

$$K \leq 0 \implies \exists \tau_0 ; \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_{\tau_0}|^2 |dz|^2 \leq \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_{\tau_0}|^2 dv_{g_0} .$$

En effet,

$$K = -\Delta(\ln \rho_0) / 2\pi_0 \leq 0 \implies \Delta \rho_0 > 0$$

$$\implies p(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_0(r e^{i\theta}) d\theta \text{ est croissante en } r$$

$$\implies P(r) = \int_0^r t p(t) dt \text{ vérifie : } P(r) \leq r^2 \text{ et } P(\alpha) = \alpha^2 .$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_\tau|^2 dv_{\rho_0} d\tau &= \pi^2 \int_0^\alpha J_1(r) dP_r \\ &\geq 2\pi^2 \int_0^\alpha J_1(r) r dr \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathcal{U}_\alpha} |v_\tau|^2 |dz|^2 d\tau . \end{aligned}$$

d) Conclusion

$$\lambda_1 \leq \frac{\int |dv_{\tau_0}|^2 dv_{\rho_0}}{\int |v_{\tau_0}|^2 dv_{g_0}} \leq \frac{\int |v_{\tau_0}|^2 |dz|^2}{\int |v_{\tau_0}|^2 |dz|^2} = 1 .$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] ARONSAJN N. — *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl., 36 (1957), 235–249.
- [An] ANNÉ C. — *Bornes sur la multiplicité*, à paraître, 1990.
- [B] BESSON G. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 30,1 (1980), 109–128.
- [C] CHENG S.Y. — *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv., 51 (1976), 43–55.
- [CH] COURANT R., HILBERT G. — *Methods of Mathematical Physics*, Tome 1, New-York Interscience, 1953.
- [CdV] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Construction de Laplaciens dont une partie du spectre est donnée*, Ann. Sci. École Norm. Sup., XX (1987), 599–615.
- [N] NADIRASHVILI N.S. — *Multiple eigenvalues of the Laplace Operator*, Math. USSR Sbornik, 61,1 (1988), 225–238.
- [P] PEETRE J. — *A generalization of Courant's nodal domain theorem*, Math. Scand., 5 (1957), 15–20.
- [PS] POLYA G., SZEGŐ G. — *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Studies, n°27, Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [W] WEINBERGER H.F. — *An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem*, J. Rational Mech. Anal., 5 (1956), 613–623.

Colette ANNÉ  
INSTITUT FOURIER  
Laboratoire de Mathématiques  
BP 74  
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)