Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Frédéric Mouton

Groupes automatiques et courbure négative (d'après D.B.A. Epstein)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p. 37-52

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__37_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (37–52)

GROUPES AUTOMATIQUES ET COURBURE NÉGATIVE

(d'après D.B.A. EPSTEIN)

par *Frédéric MOUTON*

SOMMAIRE

1. Introduction
2. Automates finis et langages réguliers
3. Définition d'une structure automatique
4. Caractérisation
5. Stabilité de la notion
6. Exemples et contre-exemples
7. Algorithmes
8. Automates géodésiques et courbure négative
9. Bibliographie

1. Introduction

La notion de groupe "automatique" est introduite dans un preprint résumant la recherche dans ce domaine de J.W. Cannon, D.B.A. Epstein, D.F. Holt, M.S. Paterson, W.P. Thurston, intitulé "Word processing and group theory". Ce preprint est la principale référence sur ce sujet et cet exposé en est tiré.

Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet plus vaste, couronné par Thurston, et nommé "Geometry Supercomputer Project", dont le but est d'obtenir un environnement informatique pour l'étude des variétés de dimension trois. L'idée serait d'obtenir des "catalogues" de variétés sur lesquelles on pourrait tester les conjectures. Un outil important dans l'étude des variétés étant le groupe fondamental, souvent défini par générateurs et relations, il était important de pouvoir faire explicitement des calculs sur de tels groupes, trouver la structure du graphe de Cayley, *etc.*..

Plus précisément, donnons-nous un groupe de type fini G et S un système de générateurs. Soit $A = S \cup S^{-1}$. Il faut voir A comme un alphabet. Soit A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet A, c'est-à-dire le monoïde libre engendré par A. A tout mot $\omega = a_1 \cdots a_n$ on fait correspondre $\pi(\omega)$, élément de G correspondant. On aimerait représenter les éléments de G par des mots de A^* d'un "certain type" (en gros, mettre les éléments de G sous une forme normale) qu'on sache reconnaître "automatiquement", et sur lesquels on sache faire des calculs, c'est-à-dire savoir si $\pi(\omega_1)a = \pi(\omega_2)$, quand ω_1 et ω_2 sont du type déterminé ci-dessus et $a \in A \cup \{1\}$, et ceci de manière "automatique", pour pouvoir le faire faire par un ordinateur.

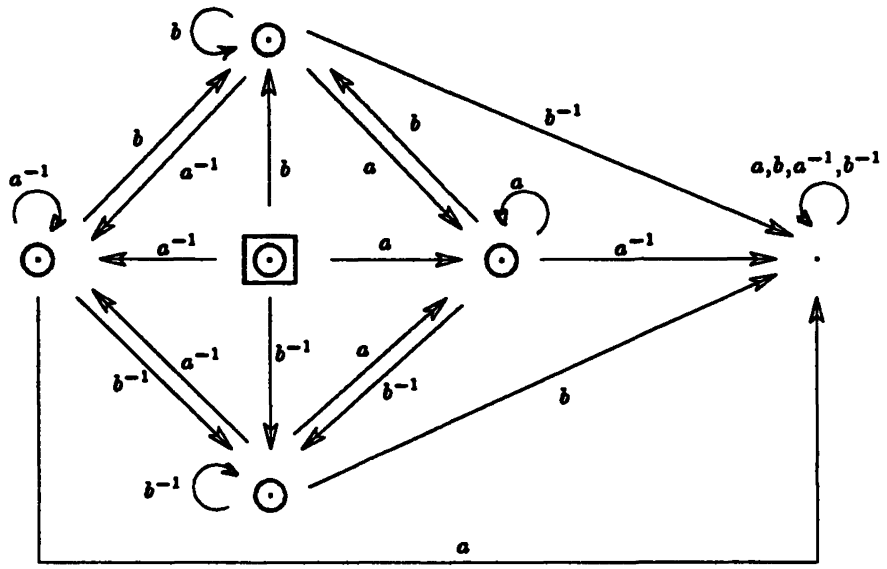
Par exemple, si G est le groupe libre à deux générateurs a et b et $S = \{a, b\}$, $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, et une forme normale consiste à regarder seulement les mots réduits, c'est-à-dire tels que a ne soit jamais à côté de a^{-1}, ni b à côté de b^{-1}. Il est facile de voir automatiquement si un mot est réduit ou non.

2. Automates finis et langages réguliers

2.1. Automates finis.

Nous allons donner la définition d'un automate fini en mettant en parallèle de cette définition la signification des termes dans le cas d'un exemple concret : un automate reconnaissant les mots réduits d'un groupe libre à deux générateurs, qui est représenté

ci-dessous.



DÉFINITION. — Un automate $\mathcal{A}$ est un quintuplet $\mathcal{A} = (E, A, \mu, Y, e_0)$, où : E est un ensemble fini appelé *ensemble des états* (ci-dessus, les points), A est un ensemble fini appelé *alphabet* (dont les éléments sont les index des flèches, ici $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$), μ est une application de $E \times A$ dans E appelée *fonction de transition* (qui donne l'arrivée d'une flèche en fonction de sa source et de son index), Y est une partie de E, dont les éléments s'appellent les *états finaux* (ici les points entourés), et e_0 est un élément de E appelé *état initial* (ici le point encadré).

Un mot $\omega \in A^*$ est dit *reconnu* par l'automate $\mathcal{A}$, si $\omega = a_1 \cdots a_n$ $(n \geqslant 0)$ et qu'il existe un chemin partant de e_0, indexé par les a_i, i variant de 1 à n, et finissant dans Y. Mathématiquement, ω est reconnu s'il existe une suite d'états $e_1 \cdots e_n$ telle que $\forall i \in [0, n-1]$, $\mu(e_i, a_{i+1}) = e_{i+1}$ et $e_n \in Y$ (ici ab est reconnu, mais pas aa^{-1}).

L'ensemble des mots reconnus par $\mathcal{A}$ est le *langage reconnu par* $\mathcal{A}$ noté $L(\mathcal{A})$. (Dans notre exemple c'est l'ensemble des mots réduits).

Un langage, c'est-à-dire une partie de A^*, est dit *régulier* s'il est reconnu par un automate (fini).

2.2. Langages rationnels.

Soit $B \subset A^*$ un langage. On définit $B^0 = \{\varepsilon\}$ où ε est le "mot vide", formé d'aucune lettre. Puis $B^n = B^{n-1} \cdot B$ par récurrence (où $B \cdot B' = \{b \cdot b' / b \in B, b' \in B'\}$ avec $b \cdot b'$ le mot obtenu par concaténation de b et b'). On définit alors $B^* = \bigcup_{n \geqslant 0} B^n$.

On considère alors la plus petite partie de $\mathcal{P}(A^*)$ (c'est un ensemble de parties de A^*) qui contienne les parties finies de A^* et qui soit stable par les opérations de réunion (finie) ($\cup$), de concaténation ($\cdot$) et étoile ($*$).

Ses éléments sont appelés les ensembles rationnels ou *langages rationnels*.

Par exemple, $\{a^n b^m / n, m \in \mathbb{N}\}$ est rationnel car il est égal à $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$. Mais on peut montrer que $\{a^n b^n / n \in \mathbb{N}\}$ ne l'est pas.

On peut aussi montrer que l'ensemble des langages rationnels est stable par passage au complémentaire, et donc par intersection finie.

2.3. Théorème de Kleene.

THÉORÈME. — *Les langages réguliers sont les langages rationnels.*

Pour une démonstration de ce théorème, se reporter à [CEHPT] ou à n'importe quel cours de théorie des langages.

Remarquons que la démonstration fournit une méthode explicite de construction d'automate à partir de l'expression du langage à l'aide des parties finies, de $\cup$, $\cdot$ et $*$.

Ce théorème nous permet aussi de dire que pour notre exemple du groupe libre à deux générateurs, l'ensemble des mots réduits est rationnel.

2.4. Langages réguliers à plusieurs variables.

Pour simplifier nous donnerons la définition dans le cas de deux variables. Soit $L \subset A_1^* \times A_2^*$. Les éléments de L ne sont pas des mots, mais on aimerait les considérer comme tels. A tout élément de L, (ω_1, ω_2), on fait correspondre

$$(\omega_1, \omega_2)^{\#} \in (A_1 \coprod \{\$_1\})^* \times (A_2 \coprod \{\$_2\})^*$$

en "remplissant" avec des $\$_i$ le mot le plus court de ω_1 et ω_2 pour qu'il ait la même longueur que l'autre. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \text{si } \ell(\omega_1) = \ell(\omega_2)\ , \ (\omega_1, \omega_2)^{\#} = (\omega_1, \omega_2) \\ \text{si } \ell(\omega_1) < \ell(\omega_2)\ , \ (\omega_1, \omega_2)^{\#} = (\omega_1 \$_1^{\ell(\omega_2) - \ell(\omega_1)}, \omega_2) \\ \text{si } \ell(\omega_1) > \ell(\omega_2)\ , \ (\omega_1, \omega_2)^{\#} = (\omega_1, \omega_2 \$_2^{\ell(\omega_1) - \ell(\omega_2)}) \end{cases}$$

On note $L^{\#} = \{(\omega_1, \omega_2)^{\#} / (\omega_1, \omega_2) \in L\}$. Comme $(\omega_1, \omega_2)^{\#}$ est un couple de deux mots de même longueur, on peut le considérer comme un mot dont les lettres sont des couples de lettres. Ainsi on peut plonger $L^{\#}$ dans $\left((A_1 \coprod \{\$_1\}) \times (A_2 \coprod \{\$_2\})\right)^*$.

On dit alors que L *est régulier* si $L^{\#}$ l'est.

3. DÉFINITION D'UNE STRUCTURE AUTOMATIQUE

3.1. Structure rationnelle.

Soit G un groupe de type fini. On dit que (A, L) est une *structure rationnelle* sur G si A est un système de générateurs de G en tant que semi-groupe et si L est un langage régulier sur A, tel que si π est la projection canonique de A^* sur G, on ait

$\pi(L) = G$. On dit qu'on a une *section rationnelle* dans le cas où $\pi\restriction_L$ est une bijection de L sur G.

Donnons quelques exemples :

– Dans le cas où $G = \langle a, b\rangle$, $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ et $L = \{\text{mots réduits}\}$ forment une section rationnelle.

– Si G est le groupe abélien libre à deux générateurs a et b, $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ et $L = \{a^n b^m, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$ $(= (\{a\}^* \cup \{a^{-1}\}^*) \cdot (\{b\}^* \cup \{b^{-1}\}^*))$ forment une section rationnelle.

– Si G est un groupe de type fini, et A un système de générateurs en tant que semi-groupe, on peut considérer L, l'ensemble des mots les plus courts représentant les éléments de G, qu'on appellera géodésiques. $\pi\restriction_L$ est surjective mais pas en général bijective. On se pose la question de savoir si L est régulier. On verra plus tard une condition suffisante.

3.2. Structure automatique.

Soit (A, L) une structure (resp. section) rationnelle sur G. On note

$$L_0 = \{(\omega_1, \omega_2) \in L \times L / \pi(\omega_1) = \pi(\omega_2)\}$$

et

$$L_a = \{(\omega_1, \omega_2) \in L \times L / \pi(\omega_1) = \pi(\omega_2 a)\}$$

pour $a \in A$.

On dit que (A, L) est une *structure* (resp. section) *automatique* si L_0 et les L_a sont réguliers.

Remarques :

1) Pour Epstein, une structure automatique est la donnée de X, M_0 et M_a, $a \in A$, automates reconnaissant respectivement L, L_0 et les L_a. Mais par le théorème de Kleene les deux définitions sont "équivalentes".

2) L'automate M_0 reconnaît l'égalité et M_a reconnaît la multiplication par a. On pourrait penser que reconnaître l'égalité suffit à entraîner le reste. Le problème est que si $(\omega_1, \omega_2) \in L \times L$, $\omega_2 a$ n'est plus forcément dans L et M_0 ne peut reconnaître l'égalité de $\pi(\omega_1)$ et $\pi(\omega_2 a)$.

3) Trouver un algorithme qui dit si deux mots de A^* ont la même image, c'est le "problème du mot" bien connu. Ici le problème est différent. Tout d'abord, un automate fini fournit un type très particulier d'algorithme : par exemple, sa complexité est linéaire. D'autre part, en général, $L \neq A^*$. Nous verrons cependant que sur un groupe automatique, on sait résoudre le problème du mot avec un algorithme de complexité $O(n^2)$.

4) $G = \langle a, b\rangle$ et (A, L) vu précédemment fournissent une section automatique.

5) On dit que la structure est biautomatique si on peut aussi reconnaître la multiplication à gauche.

4. Caractérisation

Soient G un groupe de type fini et A un système de générateurs de G en tant que semi-groupe. Dans le graphe de Cayley en remplaçant chaque arête par un segment de longueur 1, on obtient un espace de longueurs; et à chaque mot $\omega \in A^*$ on fait correspondre $\overline{\omega}(\cdot)$, chemin paramétré par $[0, +\infty[$, qui parcourt successivement les arêtes correspondant aux lettres de ω, à vitesse 1, et stoppe indéfiniment lorsqu'il n'y a plus de lettres. Dans le cas du groupe libre à deux générateurs, si $\omega = aaaba^{-1}$, $\overline{\omega}(0) = 1$, $\overline{\omega}(1) = a$, $\overline{\omega}(2) = aa$, $\overline{\omega}(3) = aaa$, $\overline{\omega}(4) = aaab$, $\overline{\omega}(5) = aaaba^{-1}$ et $\forall t \geqslant 5$, $\overline{\omega}(t) = aaaba^{-1} = \omega$. Et pour $t \in [0,1]$, $\overline{\omega}(t)$ parcourt à vitesse 1 l'arête joignant 1 à a, *etc...*

Nous allons maintenant donner une propriété fondamentale permettant de caractériser les structures automatiques.

Proposition. — *Soit (A, L) une structure rationnelle sur G. Elle est automatique si et seulement si il existe $K \geqslant 0$ tel que, pour tous $\omega_1, \omega_2 \in L$ tels que $\overline{\omega}_1(\cdot)$ et $\overline{\omega}_2(\cdot)$ finissent à distance plus petite ou égale à 1 dans le graphe de Cayley, la distance uniforme entre $\overline{\omega}_1(\cdot)$ et $\overline{\omega}_2(\cdot)$ reste plus petite ou égale à K.*

Comme corollaire évident, on voit que si G est un groupe fini, $A = G$ et $L = A^*$ forment une structure automatique sur G.

5. Stabilité de la notion

Nous allons maintenant énoncer toute une série de propositions qui sont démontrées dans [CEHPT] et qui nous montrent que la notion de structure automatique est assez stable.

> Si (A, L) est une structure automatique sur G alors quel que soit le système de générateurs A', il existe L' tel que (A', L') soit automatique.

On parlera donc de *groupe automatique*

> Si (A, L) est une structure automatique sur G, il existe L' tel que (A, L') soit une section automatique sur G.

On peut donc toujours se ramener au cas où l'on a une "forme normale".

Si $H \subset G$ est un sous-groupe d'indice fini alors

(G est automatique $\Leftrightarrow$ H est automatique)

si $H \lhd G$ et est fini alors

(G est automatique $\Leftrightarrow$ G/H est automatique) .

Si G_1 et G_2 sont automatiques et K est un groupe fini se plongeant dans G_1 et G_2, alors le produit libre avec amalgamation $G_1 *_K G_2$ est automatique.

En particulier, les groupes libres de type fini sont automatiques.

Si G_1 et G_2 sont automatiques alors $G_1 \times G_2$ aussi.

On en déduit donc que les groupes abéliens de type fini sont automatiques.

6. Exemples et contre-exemples

• On a déjà vu que les groupes finis, abéliens de type fini, libres de type fini, sont automatiques.

• Les groupes de "petite simplification" sont automatiques (pour définitions et démonstrations, voir [CEHPT]).

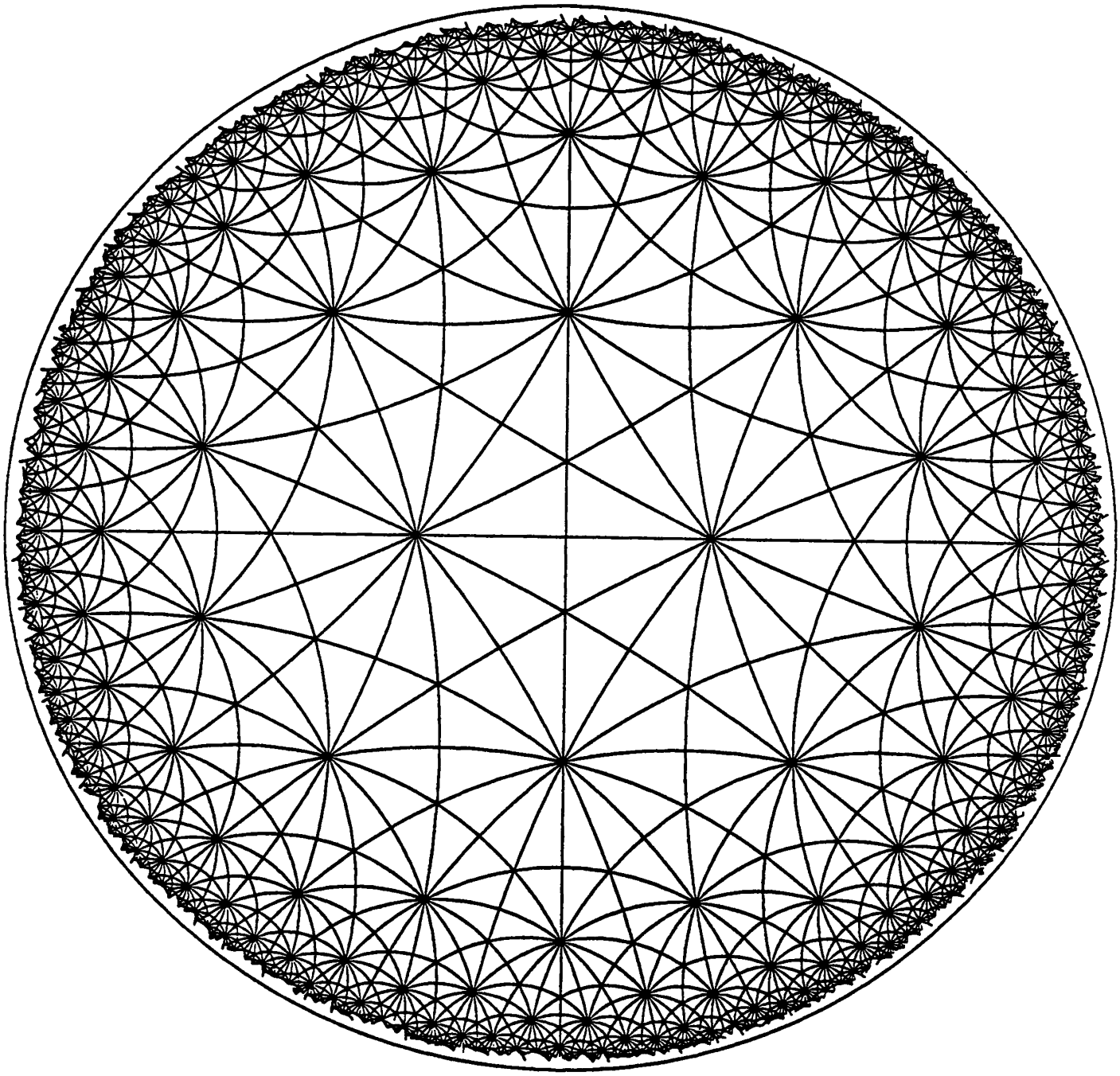
• Soient M une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative et $G = \pi_1(M)$. Si A est un système quelconque de générateurs de G (en tant que semi-groupe) et L est l'ensemble des mots géodésiques sur A, alors (A, L) est une structure automatique.

• Plus généralement, si G est un groupe d'isométries agissant proprement discontinuement sur $\widetilde{M}$, variété riemannienne complète, simplement connexe, de courbure strictement négative, avec un quotient compact, alors on a le même résultat.

Par exemple, si on se place dans le disque hyperbolique de Poincaré et qu'on considère le groupe engendré par les trois symétries hyperboliques par rapport aux troix côtés d'un triangle hyperbolique d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{7}$, on obtient un groupe de pavage, qui est automatique par ce qui précède (voir figure page suivante).

• Un résultat négatif est obtenu avec les groupes nilpotents; en effet, on peut montrer qu'un groupe virtuellement nilpotent qui est automatique est nécessairement virtuellement abélien. Ce résultat s'étend aux groupes polycycliques.

• Le groupe $SL(3, \mathbb{Z})$ n'est pas automatique.



pavage du disque de Poincaré par un
triangle hyperbolique d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{7}$
(extrait de "Computers, groups and hyperbolic geometry"
D.B.A. Epstein, Astérisque 163–164, (1988), pp. 9–29)

7. Algorithmes

Ici nous parlerons de structure automatique au sens d'Epstein c'est-à-dire avec les automates.

Un premier problème est, si l'on se donne un groupe par "générateurs et relations" de savoir s'il admet une structure automatique et dans ce cas de l'expliciter. La démonstration du théorème de caractérisation donne un algorithme qui s'arrête si et seulement si le groupe est automatique, et, dans ce cas, fournit explicitement les automates. Mais cet algorithme est très lent et inutilisable en pratique. On peut l'améliorer par la méthode de Knuth-Bendix (*cf.* [CEHPT]).

Un problème inverse est de se donner une structure automatique (les automates) et se demander si c'est celle d'un groupe. C'est un peu le même problème que lorsqu'on se donne un groupe par générateurs et relations. Il faut voir une structure automatique comme une forme de présentation très pratique. Dans le preprint, on trouve un algorithme qui, étant donnés les automates, permet de vérifier s'ils forment la structure automatique d'un groupe et si oui, donne le groupe défini par générateurs et relations.

Parlons enfin du problème du mot. Il existe un algorithme en complexité $O(n^2)$ qui permet, étant donné un mot de A^*, de se ramener à un mot de L ayant la même image par π. Comme on sait reconnaître l'égalité dans L avec un algorithme de complexité linéaire (car on a un automate fini), finalement, on sait résoudre le problème du mot avec une complexité en $O(n^2)$.

8. Automates géodésiques et courbure négative

Les résultats décrits dans ce chapitre sont démontrés dans [CEHPT] mais pour l'essentiel sont tirés d'un article de J.W. Cannon [C].

Le point important de cette section est le théorème déjà cité dans la section 6 que nous rappellerons plus tard.

A partir de maintenant, on se donne un groupe G de type fini, A un système de générateurs en tant que semi-groupe; et on pose L égal à l'ensemble des mots géodésiques, c'est-à-dire les mots représentant un élément de G de longueur minimale parmi les mots représentant le même élément.

On a donc $\pi(L) = G$, mais $\pi|_L$ n'est pas en général une bijection.

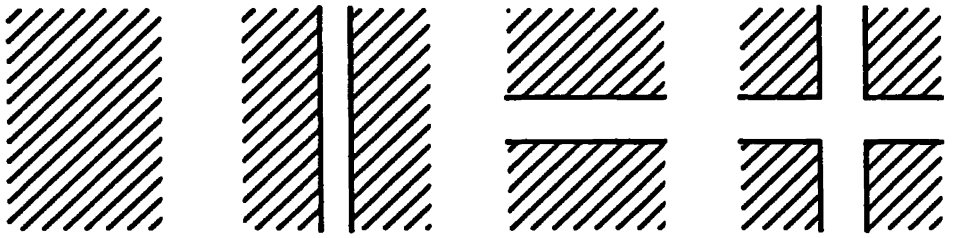
On se pose le problème de savoir si L est un langage régulier.

Remarquons que les mots géodésiques ω correspondent à des chemins $\overline{\omega}(\cdot)$ qui sont des géodésiques du graphe de Cayley vu comme espace de longueurs.

DÉFINITION. — Soit X un langage non vide. On dit que c'est un *cône-type* s'il existe $\alpha \in A^*$ tel que $X = \{\gamma / \alpha\gamma \text{ est géodésique}\}$. On note $X = C(\alpha)$.

Remarquons que ceci implique que $X \subset L$ et $\alpha \in L$. Il est clair que $C(\alpha)$ ne dépend que de $\pi(\alpha)$. On définit ainsi $C(g)$, pour $g \in G$.

Par exemple, pour $\mathbb{Z}^2$, on a exactement 9 cônes-type, à savoir $C(1)$, $C(a)$, $C(a^{-1})$, $C(b)$, $C(b^{-1})$, $C(ab)$, $C(ab^{-1})$, $C(a^{-1}b)$, $C(a^{-1}b^{-1})$, correspondant aux 9 "types" de régions suivants :



$C(1)$ $\quad$ $C(a^{-1})$ et $C(a)$ $\quad$ $C(b)$ et $C(b^{-1})$ $\quad$ $C(a^{-1}b), C(ab),$ $C(a^{-1}b^{-1}), C(ab^{-1})$

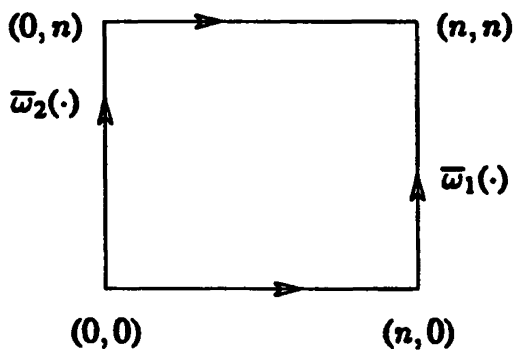
Remarquons maintenant que si $X = C(\alpha)$ est un cône-type et $a \in A$, alors $Y = \{\gamma / a\gamma \in X\}$ est soit vide, soit un cône-type lui-même, et ceci suivant que αa n'est pas ou est géodésique.

Si l'ensemble des cônes-type est fini, on obtient ainsi un automate fini qui reconnaît les mots géodésiques.

L'ensemble des états est l'ensemble des cônes-type auquel on a rajouté l'ensemble vide $\emptyset$, l'alphabet est A, la règle de transition est qu'à X et $a \in A$, on fait correspondre $Y = \langle \gamma / a\gamma \in X \rangle$. L'état de départ est $C(1)$ et les états finaux sont les états différents de $\emptyset$.

Ainsi, si l'ensemble des cônes-type est fini, (A, L) est une structure rationnelle.

Remarquons que la structure rationnelle obtenue ainsi sur $\mathbb{Z}^2$ n'est pas automatique, car la propriété de caractérisation n'est pas vérifiée comme on peut le voir facilement en considérant les chemins dans le graphe de Cayley représentés ci-dessous :



dont la distance uniforme tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

On s'aperçoit que si on impose une contrainte sur les chemins du style de la propriété de caractérisation, ceci implique du même coup que le langage L est régulier.

On obtient donc une condition suffisante :

THÉORÈME. — *Supposons qu'il existe $k > 1$ tel que : si ω_1 et ω_2 sont deux mots géodésiques tels que $\overline{\omega}_1(\cdot)$ et $\overline{\omega}_2(\cdot)$ finissent à distance $\leqslant 1$, alors les deux chemins restent à distance de Hausdorff plus petite que k l'un de l'autre.*

Alors L est régulier et (A, L) est une structure automatique.

En gros, la seule chose à démontrer est que L est régulier ce qui peut se faire en montrant qu'il n'y a qu'un nombre fini de cônes-type (*cf.* [CEHPT] pour la démonstration).

On a enfin le théorème dans le cas de la courbure négative :

THÉORÈME. — *Si M est une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative et $G = \pi_1(M)$, et que A est un système de générateurs de G quelconque et $L = \{$mots géodésiques$\}$ alors (A, L) est une structure automatique.*

Pour montrer ce théorème, on montre que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. Le point clé de la démonstration est le lemme bien connu suivant :

LEMME (Mostow-Thurston). — *$\forall k \geqslant 1$, $\forall c > 0$, $\exists L \geqslant 0$, $\forall X$ variété riemannienne complète, simplement connexe de courbure sectionnelle majorée par $-c^2$, $\forall f : [a, b] \to X$ qui est une (k, k)-quasigéodésique, $f([a, b])$ est contenu dans un L-voisinage de l'arc géodésique joignant $f(a)$ à $f(b)$.*

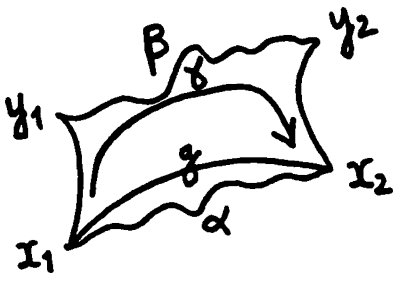
(Le fait que f soit une (k, k)-quasigéodésique signifie que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$,

$$\frac{1}{k} d(x, y) - k \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant k d(x, y) + k \ .\ )$$

Voyons tout d'abord comment on démontre le théorème à l'aide du lemme. Pour ceci, on déduit du lemme un corollaire :

COROLLAIRE. — *Si on prend X et c comme précédemment, α une (k, k)-quasigéodésique joignant x_1 à x_2, et β une (k, k)-quasigéodésique joignant y_1 à y_2, alors on peut majorer la distance de Hausdorff entre α et β par une constante ne dépendant que de c, k, $d(x_1, y_1)$ et $d(x_2, y_2)$.*

Démonstration du corollaire. — On construit l'arc γ en mettant bout à bout l'arc géodésique de x_1 à y_1, puis β, puis l'arc géodésique de y_2 à x_2 (voir figure).



Il est clair que γ est une (k', k')-quasigéodésique avec k' une constante supérieure à k ne dépendant que de k, $d(x_1, y_1)$ et $d(x_2, y_2)$. D'après le lemme, on en déduit donc une constante L', ne dépendant que de c, k, $d(x_1, y_1)$ et $d(x_2, y_2)$, telle que α et γ soient compris dans un L'-voisinage de l'arc géodésique g joignant x_1 à x_2 (car α est aussi une (k', k')-quasigéodésique).

Nous allons maintenant montrer que γ est compris dans un $2L'$-voisinage de α. Pour ceci, il nous suffit de montrer que g est dans un L'-voisinage de α. Soient $[a_\alpha, b_\alpha]$ et $[a_g, b_g]$ les intervalles de définition de α et g, et π la projection orthogonale sur g (qui est bien définie par la condition de courbure négative). On sait que π est continue et que g est un homéomorphisme de $[a_g, b_g]$ sur son image. Ainsi $g^{-1} \circ \pi \circ \alpha$ est une application continue de $[a_\alpha, b_\alpha]$ dans $[a_g, b_g]$ or $g^{-1} \circ \pi \circ \alpha(a_\alpha) = g^{-1} \circ \pi(x_1) = g^{-1}(x_1) = a_g$ et $g^{-1} \circ \pi \circ \alpha(b_\alpha) = b_g$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall t \in [a_g, b_g]$, $\exists s \in [a_\alpha, b_\alpha]$ tel que $g(t) = \pi(\alpha(s))$, donc $d(g(t), \alpha(s)) = d(\alpha(s), g) \leqslant L'$.

Donc g est dans un L'-voisinage de α, et par conséquent, γ est dans un $2L'$-voisinage de α, donc il en est de même pour β. Comme α et β jouent un rôle symétrique et que $d(x_i, y_i) = d(y_i, x_i)$, α est dans un $2L'$-voisinage de β. Donc la distance de Hausdorff entre α et β est plus petite ou égale à $2L'$, ce qui achève la démonstration du corollaire.

Démontrons maintenant le théorème. On a une variété riemannienne compacte M de courbure strictement négative. Par compacité on peut majorer la courbure par $-c^2 < 0$. On note $G = \pi_1(M)$, on note A un système de générateurs et L l'ensemble des mots géodésiques. On va montrer que la condition suffisante précédente est vérifiée. Soient ω_1, ω_2 deux mots géodésiques tels que $\overline{\omega}_1(\cdot)$ et $\overline{\omega}_2(\cdot)$ finissent à distance plus petite ou égale à 1. Par le choix d'un point base, on plonge le graphe de Cayley de G dans M par une application f qu'on sait alors être une (K, K)-quasi-isométrie. Ainsi, par composition par f, les géodésiques du graphe de Cayley deviennent des (K, K)-quasigéodésiques de M et de plus $f \circ \overline{\omega}_1(\cdot)$ et $f \circ \overline{\omega}_2(\cdot)$ finissent à distance plus petite ou égale à $2K$, tout en commencant au même point. Ainsi par le corollaire, la distance de Hausdorff entre $f \circ \overline{\omega}_1(\cdot)$ et $f \circ \overline{\omega}_2(\cdot)$ est majorée par une constante ne dépendant que de c et K et en revenant par f^{-1} qui est aussi une (K, K)-quasi-isométrie, on a finalement montré que $\overline{\omega}_1(\cdot)$ et $\overline{\omega}_2(\cdot)$ sont à distance de Hausdorff majorée par une constante ne dépendant que de c et K. Ainsi par la condition suffisante, (A, L) est une structure automatique ce qui achève la démonstration du théorème.

Reste à démontrer le lemme.

Nous aurons besoin du résultat classique suivant :

SOUS-LEMME. — *Soit X une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle majorée par $-c^2 < 0$. Soient α une géodésique et π la*

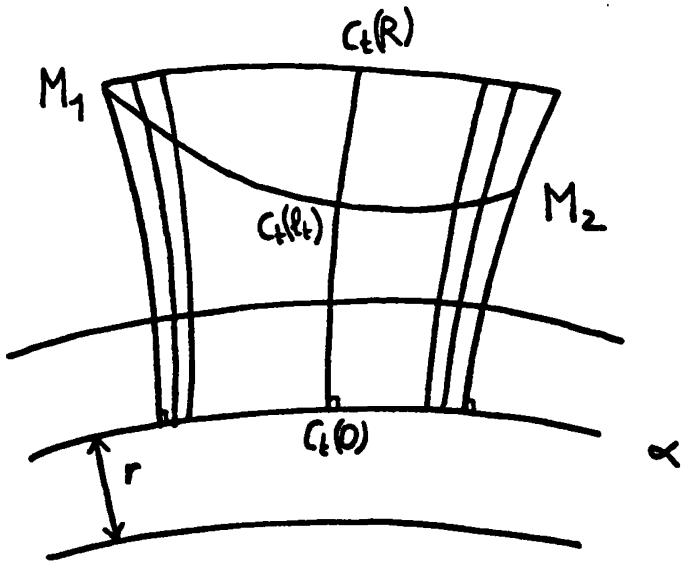
projection orthogonale sur cette géodésique. Si M_1 et M_2 sont deux points de X tels que l'arc géodésique joignant M_1 à M_2 reste à distance plus grande ou égale à r de α alors

$$d(\pi(M_1), \pi(M_2)) \leqslant [ch(cr)]^{-1} d(M_1, M_2) .$$

Démontrons ce sous-lemme. Rappelons la propriété de croissance exponentielle des champs de Jacobi :

Si X et c sont comme ci-dessus, et $Y(t)$ est un champ de Jacobi tel que $\dot{Y}(0) \perp Y(0)$, alors $\|Y(t)\| \geqslant \|Y(0)\| ch(ct)$. (Pour ceci, considérer $g(t) = \|Y(t)\|$. On voit facilement que $g'' \geqslant c^2 g$, à l'aide de la borne sur la courbure et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comme $g'(0) = 0$, le résultat en découle simplement.)

Introduisons quelques notations. Soit η l'arc géodésique joignant M_1 à M_2. (On a donc $\ell(\eta) = d(M_1, M_2)$.) Soit $R = \sup_{M \in \eta} d(M, \alpha)$. On considère que α est paramétrée par longueur d'arc et que $\alpha(0) = \pi(M_1)$ et $\alpha(T) = \pi(M_2)$. (Ainsi $T = d(\pi(M_1), \pi(M_2))$.) On considère pour tout point M de η la géodésique réalisant la projection, et si $\pi(M) = \alpha(t)$ on la note $C_t(s)$ avec $C_t(0) = \alpha(t)$, $C_t(\ell_t) = M$ (où $\ell_t = d(M, \pi(M))$) et on la "continue" jusqu'en R (voir figure ci-dessous).



On obtient ainsi une variation de géodésiques $C_t(s) = C(t, s)$ où $t \in [0, T]$ et $s \in [0, R]$. L'application $t \mapsto C_t(\ell_t)$ fournit un paramétrage de η, donc

$$\ell(\eta) = \int_0^T \left\| \frac{d}{dt}(C_t(\ell_t)) \right\| dt$$

or

$$\frac{d}{dt}(C_t(\ell_t)) = \frac{\partial C}{\partial t}(t, \ell_t) + \frac{\partial C}{\partial s}(t, \ell_t) \frac{d\ell_t}{dt} .$$

Nous allons montrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux pour pouvoir minorer $\left\| \frac{d}{dt}(C_t(\ell_t)) \right\|$.

$Y_t : s \mapsto \frac{\partial C}{\partial t}(t,s)$ est un champ de Jacobi sur la géodésique C_t. Or $Y_t(0) \perp \dot{C}_t(0)$ car la projection est "orthogonale". D'autre part

$$\begin{aligned}\dot{Y}_t(0) &= \left(\frac{D}{ds}\frac{\partial C}{\partial t}(t,s)\right)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial C}{\partial s}(t,s)\Big|_{s=0}\right) \\ &= \frac{D}{dt}(\dot{C}_t(0))\end{aligned}$$

or $\dot{C}_t(0)$ est normé, donc $\frac{D}{dt}(\dot{C}_t(0)) \perp \dot{C}_t(0)$ donc $\dot{Y}_t(0) \perp \dot{C}_t(0)$. On sait qu'alors ([G], p. 115) Y_t, $\dot{Y}_t$, $\ddot{Y}_t \perp \dot{C}_t$.

Ainsi $\frac{\partial C}{\partial t}(t,s) \perp \frac{\partial C}{\partial s}(t,s)$ et

$$\left\|\frac{d}{dt}(C_t(\ell_t))\right\| \geqslant \left\|\frac{\partial C}{\partial t}(t,\ell_t)\right\| = \|Y_t(\ell_t)\| .$$

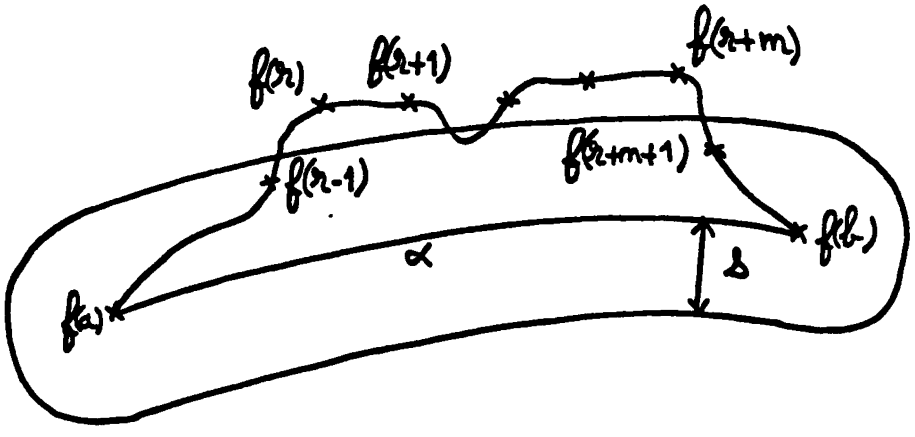
D'après l'estimation des champs de Jacobi,

$$\|Y_t(\ell_t))\| \geqslant \|Y_t(0)\| ch(c\ell_t) = ch(c\ell_t) .$$

Ainsi $\ell(\eta) \geqslant \int_0^T ch(c\ell_t)dt \geqslant T ch(cr)$ ce qui démontre le sous-lemme.

Démontrons maintenant le lemme. Soient X et c comme précédemment et $f : [a,b] \to X$ une (k,k)-quasigéodésique. Soit s un nombre dépendant de c et k dont le choix sera explicité plus tard. On note N_s le s-voisinage de α, où α est l'arc géodésique joignant $f(a)$ à $f(b)$.

On considère les couples $(m,r) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ tels que $m \geqslant -1$, $r \in [a,b]$ et $f(r+i) \notin N_s$ pour i entier entre 0 et m. On veut majorer les tels m. Pour ceci, parmi ces couples, on en prend un tel que m soit maximal (voir figure ci-dessous) et on suppose pour l'instant $m \geqslant 0$.



f étant une (k,k)-quasigéodésique,

$$\frac{m}{k} - k \leqslant d(f(r), f(r+m)) .$$

Remarquons que $f(r)$ et $f(r+m)$ ne sont pas trop "loin" de α. En effet, si $r-a \geqslant 1$, $d(f(r-1),\alpha) \leqslant s$ par maximalité de m, donc $d(f(r),\alpha) \leqslant s+2k$ par quasigéodésicité. Et si $r-a<1$,

$$d(f(r),\alpha) \leqslant d(f(r),f(a)) \leqslant 2k \leqslant s+2k \ .$$

Ainsi $d(f(r),\alpha) \leqslant s+2k$ et de même $d(f(r+m),\alpha) \leqslant s+2k$. Finalement, par inégalité triangulaire,

$$\frac{m}{k} - k \leqslant 2s+4k+d(\pi(f(r)),\pi(f(r+m)))$$

(π étant la projection orthogonale sur α)

$$\leqslant 2s+4k+\sum_{i=1}^{m} d(\pi(f(r+i-1)),\pi(f(r+i))) \ .$$

Par quasigéodésicité, l'arc joignant $f(r+i-1)$ à $f(r+i)$ reste à une distance de α supérieure à $s-2k$. Donc en appliquant le sous-lemme, on obtient

$$\frac{m}{k} - k \leqslant 2s+4k+\left[ch[c(s-2k)]\right]^{-1} \sum_{i=1}^{m} d(f(r+i-1),f(r+i)) \ .$$

Or par quasigéodésicité, $d(f(r+i-1),f(r+i)) \leqslant 2k$ donc

$$\frac{m}{k} - k \leqslant 2s+4k+2km\left[ch(c(s-2k))\right]^{-1}$$

ainsi

$$m\left[\frac{ch(c(s-2k))}{k} - 2k\right] \leqslant (2s+5k)ch(c(s-2k)) \ .$$

On choisit s pour que $s>2k$ et $\frac{ch(c(s-2k))}{k} - 2k = 1$ (ce qui est possible car $k \geqslant 1$).

Ainsi $m \leqslant (2s+5k)(k+2k^2)$. Cette majoration est encore valable lorsque $m=-1$. Ainsi si s est défini comme ci-dessus, pour tous les couples (m,r) convenant,

$$m \leqslant (2s+5k)(k+2k^2) \ .$$

Soit maintenant $t \in [a,b]$. Alors il existe un unique couple (m,r) tel qu'il existe i entier, $0 \leqslant i \leqslant m$ tel que $t=r+i$, et que m soit maximal parmi ces couples. Alors $d(f(r),\alpha) \leqslant s+2k$ par maximalité de m, or $d(f(r),f(t)) \leqslant k \cdot i + k \leqslant (m+1)k$, donc $d(f(t),\alpha) \leqslant s+3k+mk$.

Ainsi, si on prend $L = s+3k+k(k+2k^2)(2s+5k)$, s ne dépendant que de c et k, L aussi, et l'arc f est contenu dans un L-voisinage de α ce qui démontre le lemme.

9. Bibliographie

[C] Cannon J.W. — *The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups*, Geometricae Dedicata, **16** (1984), 123–148.

[CEHPT] Cannon, Epstein, Holt, Paterson, Thurston. — *Word processing and group theory*, preprint.

[E] Epstein D.B.A. — *Computers, Groups and Hyperbolic Geometry*, Astérisque, **163–164** (1988), 9-29.

[G] Gallot, Hulin, Lafontaine. — *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, 1980.

Frédéric MOUTON
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)