Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LUC ROZOY

À propos de la conjecture de la balle liquide en relativité générale

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 92-101
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__92_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1988–1989 (92–101)

A PROPOS DE LA CONJECTURE DE LA BALLE LIQUIDE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par *Luc ROZOY*

On ne trouvera pas dans cet exposé de démonstration de la conjecture (!), mais simplement l'état de l'avancement de mon travail à ce sujet.

Introduction.

Situons-nous dans le cadre de la mécanique classique. La figure d'équilibre d'un fluide parfait qui n'est soumis qu'aux forces d'interactions gravitationnelles de ses constituants est une sphère pleine.

L'objet de ce travail est l'extension de ce résultat à la Relativité Générale. Le problème a une longue histoire. C'est Lichnérowicz qui l'a formulé avec précision vers 1940.

La notion de fluide parfait s'étend sans encombre à la Relativité Générale. C'est un schéma dont le tenseur impulsion-énergie s'écrit $(\rho + p).u \otimes u + p.g$, où ρ est la densité, p la pression, u le vecteur vitesse unitaire et g la métrique.

La notion de fluide en équilibre signifie qu'il existe sur l'espace temps une famille à un paramètre (le temps) d'hypersurfaces (les sections d'espaces) dont les trajectoires orthogonales (les lignes de temps), orientées dans le temps, sont les orbites d'un groupe G d'isométries, en même temps qu'elles sont les lignes de courant du fluide (le générateur infinitésimal ξ de G est donc colinéaire à u là où $\rho \neq 0$). Ainsi l'espace-temps est homéomorphe au produit de R par une section d'espace E.

En mécanique classique, on impose au potentiel de gravitation de tendre uniformément vers zéro à l'infini. En Relativité Générale cette exigence est remplacée par une condition géométrique sur E : E est complet pour la métrique induite et asymptotiquement plat.

Le modèle de Schwarzschild, qui est à symétrie sphérique, satisfait à toutes les exigences précédentes. Lichnérowicz a conjecturé que c'était le seul si, du moins, le fluide est baratrope, *i.e.* s'il existe une équation d'état. Sous cette forme la conjecture n'a jamais été démontrée sans hypothèses additives très fortes, bien qu'elle ait sollicité l'attention de nombreux chercheurs (on ne trouvera pas ici de résumé historique des démarches utilisées vu l'ampleur du sujet).

1. Rapide étude locale des solutions statiques des équations du vide ou d'un fluide parfait en relativité.

Mise en équation.

D'après un théorème de Lichnérowicz, l'espace-temps est supposé statique au sens de Levi-Civita, c'est-à-dire que l'on peut trouver localement un système de coordonnées adapté tel que le ds^2 prenne la forme :

$$ds^2 = -\xi^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \ (i, j = 1, 2, 3)$$

où les g_{ij} et ξ ne dépendent que des variables (x^1, x^2, x^3).

La signature choisie est $- + ++$; la convention de sommation sur les indices répétés placés en haut et en bas est adoptée. Les composantes du tenseur de Riemann sont données par :

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta} ,$$

où les $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont les deuxièmes symboles de Christoffel.

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}(\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma})$$

Les composantes du tenseur de Ricci sont :

$$R_{\alpha\beta} = R^{\delta}{}_{\alpha\delta\beta}.$$

Les équations d'Einstein sont :

$$R_{\alpha\beta} = \chi(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}),$$

où les $T_{\alpha\beta}$ sont les composantes covariantes du tenseur densité d'impulsion-énergie d'un fluide parfait :

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} \quad \text{où } u_\alpha u^\alpha = -1 \ ,$$

p est la pression du fluide et ρ sa densité; et $T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$.

Les équations d'Einstein dans le cas statique orthogonal s'écrivent :

$$(1) \qquad \nabla_k \partial^k \xi = \frac{3p + \rho}{2} \chi \xi \ ,$$

$$(2) \qquad R_{ij} = \frac{\nabla_i \partial_j \xi}{\xi} + \frac{\chi}{2} g_{ij}(\rho - p),$$

où les indices latins i, j, k... varient de 1 à 3, où les R_{ij} désignent les composantes covariantes du tenseur de Ricci de $\mathcal{V}_3$ (sous-espace défini par $t = C^{te}$), et où ∇ désigne la dérivation covariante de $\mathcal{V}_3$.

Au voisinage d'un point où $\mathrm{grad}_3\xi \neq 0$, on peut rapporter $\mathcal{V}_3$ à un système de coordonnées orthogonales défini par les surfaces $x^3 = \xi =$ constante et leurs trajectoires orthogonales :

$$ds^2 = -\xi^2 dt^2 + V^2(x^1, x^2, \xi) d\xi^2 + g_{AB}(x^1, x^2, \xi) dx^A dx^B \,(A, B = 1, 2).$$

En utilisant les projections du tenseur de Ricci liées à des coordonnées orthogonales [1], ce qui introduit un tenseur de courbure de plongement des surfaces $\xi = C^{te}$ dans $\mathcal{V}_3$: $\Omega_{AB} = \frac{1}{2V}\partial_3 g_{AB}$ et les invariants $K = \Omega_A^A$, $\Omega^2 = \Omega^{AB}\Omega_{AB}$, nous obtenons le système suivant :

$$(3)\quad \frac{\Omega_{AB}}{V\xi} + \frac{\chi}{2} g_{AB}(\rho - p) = \frac{\overset{*}{R}}{2} g_{AB} - \frac{\partial_3\Omega_{AB}}{V} - \frac{\overset{*}{\nabla}_A \partial_B V}{V} - K\Omega_{AB} + 2\Omega_A^C \Omega_{CB},$$

$$(4)\quad -\frac{\partial_A V}{V^2\xi} = \overset{*}{\nabla}_B(\Omega_A^B - \delta_A^B K) \;,$$

$$(5)\quad -\frac{\chi}{2} V(\rho - p) + \frac{\partial_3 V}{V^2\xi} = \overset{*}{\Delta}_2 V + \partial_3 K + V\Omega^2 \;,$$

$$(6)\quad K - \frac{\partial_3 V}{V^2} = \frac{\chi}{2}\xi V(\rho + 3p) \;,$$

$$(7)\quad \overset{*}{R} = \frac{2K}{V\xi} + K^2 - \Omega^2 - 2\chi p \;.$$

Le signe $*$ est affecté aux éléments relatifs aux variétés $\xi = C^{te}$ munies de la métrique $g_{AB}dx^A dx^B$ et $\overset{*}{\Delta}_2$ désigne le Laplacien associé.

Une transformation conforme remarquable.

Considérons sur $\mathcal{V}_3$ la métrique définie par $\bar{g}_{ij} = \xi^2 g_{ij}$ et $\bar{R}_{ij}$ les composantes du tenseur de Ricci associé. On obtient :

$$\bar{R}_{ij} = -\frac{2\chi p}{\xi^2}\bar{g}_{ij} + 2\frac{\partial_i\xi\partial_j\xi}{\xi^2},$$

et les équations d'Einstein deviennent (en posant $W = V\xi$, $k = \bar{\Omega}_A^A$ et $\omega^2 = \bar{\Omega}^{AB}\bar{\Omega}_{AB}$) :

$$(8)\quad -\frac{2\chi p}{\xi^2}\bar{g}_{AB} = \frac{\overset{*}{\bar{R}}}{2} g_{AB} - \frac{\partial_3\bar{\Omega}_{AB}}{W} - \frac{\overset{*}{\bar{\nabla}}_A\partial_B W}{W} - k\bar{\Omega}_{AB} + 2\bar{\Omega}_A^C\bar{\Omega}_{CB},$$

$$(9)\quad \overset{*}{\bar{\nabla}}_B(\bar{\Omega}_A^B - \delta_A^B k) = 0,$$

$$(10)\quad -\frac{2}{W^2\xi^2} + \frac{2\chi p}{\xi^2} = \frac{\overset{*}{\bar{\Delta}}_2 W + \partial_3 k}{W} + \omega^2,$$

(11) $$\frac{\chi}{2}W(\rho+3p) = k\xi - \frac{1}{W} - \xi\frac{\partial_3 W}{W^2},$$

(12) $$\overset{*}{R} = k^2 - \omega^2 - \frac{2}{W^2\xi^2} - \frac{2\chi p}{\xi^2}.$$

Premières propriétés de ce système.

L'utilisation des identités de Bianchi montre que :

$$\frac{\partial_i p}{p+\rho} = -\frac{\partial_i \xi}{\xi}\ .$$

Ainsi p et ρ ne dépendent que de ξ et il existe obligatoirement une relation $f(p,\rho) = 0$ entre p et ρ.

Une utilisation minutieuse du système montre que si V ne dépend que de ξ, alors l'espace est "localement à symétrie ou sphérique, hyperbolique, cylindrique ou plane".

Si pour toute surface $\xi = C^{te}$ $\overset{*}{R}$ et V ne sont pas des fonctions indépendantes, alors il existe un vecteur de Killing de genre espace, c'est-à-dire que l'espace est "localement à symétrie axiale".

(Ces deux résultats ne sont pas du tout évidents. Me contacter pour plus de détails.)

Müller zum Hagen ([2]) a démontré qu'il existait des atlas constitués de cartes dans lesquelles les coefficients $g_{\alpha\beta}$ de la métrique étaient analytiques. Son travail permet de montrer que ces atlas contiennent des cartes locales adaptées à la précédente décomposition suivant les surfaces $\xi = C^{te}$. On en déduit ainsi qu'il est possible de travailler dans des cartes locales telles que toutes les quantités qui apparaissent dans les équations (3), (4), (5), (6) et (7) soient des fonctions analytiques des coordonnées x^1, x^2, ξ. (Pour cela il faut supposer que ρ est une fonction analytique de p).

2. Etude du comportement localement autour du centre du modèle.

Masood-ul-Alam [3] a démontré qu'un modèle fluide parfait statique géodésiquement complet asymptotiquement euclidien (satisfaisant une condition de convergence à l'infini classique) est difféomorphe à $R^3 \times R$. (La région fluide est supposée connexe).

Ainsi nous savons que la fonction ξ est définie sur V_3 espace difféomorphe à R^3. Dans un modèle à symétrie sphérique, en compactifiant V_3, en lui ajoutant un point à l'infini, ξ admet exactement deux uniques points critiques non dégénérés, un au "centre" de l'étoile, où ξ est minimum et positive, et un au point à l'infini où ξ est maximum (on choisit $\xi = 1$ pour obtenir $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ à l'infini).

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'au voisinage d'un minimum, noté C, non dégénéré de ξ (où $\xi > 0$) alors la solution est à symétrie sphérique en C au sens suivant : le tenseur de Cotton y est nul et les trois valeurs propres de $\nabla_i \partial_j \xi$ relativement à la métrique g_{ij} y sont égales.

Pour obtenir ce résultat, nous esquissons une étude locale de la structure conforme des espaces riemanniens de dimension 3 non conformément plats, puis nous étudions le comportement géométrique au voisinage du minimum non dégénéré du feuilletage de $\mathcal{V}_3$ par les surfaces $\xi = C^{te}$, et ces matériaux nous permettent de conclure en utilisant le tenseur $\nabla \partial \xi$ et le dual du tenseur de Cotton.

a) Introduction à l'étude locale conforme des espaces riemanniens de dimension 3 non conformément plats.

Pour les espaces riemanniens (et pseudo-riemanniens) de dimension 3, Cotton a introduit un tenseur défini dans un système de coordonnées par

$$R_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + \frac{1}{4}(g_{ik}\partial_j R - g_{ij}\partial_k R), \tag{13}$$

où les R_{ij} sont les composantes du tenseur de Ricci et ∇ représente la dérivation covariante associée à la stucture riemannienne.

Ce tenseur est antisymétrique en les indices j et k : $R_{ijk} = -R_{ikj}$. Si on effectue une transformation conforme

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij} \tag{14}$$

alors

$$\overline{R}_{ijk} = R_{ijk}. \tag{15}$$

Ainsi les composantes R_{ijk} sont invariantes par transformation conforme, mais elles dépendent du système de coordonnées choisi.

Nous voudrions savoir s'il existe des invariants conformes , c'est-à-dire des quantités (scalaires) indépendantes de tout système de coordonnées et qui soient invariantes par transformation conforme. Nous renvoyons à l'article de Fefferman et Graham [4]. Ces auteurs font apparaître le tenseur de Cotton comme une partie du tenseur de Riemann d'un espace de dimension supérieure. Ils définissent un invariant conforme comme étant un polynôme $P(g)$ en $(\det g_{ij})^{-1}$ et en les dérivées $\partial^\alpha g_{ij}$ (α est un multi-indice) satisfaisant à deux propriétés d'invariance :

a) si g et g' sont isométriques $P(g) = P(g')$

b) si $g = \lambda(x)g'$ pour une fonction $\lambda(.)$ régulière et positive alors $P(g) = \lambda^{-k}P(g')$ où k est appelé le poids de l'invariant.

Ici, nous voudrions trouver des quantités scalaires invariantes conformes de poids nul, mais pas forcément polynomiales.

Pour cela, nous introduisons le tenseur α défini par ses composantes dans un système de coordonnées :

$$\alpha^{ih} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} R^h_{jk}. \tag{16}$$

(Dans cette définition g est le déterminant de la matrice formée par les g_{ij} et ϵ^{ijk} vaut 1 si (i, j, k) est obtenue à partir d'une permutation paire de (1,2,3), vaut -1 pour une permutation impaire et 0 sinon. Cette égalité (16) définit bien un tenseur parce que les composantes $\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}$ sont celles d'un tenseur (à dérivée covariante nulle) et il en est de même pour $\sqrt{g}\epsilon_{ijk}$ où $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$).

Les identités de Bianchi sur le tenseur de Riemann conduisent à l'identité classique :

$$\nabla_i R^i_j = \frac{1}{2}\partial_j R. \tag{17}$$

Cette dernière relation permet de montrer que α est un tenseur symétrique, de trace et de divergence nulles :

$$\alpha^{ij} = \alpha^{ji} \; ; \quad \nabla_j \alpha^{ij} = 0 \; ; \quad \alpha^i_i = 0 \, . \tag{18}$$

α définit donc un tenseur symétrique, transverse et sans trace au sens de York [5].

Appelons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs propres de α^{ij} relativement à g^{ij}. Elles sont réelles et vérifient :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \, . \tag{19}$$

Effectuons la transformation conforme (14) . Alors $\overline{\alpha}^{ij} = e^{-5\sigma}\alpha^{ij}$ de par la définition (16). En un point choisissons un système de coordonnées qui soit orthogonal et principal pour α relativement à g. Alors $\alpha^{11} = \lambda_1 g^{11}$, $\alpha^{22} = \lambda_2 g^{22}$ et $\alpha^{33} = \lambda_3 g^{33}$.

Appelons $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\lambda}_2$, $\overline{\lambda}_3$ les valeurs propres de $\overline{\alpha}^{ij}$ relativement à $\overline{g}^{ij}$. Nous obtenons $\overline{\alpha}^{11} = \overline{\lambda}_1\overline{g}^{11}$, $\overline{\alpha}^{22} = \overline{\lambda}_2\overline{g}^{22}$ et $\overline{\alpha}^{33} = \overline{\lambda}_3\overline{g}^{33}$, d'où :

$$\overline{\lambda}_1 = e^{-3\sigma}\lambda_1 \; , \quad \overline{\lambda}_2 = e^{-3\sigma}\lambda_2 \; , \quad \overline{\lambda}_3 = e^{-3\sigma}\lambda_3 \; ; \tag{20}$$

et ces relations ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé pour les démontrer.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où V_3 n'est pas conformément plat. Alors, d'après (15), une au moins des valeurs propres λ_1 λ_2 ou λ_3 est non nulle et par (19) une au plus est nulle. Supposons par exemple que λ_3 ne soit pas nulle. Alors

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\overline{\lambda}_1}{\overline{\lambda}_3} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\overline{\lambda}_2}{\overline{\lambda}_3} \, .$$

Ainsi les rapports des valeurs propres du tenseur α (quand ils sont définis) introduisent des quantités scalaires invariantes par transformation conforme et indépendantes du système de coordonnées.

En considérant de tels quotients nous n'obtenons pas des invariants conformes au sens de [5] ou [6]. Le problème reste donc ouvert de savoir si ce sont les seules quantités scalaires invariantes conformes et si elles sont toutes fonctions les unes des autres. Si F est un polynôme invariant de degré $2s$ et Φ la connection de Levi-Civita, alors $F(\Phi)$ s'exprime en fonction du tenseur de Weyl. (*cf.* AVEZ [9]). En dimension trois, le tenseur de Weyl étant nul, il faudrait trouver une relation entre le tenseur de Cotton et les invariants secondaires au sens de Chern et Simons.

Toutes les considérations précédentes sont indépendantes du problème relativiste traité dans cette étude et sont vraies pour tout espace de dimension 3 non conformément plat.

Nous avons donc obtenu des invariants conformes en dimension trois, mais cette construction n'est valable que sur des domaines où V_3 n'est pas conformément plat. Comment se comportent ces quantités invariantes au passage d'un domaine non conformément plat à un domaine conformément plat? Cette question est aussi ouverte. Toute la démonstration qui va suivre est l'étude de ce comportement localement autour du minimum C non dégénéré de ξ (et où $\xi > 0$). En effet, en ce point nous montrerons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La symétrie sphérique est une conséquence de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ dans V_3. Ainsi, nous supposerons que $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ n'est pas identiquement nul dans un voisinage de C. (Sinon la symétrie sphérique en C est alors évidente). Nous pourrons alors étudier les rapports des valeurs propres de α et leur comportement le long de chemins qui convergent vers C.

Pour notre problème relativiste nous aurons besoin de l'expression en coordonnées locales du tenseur α si nous prenons un repère tel que :

$$ds_3^2 = V^2(x^1, x^2, \xi)d\xi^2 + g_{AB}(x^1, x^2, \xi)dx^A dx^B \ .$$

Un calcul dans de telles coordonnées utilisant les équations (3),(4),(5),(6) et (7) permet d'obtenir :

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} ((\alpha_{ij})) &= \frac{2\sqrt{g}}{V^3\xi^2} \begin{pmatrix} -2\Omega_1^2 & \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & \partial^2 V \\ \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & 2\Omega_2^1 & -\partial^1 V \\ \partial^2 V & -\partial^1 V & 0 \end{pmatrix} \\ ((\alpha^{ij})) &= \frac{2}{\sqrt{g}V\xi^2} \begin{pmatrix} -2\Omega_2^1 & \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & \frac{\partial_2 V}{V^2} \\ \Omega_1^1 - \Omega_2^2 & 2\Omega_1^2 & \frac{-\partial_1 V}{V^2} \\ \frac{\partial_2 V}{V^2} & \frac{-\partial_1 V}{V^2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} .$$

Il est remarquable que ce résultat soit le même dans le vide que dans le fluide. Ceci généralise la remarque de Lindblom sur une expression de $R_{ijk}R^{ijk}$ identique dans le fluide et dans le vide. C'est une étude du comportement de ce tenseur au voisinage du centre du modèle qui va nous intéresser maintenant.

b) Comportement géométrique au voisinage d'un minimum C non dégénéré de ξ (où $\xi > 0$) du feuilletage de V_3 par les surfaces $\xi = C^{te}$.

Cette partie est aussi indépendante du problème relativiste et ne fait intervenir que l'hypothèse d'un minimum C non dégénéré pour une fonction ξ suffisamment différentiable.

En résumé, cette partie montre que l'hypothèse sur C point critique non dégénéré conduit à ce que le feuilletage par les 2–espaces $\xi = C^{te}$ se comporte de manière régulière au voisinage de C, que la densité de mesure de surface sur ces 2–espaces a une limite directionnelle bien définie en C et qu'ainsi le rapport $\frac{K}{V}$ a lui aussi une limite directionnelle bien définie en C.

Cette démarche permettra de définir des intégrales d'expressions faisant intervenir $\frac{K}{V}$ sur les 2–espaces $\xi = \mathrm{C^{te}}$ et de considérer leurs limites quand ξ tend vers son minimum. Ainsi, la démarche utilisée par Israël pour démontrer la sphéricité des trous noirs statiques asymptotiquement euclidiens peut être étendue jusqu'au centre du modèle si celui-ci est supposé être un point critique non dégénéré de ξ.

Etude des ombilics.

Nous supposerons toujours à partir de maintenant que ξ admet en C un minimum, point critique non dégénéré. Alors dans un voisinage de C les surfaces $\xi = \mathrm{C^{te}}$ sont difféomorphes à S^2. Mais toute surface difféomorphe à S^2 admet au moins un point ombilic, c'est-à-dire un point où la deuxième forme fondamentale est proportionnelle à la première forme fondamentale de la surface. Cela résulte du fait qu'il n'existe pas sur une variété difféomorphe à S^2 de champ de vecteur qui ne s'annule pas. S'il n'existait pas de point ombilic sur la surface $\xi = \mathrm{C^{te}}$ alors on pourrait en tout point définir deux courbures principales et distinguer la plus grande de la plus petite et cette distinction serait vraie sur toute la surface. Choisissons alors par exemple la plus grande des courbures principales. Il lui est associée une direction principale. En passant au revêtement à deux feuillets on obtient en tout point un champ de vecteurs qui ne s'annule en aucun point. Seules les variétés (de dimension 2) difféomorphes au tore admettent de tels champs de vecteurs parce que leur constante d'Euler-Poincaré est nulle. Ce qui démontre que la construction précédente n'est pas possible sur une surface difféomorphe à S^2 et donc montre l'existence d'au moins un point ombilic sur toute surface difféomorphe à S^2. Dans le cas des surfaces plongées dans R^3, convexes et analytiques, il est aussi connu qu'il doit exister au moins deux points ombilics. Par ailleurs, on ne connaît pas d'exemple de surfaces plongées dans R^3 qui admettent moins de quatre points ombilics. Dans le cas riemannien qui nous intéresse de toute manière, nous ne pouvons affirmer que l'existence d'au moins un point ombilic. Nous retrouverons nos quatre points ombilics par la suite en montrant qu'il est possible d'approcher les surfaces $\xi = \mathrm{C^{te}}$ par des ellipsoïdes et que les quatre points ombilics d'un ellipsoïde nous donneront une approximation à un ordre convenable de la notion de point ombilic. Que les quatre points ombilics d'un ellipsoïde soient situés dans un plan principal sera bien utile.

Résumé de la suite de la démonstration.

Appelons μ_1 μ_2 et μ_3 les valeurs propres de $\nabla\partial\xi$ relativement à la métrique.

Alors, en utilisant un repère tel que pour $\xi = \xi_0$ les coordonnées x^1 et x^2 soient coordonnées de courbure, nous obtenons (pour $\xi = \xi_0$) :

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \left(\frac{\Omega_1^1}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_2^2}{V}\right)^2 + 2\frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4} + \left(\frac{\partial_3 V}{V^3}\right)^2 .$$

De même avec le dual du tenseur de Cotton , nous obtenons :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \frac{8}{V^2\xi^4}\left[\frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4} + \left(\frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V}\right)^2\right] .$$

Quand nous faisons tendre le point courant vers le centre du modèle, nous en déduisons que les expressions

$$\frac{\partial_A V \partial^A V}{V^4} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Omega_1^1}{V} - \frac{\Omega_2^2}{V}\right)^2$$

restent bornées et donc que le tenseur de Cotton est nul au centre du modèle.

Comme en C nous savons que le tenseur de Cotton est nul cela veut dire que nous pouvons effectuer une transformation conforme qui donne à l'espace osculateur en C un contact d'ordre trois avec l'espace de Riemann (à la place du contact d'ordre deux comme exprimé par le développement des coefficients de la métrique dans des coordonnées normales de Riemann). Dans l'espace euclidien osculateur le 2–espace $\xi = C^{te}$ est un ellipsoïde qui admet quatre points ombilics dans un de ses plans principaux. En revenant dans l'espace de Riemann en ces points, la différence des courbures principales sera proche de zéro à un ordre suffisamment élevé pour entraîner l'annulation de l'expression $q = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ dans les directions de convergence de ces points quand ξ tend vers son minimum. (Pour cela, il faut faire intervenir que ces notions sont liées aux invariants conformes dont il a été question précédemment). Par ailleurs, le tenseur $\nabla\partial\xi$ admet deux directions principales dans ce même plan et cela conduit à l'annulation de q dans deux nouvelles directions. Ainsi nous obtenons une fonction q analytique en C, dont les dérivées premières et secondes sont nulles en C (cela provient de la nullité du tenseur de Cotton en ce point) et qui s'annule dans quatre directions au moins d'un plan principal du tenseur $\nabla\partial\xi$. Mais alors cette fonction analytique ne peut avoir que des dérivées partielles troisièmes nulles en C, au moins dans les directions de ce plan principal. (A moins que les directions précédentes soient confondues, cas qui conduit à pouvoir conclure). Pour le moment, j'ai démontré ainsi qu'au moins deux des valeurs propres du tenseur $\nabla\partial\xi$ étaient égales et j'espère bien obtenir l'égalité de ces trois valeurs propres. J'espère également éviter cet argument très compliqué (il faut démontrer que la structure euclidienne introduite par les coordonnées intervenant dans le lemme de Morse est, à une modification des unités près, osculatrice à la structure riemannienne). J'espère, en définitive, ne faire intervenir qu'un point ombilic à moins que je ne parvienne à démontrer l'existence, dans notre cas particulier, de plus d'un point ombilic sur la surface $\xi = C^{te}$ dans l'espace de Riemann.

Pour la suite de la démonstration, j'espère pouvoir alors reprendre la démonstration d'Israël puisque j'aurai ainsi obtenu "la symétrie sphérique au centre". J'espère ainsi obtenir le résultat suivant :

hypothèses :

le modèle est statique au sens de Levy Civita,

le modèle est asymptotiquement euclidien,

la fonction ξ n'admet qu'un seul point critique et ce point critique est non dégénéré, (et ainsi les 2–espaces $\xi = C^{te}$ feuillettent régulièrement tout l'espace moins le centre du modèle), le modèle contient un fluide parfait situé à distance finie, les autres portions de l'espace étant schématisées par le vide.

Conclusion :

le modèle est à symétrie sphérique.

Bibliographie

[1] AVEZ A. - *Le ds^2 de Schwarzschild parmi les ds^2 stationnaires*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol 1, 3 (1964), 291-300.

[2] MÜLLER ZUM HAGEN H. — *On the analycity of static vacuum solutions of Einstein's equations*, Proc. Camb. Phil. Soc., 67 (1970), 415.

[3] MASOOD-UL-ALAM A.K.M. — *The Topology of Asymptotically Euclidean Static Perfect Fluid Space-time*, Commun. Math.Phys., 108 (1987), 193-211.

[4] FEFFERMAN C., GRAHAM C.R. — *Conformal Invariants*, Astérisque, hors série, pp. 95-116, 1985.

[5] YORK J.W — *Covariant decomposition of symetric tensors in the theory of gravitation*, Ann. Inst. Henri Poincarré A, Vol XXI, 4 (1974), 319-332.

[6] VEY J — *Un théorème de P. Gilkey*, Publication de l'université de Grenoble. Institut Fourier, .

[7] LINDBLOM L. — *Some properties of static general relativistic stellar models*, J. Math. Phys., 21(6) (1980), 1455-1459.

[8] MILNOR J. — *Morse Theory (Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells)*, Princeton University Press, 1963.

[9] AVEZ A. — *Characteristic classe and Weyl tensors : applications to general relativity*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 66 (1970), 265-268.

Luc ROZOY
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)