Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

FRANÇOIS LEDRAPPIER

Mesure harmonique et mesure de Bowen-Margulis

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 135-138

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__135_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1988–1989 (135–138)

MESURE HARMONIQUE ET MESURE DE BOWEN-MARGULIS

par *François LEDRAPPIER*

Nous considérons une variété riemannienne compacte M, à courbures sectionnelles négatives, son revêtement universel $\widetilde{M}$ et la sphère à l'infini $\widetilde{M}(\infty)$ de $\widetilde{M}$. La propriété de courbure négative fait qu'il est possible de lire plusieurs propriétés de M sur la sphère à l'infini. Nous présentons ici quelques résultats – et des questions – dans ce sens. Des démonstrations plus détaillées sont dans [7].

1. Géométrie à l'infini.

Soit $\widetilde{M}$ une variété simplement connexe munie d'une structure riemannienne telle qu'en tout point les courbures sectionnelles K_x vérifient $-b^2 \leqslant K_x \leqslant -a^2 < 0$. Nous notons $\widetilde{M}(\infty)$ la sphère à l'infini de $\widetilde{M}$ (voir par exemple [5]) et pour x dans $\widetilde{M}$, ξ dans $\widetilde{M}(\infty)$, nous écrivons $(x \cdot \xi)$ le vecteur unitaire en x tangent à l'unique géodésique de vitesse unité $\gamma_{x,\xi}$ partant de x et finissant vers ξ. Cette identification est pour tout x un homéomorphisme entre $\widetilde{M}(\infty)$ et la sphère unité $S_x\widetilde{M}$ de l'espace tangent à $\widetilde{M}$ en x. Nous nous intéressons à deux fonctions qui décrivent la géométrie de $\widetilde{M}$ "vue de ξ" :

a. — Pour x dans $\widetilde{M}$, ξ dans $\widetilde{M}(\infty)$, la fonction de Busemann $\theta_{x,\xi}$ est une fonction sur $\widetilde{M}$ définie par

$$\theta_{x,\xi}(y) = \lim_{t\to\infty} d(y, \gamma_{x,\xi}(t)) - t \,.$$

L'ensemble $\theta_{x,\xi}^{-1}(\{0\})$ s'appelle l'horosphère du point (x,ξ) (voir [5] chapitre 3.9).

b. — Pour x dans $\widetilde{M}$, ξ dans $\widetilde{M}(\infty)$, il existe une unique fonction harmonique positive $k(x \cdot \xi)$ sur $\widetilde{M}$ satisfaisant

1. $k(x, x, \xi) = 1$
2. $\lim_{z\to\chi} k(x, z, \xi) = 0$ si χ est un point de $\widetilde{M}(\infty)$, distinct de ξ (voir [1]).

Si $\widetilde{M}$ est le disque hyperbolique, les fonctions $k(0,y,\xi)$ et $e^{-\theta_{0,\xi}(y)}$, coïncident avec le noyau de Poisson $\dfrac{1-|y|^2}{|y-\xi|^2}$.

2. Comparaison dans le cas du revêtement universel d'une variété compacte.

En général, les deux fonctions introduites plus haut ne sont pas reliées entre elles. Si $\widetilde{M}$ est le revêtement universel d'une variété compacte M de courbure strictement négative, la condition de bornitude est automatiquement vérifiée et le cas où ces deux fonctions coïncident a plusieurs caractérisations.

THÉORÈME 1 [7]. - *Soit M une variété compacte de courbures sectionnelles strictement négatives. Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe x dans M, ξ dans $\widetilde{M}(\infty)$ tels que les fonctions $k(x,\cdot,\xi)$ et $\theta_{x,\xi}$ ont les mêmes courbes de niveaux;

b) La courbure moyenne des horosphères est constante;

c) Pour tous x,y dans $\widetilde{M}$, ξ dans $\widetilde{M}(\infty)$,

$$k(x,y,\xi) = \exp(-h\theta_{x,\xi}(y))$$

où h est l'entropie topologique du flot géodésique sur SM; et

d) $4\lambda_1 = h^2$, où λ_1 est la borne inférieure du spectre de $-\Delta$ dans l'espace $L^2(\widetilde{M},dV)$.

Nous proposons d'appeler asymptotiquement harmoniques les métriques telles que les propriétés équivalentes du théorème 1 sont satisfaites. Rappelons qu'on appelle harmonique une variété où, par exemple, le noyau de la chaleur $p(t,x,y)$ ne dépend que de t et de la distance $d(x,y)$.

Question 1. — Est-ce que en courbure négative, asymptotiquement harmonique implique harmonique? La réponse est oui en dimension 2 et en dimension 3. De fait, en dimension 2 ou 3, les variétés compactes de courbure strictement négative et asymptotiquement harmoniques sont de courbure constante.

3. Mesures à l'infini.

La propriété du théorème 1 étant très forte, nous introduisons une propriété a priori plus faible qui va porter sur certaines mesures à l'infini. Il est bien connu (voir e.g. [1]) qu'il existe une famille $\{x \to \mu_x\}$ de mesures de probabilité sur $\widetilde{M}(\infty)$ indexée par $\widetilde{M}$ avec la propriété que pour $x \neq y$, les mesures μ_x et μ_y ont les mêmes ensembles négligeables et que la densité $\frac{d\mu_y}{d\mu_x}$ est donnée par

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = k(x,y,\xi) \text{ pour } \mu.\text{-presque tout } \xi \ .$$

De même

PROPOSITION 2. — *Soit M une variété compacte de courbure strictement négative, $\widetilde{M}$ son revêtement universel. Il existe une famille de mesures de probabilité $\{x \to \nu_x\}$ sur $\widetilde{M}(\infty)$ indexée par $\widetilde{M}$ et une fonction positive sur $\widetilde{M}$ telles que les mesures ν_x ont les mêmes ensembles négligeables et pour ν.–presque tout ξ :*

$$(*) \qquad \frac{d\nu_y}{d\nu_x}(\xi) = \exp(-h\theta_{x,\xi}(y))\frac{U(y)}{U(x)} .$$

De plus $\{\nu_x\}$ et U sont uniques avec cette propriété, à une constante multiplicative près.

L'existence et l'unicité de (ν, U) suivent (*cf.* [7]) de l'unique ergodicité du feuilletage stable du flot géodésique [2].

PROPOSITION 3 [7]. — *Avec les notations ci-dessus, les propriétés du théorème 1 sont aussi équivalentes à la propriété e) :*

e) $\mu_x = \nu_x$ pour tout x de $\widetilde{M}$

Une autre construction de la famille U_x peut se faire en imitant [3] : Pour tout x de $\widetilde{M}$, définissons une fonction C_x sur $\widetilde{M}(\infty) \times \widetilde{M}(\infty)$ par :

$$C_x(\xi,\eta) = \exp(-\sup\{t : d(\gamma_{x,\xi}(t), \gamma_{x,\eta}(t) \leqslant 1\}) .$$

La fonction C_x n'est pas une distance sur $\widetilde{M}(\infty)$ mais a suffisamment de propriétés pour que les notions de mesure sphérique de Hausdorff ou de dimension de Hausdorff aient un sens ([3]). La dimension de Hausdorff de $\widetilde{M}(\infty)$ est alors h et la h–mesure de Hausdorff de $\widetilde{M}(\infty)$ st non-nulle et finie ([3]). Il est alors facile de vérifier qu'en prenant pour ν cette mesure normalisée et pour U la mesure totale de $\widetilde{M}(\infty)$, la relation $(*)$ est satisfaite. Il suit de cette construction en particulier que la fonction U est $\pi_1(M)$-invariante et satisfait à une condition de Hölder uniforme.

4. Le problème de rigidité de la mesure harmonique.

Les classes de mesures $\mu_.$, $\nu_.$ sont quasi-invariantes et ergodiques pour l'action naturelle du groupe $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}(\infty)$. Il y a donc a priori trois possibilités :

A) asymptotiquement harmonique,

B) pour tout x, les mesures μ_x et ν_x ont les mêmes ensembles négligeables, et

C) pour tout x, les mesures μ_x et ν_x sont singulières l'une par rapport à l'autre.

En dimension 2, il se trouve que $B \Rightarrow A$:

THÉORÈME 2 [7], (voir également [4]). — *Soit M une surface compacte de courbure négative et supposons que pour un x de $\widetilde{M}(\infty)$, les mesures μ_x et ν_x ont les mêmes ensembles négligeables. Alors la courbure est constante.*

Question 2. — A-t-on $B \Rightarrow A$ en dimension plus grande?

Remarque. — Il suit de [6], [4] qu'en fait le cas *B)* est réalisé dès que la dimension de la mesure harmonique au sens évoqué plus haut est h .

Références

[1] ANDERSON M.T., SCHOEN R. — *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math., **121** (1985), 429–461.

[2] BOWEN R, MARCUS B. — *Unique ergodicity for horocycle foliation*, Isr. J. Maths, **26** (1977), 43–67.

[3] HAMENSTADT U. — *A new description of the Bowen-Margulis measure*, à paraître Erg. Th. & Dynam. Sys..

[4] HAMENSTADT U. — *Time-preserving conjugacies of geodesic flows*, prétirage.

[5] KLINGENBERG W. — *Riemannian Geometry*, de Gruyter Studies in Maths I, 1982.

[6] LEDRAPPIER F. — *Ergodic properties of Brownian motion on covers of compact negatively-curved manifolds*, Bol. Soc. Bras. Math., **19** (1988), 115–140.

[7] LEDRAPPIER F. — *Harmonic measure and Bowen-Margulis measure*, prétirage.

François LEDRAPPIER
UNIVERSITÉ DE PARIS VI
UER 47
4, place Jussieu
75055 PARIS (France)