Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Laurent Guillopé

Hamiltonien périodique de surface : désintégration de Floquet

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 9-24
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1988–1989 (9–24)

HAMILTONIEN PÉRIODIQUE DE SURFACE :
désintégration de Floquet

par *Laurent GUILLOPÉ*

Soit T un réseau de rang n dans $\mathbf{R}^{n+1}$ (muni d'une structure euclidienne) et $\mathbf{R}_y$ la droite orthogonale au sous-espace engendré par T. Soit Q un potentiel T-périodique, à courte portée dans la direction transverse $\mathbf{R}_y$ et W un potentiel à courte portée dans $\mathbf{R}^{n+1}$. L'hamiltonien $H = \Delta + Q$ ($H_W = \Delta + Q + W$ *resp.*) modélise l'interaction d'une particule et d'une hypersurface cristalline pure (avec impuretés *resp.*) : dans la pratique des physiciens n=2!

La théorie spectrale L^2 de H résulte essentiellement de la théorie de Floquet :

PROPOSITION 0.1. – *L'hamiltonien H est essentiellement auto-adjoint, de cœur $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Son spectre est $[0,+\infty)$, purement absolument continu de multiplicité infinie*

Aux expériences de diffraction des expérimentateurs correspondent les résonances des hamiltoniens *i.e.* les singularités du prolongement (en un sens convenable) de la résolvante ($(H-\lambda)^{-1}, \Im m\lambda > 0$) à travers le spectre continu $\mathbf{R}^+$. En fait, dans l'étude des structures périodiques, c'est l'hamiltonien réduit de Floquet H_p, et ses résonances, qui correspond à une expérience de diffraction où le faisceau incident de particules a pour impulsion p.

La désintégration de Floquet permet d'écrire, si C_T note le cylindre $\mathbf{R}^n/T \times \mathbf{R}_y$ et T' le tore des caractères de T :

$$L^2(\mathbf{R}^{n+1}) = \int_{T'} L^2(C_T)dp \quad , \quad (H-\lambda)^{-1} \simeq \int_{T'} (H_p - \lambda)^{-1} dp. \qquad (0.1)$$

On peut penser que le prolongement de $(H-\lambda)^{-1}$ dérive de celui de $(H_p - \lambda)^{-1}$. C'est en partie vrai, mais, alors que le spectre (réel) de H est (grossièrement) l'union des spectres des H_p, les résonances (le spectre complexe) de H proviennent de celles des H_p de manière plus subtile.

Cet exposé est consacré à l'étude de la famille d'opérateurs $(H_p - \lambda)^{-1}$. On renvoie à [1] pour l'étude de la résolvante $(H - \lambda)^{-1}$.

Le résultat principal est l'introduction d'une variété analytique $\tilde{V}_+$ (connexe), dite variété d'impulsion–énergie ramifiée, dont la partie lisse contient la variété d'impulsion–énergie physique $\tilde{VP} = \{(p, \lambda), p \in \mathbf{R}^n, \Im m\lambda > 0\}$. Cette variété est fibrée en surfaces de Riemann $\tilde{V}_{+,p}$ sur $\mathbf{C}_p^n$, surfaces de Riemann apparaissant dans l'étude spectrale de variétés à bouts cylindriques ([2]) ou d'espaces localement symétriques à pointes ([5]). Ces surfaces de Riemann sont des revêtements ramifiés (avec ramifications de degré 2) de $\mathbf{C}$. Mais la géometrie de $\tilde{V}_+$ est plus compliquée : la fibration en $\tilde{V}_{+,p}$ n'est pas localement triviale et la nature du lieu singulier de $\tilde{V}_+$ échappe pour l'instant à l'auteur.

Néanmoins, à partir de l'étude de la résolvante de l'hamiltonien libre unidimensionnel sur sa surface spectrale Σ_2 et de la théorie de Fredholm (précisée dans le cadre des classes de Schatten), le prolongement de $(\Delta_p - \lambda)^{-1}$ et $((\Delta + Q)_p - \lambda)^{-1}$ de $\tilde{VP}$ à $\tilde{V}_+$ est établi aisément.

L'écriture (0.1) incite à poser comme (véritable) variété d'impulsion–énergie physique $VP = T' \times \{\Im m\lambda > 0\}$ ($= \mathbf{R}^n/T^* \times \{\Im m\lambda > 0\}$ où T^* est le réseau dual de T dans $\mathbf{R}^n$). T^* opère discontinuement sur $\tilde{V}_+$ et le quotient $V = \tilde{V}_+/T^*$ est une fibration en surfaces de Riemann au-dessus de $\mathbf{C}^n/T^*$, complexifié du tore T'. Il n'est cependant pas vrai que $(H_p - \lambda)^{-1}$ soit définissable sur VP. On introduit un fibré ξ (*resp.* ξ_2) sur T' (puis sur VP, V de manière compatible) de fibre $C_0^\infty(C_T)$ ($L^2(C_T)$ *resp.*) et les fibrés qui s'en déduisent tels $\xi_{2,a}$ (de fibre $L^2(C_T)_a = \{u, e^{ad(x\,,\,\cdot)}u(\,.\,) \in L^2(C_T)\}$ si $a \in \mathbf{R}$, $L^2_{\mathrm{loc}}(C_T)$ si $a = -\infty$, $L^2_{\mathrm{comp}}(C_T)$ si $a = +\infty$) et $\mathcal{L}(\xi_2)_a = \mathcal{L}(\xi_{2,a}, \xi_{2,-a})$.

THÉORÈME 0.2. — *La résolvante $(H_p - \lambda)^{-1}$, définie sur $\tilde{VP}$ induit une section du fibré $\mathcal{L}(\xi_2)_a \to VP$, qui se prolonge méromorphiquement en une section de $\mathcal{L}(\xi_2)_a \to V_a$.*

On renvoie à la partie 5 pour la définition de V_a, on retiendra ici que la famille $(V_a)_{a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}}$ est croissante, avec $\cup_{a \in \mathbf{R}} V_a = V$.

L'introduction de ces fibrés, sans nécessiter de longs développements, permet de préciser le sens de l'écriture (0.1). L'espace $L^2(\mathbf{R}^{n+1})$ apparaît comme l'espace de sections L^2 du fibré $\xi_2 \to T'$, qui coïncide avec celui des sections du fibré trivial $T' \times L^2(C_T) \to T'$, cependant un cœur de l'hamiltonien H ($\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \otimes C_0^\infty(\mathbf{R}_y)$ dans $L^2(\mathbf{R}^{n+1})$) est donné par l'espace des sections C^∞ du fibré $\xi \to T'$, qui ne peut se réduire à un espace de sections régulières d'un fibré trivial.

Par ailleurs, on notera, dans la preuve du prolongement méromorphe de $(H_p - \lambda)^{-1}$ à $\tilde{V}_+$, le rôle essentiel joué par une famille (dénombrable) de fonctions racines carrées (au sens où leur carré est défini sur la base de la fibration $\tilde{V}_+ \to \mathbf{C}_p^n \times \mathbf{C}_\lambda$), dont aucune n'est définie sur V en tant que section holomorphe d'un fibré en droites complexes (trivial ou non) sur V.

Enfin, l'introduction de ces fibrés permet éventuellemnet (???) d'éviter l'usage de cycles relatifs (en se limitant à la considération de cycles absolus) dans la démonstration du prolongement méromorphe de $(H - \lambda)^{-1}$ au-delà du spectre continu, en ne considérant que le cycle absolu T' (et ses déformations) dans $\mathbf{C}^n/T^*$([1]).

L'hypothèse *courte portée* signifie une certaine décroissance à l'infini : Q dans une classe L^p ou à décroissance exponentielle. Dans la suite, pour ne pas alourdir l'exposé, on entendra par courte portée l'hypothèse de support compact. Si on fait une hypothèse de décroissance exponentielle d'ordre r, on aura une frontière naturelle de prolongement $\partial\tilde{V}_r$ (alors que l'hypothèse de support compact permet le prolongement à tout V).

On trouvera dans la suite des rappels/compléments sur la théorie de Floquet, l'hamiltonien libre unidimensionnel et sa surface spectrale, la théorie de Fredholm pour aboutir à la définition de la variété spectrale V, la preuve du prolongement méromorphe de $(H_p - \lambda)^{-1}$ et celle du théorème 0.2.

Dans l'appendice, on ébauche l'étude d'hamiltoniens $T \times \mathbf{R}^q$–périodiques et de leurs perturbations.

1. Réduction de Floquet

A. Généralités. — Soit T un groupe commutatif sans torsion à un nombre fini de générateurs et (X, μ) un T–espace, avec action de T régulière au sens où il existe un domaine fondamental D pour lequel on ait l'isomorphisme de T–espaces $L^2(X, d\mu) \simeq l^2(T, L^2(D, d\mu))$. Si T' est le dual topologique de T (*i.e.* le tore des caractères de T), l'espace $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$ se décompose sous l'action de T (induite par celle de T sur X) en une somme (intégrale hilbertienne) de composantes isotypiques : $\mathcal{H} = \int_{T'} \mathcal{H}_p dp$ avec $\mathcal{H}_p \simeq L^2(D)$. Tout opérateur borné A de $\mathcal{H}$ commutant à l'action de T laisse stable chaque composante $\mathcal{H}_p$ et s'écrit donc comme intégrale hilbertienne $A = \int_{T'} A_p dp$.

Si A est non borné (comme c'est le cas des hamiltoniens H), la décomposition précédente est valable aussi, mais en un sens que précise la théorie de Floquet dans le cas où T est un réseau de $\mathbf{R}^n$, opérant par translations sur $\mathbf{R}^n$ lui-même. Dans la théorie de la diffusion par une surface, on aura besoin en fait d'une réduction de Floquet avec paramètres, la variable transverse aux directions de la structure périodique.

B. Réduction classique : désintégration mesurable. — Soit T un réseau de $\mathbf{R}^n$ (espace de configuration). Son réseau dual T^* est la partie du dual de $\mathbf{R}^n$ (espace des impulsions, noté encore $\mathbf{R}^n$) défini par $\{\tau \in \mathbf{R}^n, <\tau, T> \subset \mathbf{Z}\}$ (où $<\ ,\ >$ désigne le crochet de dualité). Le tore des caractères T' (dual du groupe topologique T) s'identifie alors avec le tore $\mathbf{R}^n/T^*$, le crochet de dualité sur $T' \times T$ étant induit par celui de $\mathbf{R}^n$ avec son dual. On note par F_T, F_{T^*} des polytopes fondamentaux pour l'action de T, T^* (*resp.*) sur $\mathbf{R}^n$.

On a les isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc}
L^2(\mathbf{R}^n) & \underset{i_1}{\simeq} & L^2(T\times\mathbf{R}^n/T) & \underset{j_1}{\simeq} & L^2(T\times F_T)\\
 & & \downarrow i_2 & & \downarrow j_2\\
 & & l^2(T)\otimes L^2(\mathbf{R}^n/T) & \simeq & l^2(T)\otimes L^2(F_T)\\
 & & \downarrow i_3 & & \downarrow j_3\\
 & & L^2(\mathbf{R}^n/T^*)\otimes L^2(\mathbf{R}^n/T) & \simeq & L^2(\mathbf{R}^n/T^*)\otimes L^2(F_T)
\end{array}$$

où i_1 est induit par l'isomorphisme mesuré de $\mathbf{R}^n$ sur $T\times\mathbf{R}^n/T$, $(i,j)_2$ par les propriétés de produit d'espace mesuré/produit tensoriel d'espace L^2, $(i,j)_3$ par la transformation de Fourier sur le premier facteur.

Les isomorphismes sont T–équivariants; sur $L^2(\mathbf{R}^n/T^*)\otimes L^2(\mathbf{R}^n/T)$, on a notamment $t.(\varphi(p)\psi(x)) = e^{i<t,p>}\varphi(p)\psi(x)$, ce qu'on peut réécrire avec les notations de la partie précédente :

$$L^2(\mathbf{R}^n/T^*)\otimes L^2(\mathbf{R}^n/T) = \int_{\mathbf{R}^n/T^*}\mathcal{H}_p dp, \mathcal{H}_p = L^2(\mathbf{R}^n/T).$$

C. Désintégration C^∞. — Supposons l'ensemble des faces du polytope F_T partitionné en paires ordonnées $f=(f_1,f_2)$ et un système de générateurs G de T choisi tel qu'à chaque couple f de faces de T soit associé un t_f de G vérifiant $f_2 = t_f f_1$.

L'isomorphisme $j_1 i_1$ transforme $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ (cœur pour la laplacien Δ) en le sous–espace des suites $(\varphi_t)_{t\in T}$ à décroissance rapide de $l^2(T, C^\infty(F_T))$, vérifiant les conditions de périodicité

$$(\varphi_t(x+t_f) = \varphi_{t+t_f}(x), x\in f_1)_{f\in G}.$$

Appliquant la transformée de Fourier j_3, ces suites sont transformées en fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$, T^*–périodique et à valeurs dans $C^\infty(F_T)$, vérifiant les conditions de périodicité

$$(\psi(p)(x+t_f) = e^{-i<p,t_f>}\psi(p)(x), x\in f_1)_{f\in G},$$

qui permettent de les interpréter comme sections du fibré $L_{\xi_p}\to\mathbf{R}^n/T$ associé au caractère $\chi_p(t) = e^{i<p,t>}$ de T. Pour se ramener à des fonctions T–périodiques (et donc des fonctions définies sur le tore $\mathbf{R}^n/T$), on fait opérer finalement la transformation de jauge $J : \psi(p)(x)\to e^{i<p,x>}\psi(p)(x)$; la T^*–périodicité disparaît, remplacée par la quasi–périodicité

$$(\psi(p+\tau)(x) = e^{i<\tau,x>}\psi(p)(x))_{\tau\in T^*}.$$

Un tel ψ définit une section d'un fibré ξ de base T' et de fibre $C^\infty(\mathbf{R}^n/T)$, quotient du fibré trivial $\tilde\xi : \mathbf{R}^n\times C^\infty(\mathbf{R}^n/T)\to\mathbf{R}^n$ par T^* qui opère sur l'espace total de $\tilde\xi$ suivant $\tau.(p,\psi) = (p+\tau, J_\tau\psi)$, où J_τ est défini par $J_\tau\psi(x) = e^{i<\tau,x>}\psi(x)$.

Il est aisé de suivre les transformations du laplacien à travers ces isomorphismes successifs : Δ se transforme via $j_3 j_1 i_1$ en Δ (sur la variable x), puis sur $C^\infty(\tilde\xi)$ en $(D_x+p)^2$ (où D_x est le vecteur de dérivation $i\,\mathrm{grad}_x$), opérateur T^*–équivariant qui définit un opérateur, noté $(D_x+p)^2_\xi$ sur l'espace des sections $C^\infty(\xi)$, opérateur induit par un endomorphisme du fibré ξ.

Pour la norme L^2, le complété de $C^\infty(\xi)$ s'identifie à $L^2(T', L^2(\mathbf{R}^n/T)) = \int_{T'} L^2(\mathbf{R}^n/T)dp$ et l'opérateur $(D_x + p)^2_\xi$ est noté habituellement (et abusivement!) $\int_{T'}(D_x + p)^2 dp$.

Quant à l'opérateur de multiplication par un potentiel Q T–périodique, il se transforme en l'opérateur de $C^\infty(\xi)$, induit par l'endomorphisme du fibré ξ de multiplication par Q.

D. Réductions avec paramètres. — Soit T un réseau d'un hyperplan $\mathbf{R}^n_x$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$, avec comme droite othogonale $\mathbf{R}_y$ à cet hyperplan. On a $L^2(\mathbf{R}^{n+1}) = L^2(\mathbf{R}^n_x) \otimes L^2(\mathbf{R}_y)$ et $\Delta = D^2_x + D^2_y$.

De manière analogue aux sections précédentes, on est amené à définir le fibré trivial $\tilde{\xi}$ sur $\mathbf{R}^n$ de fibre $C_0^\infty(C_T)$ où C_T est le cylindre $\mathbf{R}^n/T \times \mathbf{R}_y$. Via l'action de T^* sur $\tilde{\xi}$ définie par $\tau \bullet \psi(x,y) = e^{i<\tau,x>}\psi(x,y)$, on introduit le fibré $\xi \to \mathbf{R}^n/T^*$, de fibre $C_0^\infty(C_T)$.

Sur l'espace des sections $C^\infty(\tilde{\xi})$, l'hamiltonien H induit l'opérateur $(D_x + p)^2 + D^2_y + V$, T^*–équivariant et définissant donc $((D_x + p)^2 + D^2_y + V)_\xi$ sur $C^\infty(\xi)$.

E. Spectres L^2 des hamiltoniens H_p. — Soit p dans $\mathbf{R}^n$, fixé dans cette section. L'opérateur $H_{0,p}$ de $L^2(C_T)$ se réduisant via transformée de Fourier à une somme d'oscillateurs libres unidimensionnels $(\oplus_{\tau\in T^*} D^2_y + (\tau+p)^2)$, sa théorie spectrale L^2 est simple :

PROPOSITION 1.1. — *Le spectre de $H_{0,p}$ est l'intervalle $[E_p, +\infty)$ où $E_p = \inf_{\tau\in T^*}(\tau+p)^2$, purement absolument continu, de multiplicité localement finie, avec des sauts sur l'ensemble des seuils $S_p = \{(\tau+p)^2, \tau \in T^*\}$ et tendant vers l'infini à l'infini.*

La théorie spectrale de $H_p = H_{0,p} + V$ se déduit de celle de $H_{0,p}$ par des arguments (fins mais standard) de théorie des perturbations : V est une petite perturbation de $H_{0,p}$ au sens où V est $H_{0,p}$–compact :

PROPOSITION 1.2. — *Le spectre essentiel de H_p est $[E_p, +\infty)$, purement absolument continu. Le spectre ponctuel de H_p est éventuellement non vide, mais son ensemble dérivé est inclus dans l'ensemble des seuils S_p.*

2. La surface spectrale de l'hamiltonien $-d^2/dy^2$

La résolvante $R_0(\lambda) = (-d^2/dy^2 - \lambda)^{-1}$, $(\Im m\lambda > 0)$ a pour noyau $e^{i\sqrt{\lambda}|y-y'|}/2\sqrt{\lambda}$, $(\Im m\sqrt{\lambda} > 0)$, qui est une fonction méromorphe (y, y' fixés) sur la surface de Riemann Σ_2 associée à la fonction $\sqrt{}$ ($\Sigma_2 = \mathbf{C}_z$, revêtement ramifié de degré 2 de $\mathbf{C}$ via la projection $\pi_2(z) = z^2$). On désigne par feuillet physique l'image FP de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ par la section s du revêtement : $\Sigma_2 \to \mathbf{C}$ telle que $\Im m s > 0$.

Si $\mathcal{H}$ est un espace de fonctions définies sur un espace métrique (X, d) pointé en x_0, $\mathcal{H}_a (a \in \mathbf{R})$ note l'espace des fonctions f sur X telles que $e^{ad(\cdot, x_0)} f$ soit dans $\mathcal{H}$. On introduit les espaces $\mathcal{H}_{+\infty}$ et $\mathcal{H}_{-\infty}$ définis par $\mathcal{H}_{-\infty} = \cap_a \mathcal{H}_a$ et $\mathcal{H}_\infty = \cup_a \mathcal{H}_a$ (on pourrait aussi bien prendre pour $\mathcal{H}_{+\infty}$ l'espace des éléments de $\mathcal{H}$ à support compact et pour $\mathcal{H}_{-\infty}$ l'espace des fonctions localement dans $\mathcal{H}$). Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathcal{H}_a$, ainsi que $\mathcal{L}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_{-a})$ est un espace de Banach (isométrique a $\mathcal{H}$), alors que pour $a = -\infty$, on prendra la topologie limite inductive sur $\mathcal{H}_{+\infty}$, la topologie "locale" sur $\mathcal{H}_{-\infty}$ et la topologie de la convergence simple induite à partir de celles-ci sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{+\infty}, \mathcal{H}_{-\infty})$.

En tant que fonction sur Σ_2 à valeurs opérateurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}))$, $(R_0(\lambda), \lambda \in FP)$ n'a pas de prolongement holomorphe au-delà de ∂FP, alors que, pour $a > 0$, il y a prolongement à $FP_a = \{\Im m z > -a\}$ si on considère $R_0(\lambda)$ comme opérateur de $\mathcal{H}_a$ dans $\mathcal{H}_{-a}$. La surface Σ_2 est dite surface spectrale de l'hamiltonien $-d^2/dy^2$.

PROPOSITION 2.1. — *i) Soit a dans $[0, \infty]$. La résolvante $R_0(\lambda)$, considérée comme fonction holomorphe sur $\{\Im m\lambda > 0\}$ à valeurs opérateur de H^s_a dans H^{s+2}_{-a}, se prolonge méromorphiquement à FP_a.*

ii) La fonction R_0 définie sur FP_a $(a > 0)$ a un unique pôle en $z = 0$, d'ordre 1 et avec comme résidu le projecteur de rang 1 sur l'espace des fonctions constantes.

Preuve. — La preuve de i) est laissée au lecteur. Quant au ii), il résulte de l'écriture
$$\frac{e^{iz|y-y'|}}{z} = \frac{1}{z} + \int_{[0, i|y-y'|]} e^{\zeta z} d\zeta. \qquad \square$$

3. Théorie de Fredholm

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs compacts de $\mathcal{H}$. Si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, la suite $s(T)$ des valeurs singulières de T est celle des valeurs propres de $\sqrt{T^*T}$ et, pour $k \in [1, \infty]$, l'espace $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k(\mathcal{H}) = s^{-1}(l_k(\mathrm{N}))$, normé par $||T||_k = ||s(T)||_{l_k}$, est un Banach (habituellement nommé classe de Schatten d'ordre k, on a $\mathcal{I}_\infty = \mathcal{K}$). L'espace $\mathcal{I}_f$ des opérateurs de rang fini est dense dans $(\mathcal{I}_k, ||\ \ ||_k)$. On notera $\mathcal{I}_{k+}$ l'union $\cup_{\epsilon>0}\mathcal{I}_{k+\epsilon}$.

Sur $\mathcal{I}_1$ (l'espace des opérateurs tracables) sont définies les applications tr et $\det(1+.)$, prolongement continu (pour la norme $||\ \ ||_1$) des mêmes applications définies naturellement sur $\mathcal{I}_f$. On a une application (notée W_k par référence aux produits de Weierstrass dans la théorie des produits infinis) de $\mathcal{I}_k$ ($k < \infty$) dans $\mathcal{I}_1$ définie par

$$1 + W_k(T) = (1+T)\exp\Big(\sum_{i=1}^{\lceil k \rceil}(-1)^i\frac{T^i}{i}\Big),$$

où $\lceil k \rceil$ désigne le plus grand entier strictement inférieur à k, ce qui permet d'introduire le déterminant de Fredholm $\det_k$ sur $\mathcal{I}_k$, déterminant défini par

$$\det_k(1+T) = \det(1 + W_k(T)),$$

on utilisera la notation D_k pour $D_k(T) = \det_k(1+T)$.

Certaines propriétés d'algèbre multi–linéaire en dimension finie restent vraies dans les classes de Schatten. Notamment, pour A tracable et B borné, on a

$$\det(1 + AB) = \det(1 + BA), \tag{3.1}$$

et les applications tr, D_k, W_k sont holomorphes au sens suivant : pour tout entier n, tout ouvert U de C^n et toute application holomorphe F de U dans $\mathcal{I}_?$, alors $\mathrm{tr}\, F, D_1 F, \ldots$ sont aussi holomorphes.

LEMME 3.1. - *Soit $U \subset \mathrm{C}, F : U \to \mathcal{I}_1$ méromorphe à partie polaire de rang fini. Alors, les applications $\mathrm{tr}\, F, \det F$ sont méromorphes sur U, avec des singularités aux mêmes points que F, d'ordre au plus égal au produit de l'ordre de F par la dimension de l'espace polaire.*

Preuve. — Le lemme est bien connu dans le cadre de la dimension finie. En général, pour $\lambda \in U$, il existe un voisinage V_λ sur lequel F est de la forme $F = T + P$ où T est de rang fini (d'image incluse dans l'espace de dimension finie $\mathcal{H}_0$, on notera π_0 la projection sur $\mathcal{H}_0$) et P est de $\mathcal{I}_1$–norme au plus égale à $1/2$. On a alors sur V_λ :

$$\mathrm{tr}\, F = \mathrm{tr}\, T + \mathrm{tr}\, P = \mathrm{tr}\, \pi_0 T \pi_0 + \mathrm{tr}\, P \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\det(1+F) &= \det[(1 + T(1+P)^{-1})(1+P)] \\ &= \det(1 + T(1+P)^{-1})\det(1+P) \\ &= \det(1 + \pi_0 T(1+P)^{-1}\pi_0)\det(1+P).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Le second terme (facteur *resp.*) dans (3.2) ((3.3) *resp.*) est régulier sur V_λ, alors que pour le premier, on est ramené à une situation de dimension finie. □

COROLLAIRE 3.2. — *Soit $F : U(\subset \mathrm{C}) \to \mathcal{I}_k$ holomorphe. Alors $\mathrm{tr}\, W_k(F)$ et $D_k F$ sont holomorphes sur $\mathcal{I}_k$.*

On en déduit le corollaire suivant, qui précise la théorie de Fredholm :

COROLLAIRE 3.3. — *Soit $F : U \to \mathcal{I}_k$ holomorphe. S'il existe λ_0 tel que $1 + F(\lambda_0)$ soit inversible, alors $(1+F)^{-1}$ est méromorphe sur U, de la forme E/d avec E (à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) et d (à valeurs dans $\mathbf{C}$) holomorphes sur U. Les parties polaires de $(1+F)^{-1}$ sont de rang fini.*

Preuve. — Il suffit de prendre $d = D_k(F)$ et $E = D_k(F)(1+F)^{-1}$. □

LEMME 3.4. — *Soit T une fonction méromorphe sur un voisinage de 0, à valeurs opérateurs à trace, avec une partie polaire d'ordre l à l'origine. Si l'espace engendré par les images des parties polaires de T à l'origine est de dimension finie d, il existe un entier j, au plus égal à ld, tel que $z^j \det(1+T(z))$ soit holomorphe à l'origine et que l'inverse $(1+T(z))^{-1}$ de la forme $z^j \det(1+T(z))S(z)$ avec S holomorphe au voisinage de 0.*

Preuve. — Nous supposerons, pour éviter quelques notations, que $l = 1$. Ecrivons $T(z) = 1 + R/z + H(z)$ avec R opérateur de rang fini et H fonction holomorphe au voisinage de l'origine, à valeurs opérateurs à trace. Si π désigne la projection orthogonale sur l'image de R, on a :

$$1 + T(z) = (1 + \pi/z)(1 + A(z)),$$

avec A holomorphe au voisinage de l'origine. On en déduit

$$\det(1+T(z)) = \det(1+\pi/z)\det(1+A(z)) = z^{-l}(1+z)^l \det(1+A(z))$$

$$(1+T(z))^{-1} = \frac{(1+z)^l \det(1+A(z))}{z^l \det(1+T(z))}(1+A(z))^{-1}(1+(z-1)/(z+1)\pi),$$

ce qui permet de conclure avec l'aide du lemme précédent. □

Il est utile de considérer les classes $\mathcal{I}_k(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ où $\mathcal{H},\mathcal{H}'$ sont deux espaces de Hilbert, classes analogues aux classes (d'idéaux) $\mathcal{I}_k(\mathcal{H})$: la suite $s(T)$ des valeurs singulières d'un opérateur compact T de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est la suite des valeurs propres de $\sqrt{TT^*}$ et alors $\mathcal{I}_k(\mathcal{H},\mathcal{H}') = s^{-1}(l_k)$ (on vérifie que les propriétés l_k de $s(T)$ et $s(T^*)$ sont identiques).

On peut alors formuler la proposition suivante, qui résulte de l'asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres du laplacien (avec conditions au bord si nécessaire) sur une variété compacte X et qui précise les théorèmes d'injection compacte de Rellich dans l'échelle des espaces de Sobolev $\mathcal{H}^s(X)$:

PROPOSITION 3.5. — *i) Soit X une variété riemannienne compacte à bord de dimension n et Δ_b le laplacien sur X (avec condition au bord b de Dirichlet ou Neumann). La résolvante $(1+\Delta_b)^{-1}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{I}_{n/2+}(L^2(X))$.*

ii) Soit K compact d'une variété X. L'injection $\mathcal{H}^s(K) \to \mathcal{H}^t(X) (t > s)$ est dans la classe $\mathcal{I}_{n/(t-s)+}(\mathcal{H}^s(K), \mathcal{H}^t(X))$.

4. La variété d'impulsion–énergie ramifiée

Soit $\tilde{V}$ la partie de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{T^*}$ définie par les équations

$$\lambda - (\tau + p)^2 = z_\tau^2 \quad , \quad \tau \in T^*$$

où $\sigma = (p, \lambda, (z_\tau)_{\tau \in T^*})$ décrit la variable générique du produit $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{T^*}$.

Sur $\tilde{V}$, soient $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$ la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{T^*}$ et $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par la famille de parties ouverts de la forme $B_q = \{\sigma \in B \times \mathbf{C}^{T^*}, q(\mathrm{sgn}(\Im m z_\tau(\sigma))) = q\} \cap \tilde{V}$ où B est un ouvert borné de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, q une queue de suite de $\{\pm\}^{T^*}$ et $q(\alpha_\tau)$ la queue de la suite (α_τ) de $\{\pm\}^{T^*}$.

La topologie $\mathcal{T}$ est strictement plus fine que $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$: tout pavé ouvert $P = A_1 \times \ldots \times A_m \times \mathbf{C}^{T^* \setminus F}$ (F partie finie de T^*, $m = n + 1 + \#F$) a une trace sur $\tilde{V}$ qui est réunion de parties de type B_q, mais un B_q n'est pas ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$: sinon il existerait un pavé P tel que $P \cap \tilde{V} \subset B_q$, ce qui n'est pas. En fait, $(\tilde{V}, \mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ est connexe, alors que $(\tilde{V}, \mathcal{T})$ ne l'est pas, l'ensemble $\pi_0(\tilde{V}, \mathcal{T})$ de ses composantes connexes (coïncidant avec ses composantes connexes par arcs) étant paramétré par l'ensemble des queues des suites de $\{\pm\}^{T^*}$.

DÉFINITION 4.1. — *a. $\tilde{V}_+$ est la composante connexe de $(\tilde{V}, \mathcal{T})$ correspondant à la queue + de la suite constante $(+)_{\tau \in T^*}$.*

b. Un borné de $\tilde{V}_+$ est toute partie de $\tilde{V}_+$ incluse dans une partie de type B_+.

Si F est une partie de T^*, on définit de manière analogue la variété $\tilde{V}_{F,+}$ (qui est connexe si F est finie) dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^F$ par les équations $(\lambda - (\tau + p)^2 = z_\tau^2)_{\tau \in F}, (\lambda, p, (z_\tau)) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^F$. Si $F_1 \subset F_2$, on a une projection naturelle (notée π_{F_1, F_2}) de $\tilde{V}_{F_2,+}$ sur $\tilde{V}_{F_1,+}$. Si $F = T^*$, on omettra l'indice T^*.

LEMME 4.2. — *Soit B un borné de $\tilde{V}_+$. Il existe une partie finie $F(B)$ de T^* telle que la restriction de $\pi_{F(B)}$ à B soit injective.*

Preuve. — Soit $H_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}, |\mathrm{Arg} z - \pi/2| > \pi/2 + \varepsilon\}$ ($\mathrm{Arg} z$ est la fonction argument convenablement définie). La partie B étant bornée, il existe une partie finie F telle que, pour $\tau \notin F, \sigma \in B, \lambda(\sigma) - (\tau + p(\sigma))^2 \in H_\varepsilon$. On en déduit, pour $\sigma \in B, \tau \notin F, z_\tau(\sigma) = \sqrt{\lambda(\sigma) - (\tau + p(\sigma))^2}$, où $\sqrt{}$ note la racine carrée définie sur H_ε telle que $\Im m \sqrt{i} > 0$. L'injectivité de π_F restreint à B en résulte. □

Le lemme précédent permet de définir une structure de variété analytique sur $\tilde{V}_+$: un système de cartes est $\{(B, \pi_{F(B)}), B$ ouvert borné de $\tilde{V}_+\}$, avec structure analytique sur $\pi_{F(B)}(B)$ induite par celle de $\tilde{V}_{F(B),+}$ (qui est une variété algébrique). Si B_1 et B_2 sont deux bornés de $\tilde{V}_+$, alors, sur l'intersection $B_1 \cap B_2$, l'injectivité de $\pi_{F(B_1)}$ et $\pi_{F(B_2)}$

implique celle de $\pi_{F(B_1)\cup F(B_2)}$ et on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_1 \cap B_2 & \to & \tilde{V}_{F(B_1),+} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{V}_{F(B_2),+} & \to & V_{F(B_1)\cup F(B_2),+} \end{array}$$

qui donne la compatibilité analytique de la famille de cartes $(B, \pi_{F(B)})$.

Dans la suite, $\tilde{V}_+$ sera supposée munie de cette structure analytique et on utilisera la scholie suivante :

SCHOLIE 4.3. — *Soit Z une variété complexe (de dimension finie ou non, comme dans le cas $Z = \mathcal{L}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_{-a})$) et U un ouvert de $\tilde{V}_+$. La fonction $f : U \to Z$ est analytique (méromorphe resp.) si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe un voisinage borné ouvert B de x dans U tel que $f_{|B}$ soit de la forme $f_{|B} = g_B \circ \pi_{F(B)}$ où g_B est une fonction analytique (méromorphe resp.) sur un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{F(B)}$ contenant $\pi_{F(B)}(B)$.*

Les fonctions $(\sqrt{\lambda - (\tau + p)^2})_{\tau \in T^*}$ sont bien définies sur $\tilde{V}P = \{(p, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \{\Im m\lambda > 0\}\}$ en imposant qu'elles soient à valeurs de partie imaginaire positive. Cela permet de définir une section s de $\tilde{V} \xrightarrow{(p,\lambda)} \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ sur $\tilde{V}P$ et, si on ne distingue pas $\tilde{V}P$ et son image par s dans $\tilde{V}$ (on nommera $\tilde{V}P$ feuillet d'impulsion–énergie physique), ces fonctions racines carrées se prolongent en des fonctions holomorphes sq_τ à $\tilde{V}_+$: $\mathrm{sq}_\tau(\sigma) = z_\tau(\sigma)$. On notera (un peu abusivement) les fonctions sq_τ encore $\sqrt{\lambda - (\tau + p)^2}$ $(= \sqrt{\lambda(\sigma) - (\tau + p(\sigma))^2})$.

Sur $\tilde{V}_{F,+}$, on a aussi les fonctions racines carrées $(\mathrm{sq}_{F,\tau})_{\tau \in F}$, liées aux précédentes de la manière suivante : si B est un borné de $\tilde{V}_+$, on a sur $\pi_{F(B)}(B)$ dans $\tilde{V}_{F(B),+}$:

$$\mathrm{sq}_{F(B),\tau} \circ \pi_{F(B)} = \begin{cases} \mathrm{sq}_\tau & \text{si } \tau \in F(B), \\ \sqrt{\lambda \circ \pi_{F(B)} - (\tau + p \circ \pi_{F(B)})^2} & \text{si } \tau \notin F(B), \end{cases}$$

où la fonction $\sqrt{}$ est la branche habituelle de racine carrée sur $\mathbf{C} \setminus (-i\mathbf{R})$.

Le réseau T^* opère sur $\tilde{V}_+$: $\rho \bullet (p, \lambda, (z_\tau)) = (p + \rho, \lambda, (z_{\tau+\rho}))$, $\rho \in T^*$. On notera par V le quotient $\tilde{V}_+/T^*$.

DÉFINITION 4.4. — *La variété V est appelée la variété d'impulsion–énergie ramifiée de l'hamiltonien d'hypersurface T–périodique $-\Delta + Q$.*

Remarque 4.5. — La variété $\tilde{V}$ ne dépend que de l'hamiltonien H à l'infini dans les directions non périodiques *i.e.* $H_\infty = \Delta_{\mathbf{R}^n} - d^2/dy^2$. On se reportera à l'appendice pour des extensions.

Les fonctions racines carrées sq_τ, définies sur $\tilde{V}_+$, ne passent pas à V, ni ne s'identifient à des sections de fibrés en droites complexes sur V. Néanmoins le lieu des ramifications $\tilde{B}L = \cup_{\tau \in T^*} \{\mathrm{sq}_\tau = 0\}$ est T^*–invariant et on peut le définir comme l'ensemble des zéros du produit infini $\Delta_0(p, \lambda) = \prod_{\tau \in T^*} (\tau + p)^2 - \lambda$, qu'il faut comprendre comme le déterminant (obtenu par régularisation ζ) de l'hamiltonien

$(D_x + p)^2 - \lambda$ (*cf.* appendice). Le déterminant $\delta_\infty(\sigma) = \det(\Delta_p - \lambda)$ est T^*–invariant : on désignera pareillement la fonction déduite sur le quotient $\mathbf{C}^n/T^* \times \mathbf{C}$.

DÉFINITION 4.6. — *Le quotient $BL = \tilde{B}L/T^*$ est appelé variété de Bloch.*

5. Résolvantes $(H_p - \lambda)^{-1}$

Cette partie est consacrée à l'étude du prolongement méromorphe de la famille $(A_p - \lambda)^{-1}(A = H_0$ ou $H))$ comme fonction de $(p, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \{\Im m\lambda > 0\}$ $(= \tilde{V}P$, le feuillet d'impulsion–énergie physique) à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = L^2(C_T)$.

On notera, pour $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, par $A_a(a \in [0, \infty])$ l'opérateur induit de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_{-a})$, $\tilde{V}_a$ la composante connexe (qui est T^*–invariante) de $\tilde{V}P$ dans $\{\sigma \in \tilde{V}_+, \Im m z_\tau(\sigma) > -a\}$ et V_a la variété quotient $\tilde{V}_a/T^*$

LEMME 5.1. — *Soit B ouvert connexe borné de $\tilde{V}_+$ intersectant $\tilde{V}P$. Il existe $a = a(B)$ tel que $B \subset \tilde{V}_a$.*

Preuve. — Si B est borné, on vérifie que $\inf_{\sigma \in B} \Im m(z_\tau(\sigma)) = m(B)$ est fini : on prendra $a(B) = |m(B)| + \varepsilon$ où ε est un nombre strictement positif quelconque. □

On vérife $\cup_{a \in \mathbf{R}^+} \tilde{V}_a = \tilde{V}_+$ et $\tilde{V}_a = \cup B$ où cette dernière union porte sur tous les ouverts bornés inclus dans $\tilde{V}_a$.

PROPOSITION 5.2. — *i) La résolvante $(R_0)_a$, définie par $R_0(\sigma)_a = (H_{0,p} - \lambda)_a^{-1}, \sigma = (p, \lambda) \in \tilde{V}P$ admet un prolongement méromorphe (noté encore $(R_0)_a$), à $\tilde{V}_a$. Son ensemble singulier est la variété de Bloch $\tilde{B}L$ d'équation $\delta_\infty = 0$. La fonction à valeur opérateur $\delta_\infty R_0$ est holomorphe sur $\tilde{V}$.*

ii) Sur la surface de Riemann $\tilde{V}_p \cap \tilde{V}_a$, les pôles de $(R_0)_a$ sont aux points de ramification $\{(p, (p + \tau)^2, \ldots), \tau \in T^*\}$, avec parties polaires de rang fini.

Preuve. — i) On a vu (1.E) que $H_{0,p} \simeq \oplus_{\tau \in T^*} D_y^2 + (\tau + p)^2$. D'après l'expression explicite du noyau de $R_0(p, \lambda)$, on a :

$$R_0(\sigma)(y, y') = \bigoplus_{\tau \in T^*} \frac{e^{iz_\tau(\sigma)|y - y'|}}{iz_\tau(\sigma)} \quad , \quad \sigma = s(p, \lambda) \in \tilde{V}P.$$

La méromorphie de chacune des composantes (et donc celle) de $(R_0)_a$ sur $\tilde{V}_a$ résulte de la scholie de la partie 4, appliquée aux ouverts bornés inclus dans $\tilde{V}_a$. L'assertion concernant les pôles découle des propriétés de prolongement de $(d^2/dy^2 - \lambda)_a^{-1}$ du feuillet physique FP $(= \{\Im m\lambda > 0\}$ dans le cas de l'hamiltonien unidimensionnel) à la surface Σ_2 de la proposition 2.1. □

Pour obtenir le prolongement méromorphe de $R(p, \lambda)_a = (H_p - \lambda)_a^{-1}$, on utilise la théorie de Fredholm appliquée à la première formule de la résolvante :

$$R(p,\lambda) = R_0(p,\lambda)(1 + QR_0(p,\lambda))^{-1}, (p,\lambda) \in \tilde{V}P.$$

D'après la proposition 2.1, $R_0(\sigma) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}^2_{-a}), \sigma \in \tilde{V}_a$. L'injection de $\mathcal{H}^2(\mathrm{supp}Q)$ dans $\mathcal{H}_{-a}$ est de classe $\mathcal{I}_{n/2+}(\mathcal{H}_a)$, ainsi $QR_0(\sigma)$ est de classe $\mathcal{I}_{n/2+}$. En appliquant la théorie de Fredholm, on a donc $(1 + QR_0(\sigma))^{-1} = \tilde{S}_a(\sigma)/\tilde{d}_a(\sigma)$ dans $\mathcal{H}_a$, avec $\tilde{S}_a$ et $\tilde{d}_a$ définies sur $\tilde{V}_{+,a}$: $\tilde{d}_a = \det_{(n+1)/2}(1 + QR_0(\sigma))$.

THÉORÈME 5.3. — *Soit $a > 0$. La résolvante $R(p,\lambda) = (H_p - \lambda)^{-1}$, définie sur $\tilde{V}P$ et à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_{-a})$, admet un prolongement (noté R_a) méromorphe à $\tilde{V}_a$, avec parties polaires de rang fini.*

Si χ est une fonction C^∞ sur C_T, à support compact et valant 1 sur le support de Q, on a

$$\tilde{d}_a(\sigma) = \det_{(n+1)/2}(1 + QR_0(\sigma)\chi)_{\mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_a}, \sigma \in \tilde{V}_{+,a}.$$

L'opérateur $QR_0(\sigma)\chi$ est borné dans $\mathcal{H}$, ainsi

$$\tilde{d}_a(\sigma) = \det_{(n+1)/2}(1 + QR_0(\sigma)\chi)_{\mathcal{H} \to \mathcal{H}}$$

et il existe une fonction $\tilde{d}$ définie sur $\tilde{V}_+$ tout entière ($\tilde{d}_{|\tilde{V}_a} = \tilde{d}_a$) et dont l'ensemble des zéros contient celui des singularités de R_∞, mises à part celles de $R_{0,\infty}$; ce n'est évidemment pas le cas de la fonction à valeurs opérateurs R_a.

COROLLAIRE 5.4. — *Il existe une fonction holomorphe $\tilde{d}$ sur $\tilde{V}_+ \setminus \tilde{B}L$ et pour tout a, une fonction holomorphe $\tilde{S}_a$, définie sur $\tilde{V}_a \setminus \tilde{B}L$ et à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(C_T))_a$, telle que $R_a = \tilde{S}_a/\tilde{d}$ sur $\tilde{V}_a \setminus \tilde{B}L$. Ces fonctions se prolongent méromorphiquement à $\tilde{V}_a$. On a le diagramme commutatif pour $a < a'$*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_a & \hookrightarrow & \tilde{V}_{a'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}(L^2(C_T))_a & \hookrightarrow & \mathcal{L}(L^2(C_T))_{a'} \end{array}.$$

Si $n > 1$, le déterminant $\tilde{d}_a$, qui décrit le lieu de singularités de R en dehors de $\tilde{B}L$, a des singularités de type essentiel sur la variété de Bloch, introduites par les facteurs exponentiels dans la régularisation des déterminants de Fredholm $\det_p (p > 1)$.

On a, à partir de la première formule de la résolvante :

$$R = R_0(1 - QR_0)(1 + (QR_0)^2)\dots(1 + (-1)^{k+1}(qR_0)^{2^k})^{-1}.$$

Si $k(n)$ désigne le plus petit entier k tel que $2^{k+1} > n$, la fonction $(QR_0(\sigma))^{2^{k(n)}}$ est méromorphe, à valeurs opérateurs à trace avec parties polaires de rang fini. Notons par $\tilde{D}_n$:

$$\tilde{D}_n = \det(1 + (-1)^{k(n)+1}(qR_0)^{2^{k(n)}}) = \det(1 + (-1)^{k(n)+1}(qR_0)^{2^{k(n)}}\chi), \tag{5.1}$$

fonction qui se prolonge à $\tilde{V}$ tout entier.

PROPOSITION 5.5. — *Soit U un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$ et $\tilde{U}_a$ la composante connexe de $\pi^{-1}(U)$ dans $\tilde{V}_a$ intersectant le feuillet physique. Il existe un entier $j = j(U)$ et une fonction holomorphe C_a sur $\tilde{U}_a$ tels que $\tilde{d}^j_\infty \tilde{D}_n$ soit holomorphe sur $\tilde{U}_a$ et $R_a = C_a/(\tilde{d}^j_\infty \tilde{D}_n)$ sur $\tilde{U}_a$.*

Preuve. — La proposition découle directement de l'écriture (5.1), de la proposition 5.2 et du lemme 3.4. □

La multiplicité des croisements des valeurs propres des opérateurs Δ_p n'étant pas bornée, les entiers $j(U)$ doivent ne pas être majorés. D'autre part, la sous-variété d'équation $\tilde{D}_n = 0$ contient strictement (éventuellement) la variété $d_\infty \tilde{d} = 0$.

6. La résolvante sur la variété d'impulsion-énergie ramifiée

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathcal{C}^\infty(C_T) & \hookrightarrow & \mathbf{C}^n \times \mathcal{C}^\infty(C_T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}^n & \hookrightarrow & \mathbf{C}^n \end{array}$$

avec les actions par translation de T^* sur $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ et via $J_.$ sur $\mathcal{C}^\infty(C_T)$ est un T^*–diagramme. On en déduit (comme au 2.C) un fibré $\xi_{\mathbf{C}^n/T^*}$ de base $\mathbf{C}^n/T^*$ tel que, si i note l'injection $\mathbf{R}^n/T^* \hookrightarrow \mathbf{C}^n/T^*$, on ait $i^*\xi_{\mathbf{C}^n/T^*} = \xi_{\mathbf{R}^n/T^*}$. Si π note (indifféremment) les projections de $\tilde{V}_+$ sur V, de $\tilde{V}_+$ sur $\mathbf{C}^n \times \{\Im m\lambda > 0\}$, de $\mathbf{C}^n \times \{\Im m\lambda > 0\}$ sur $\mathbf{C}^n$ (*etc.*), on définit les fibrés (notés de manière générique ξ) image–réciproque $\pi^*\xi$ de base $\tilde{V}_+$, $\tilde{V}_+$, $\mathbf{C}^n \times \{\Im m\lambda > 0\}$ (*etc.*), et ce de manière naturelle au sens où (par exemple), si $\pi_{\tilde{V}_+,V}$ désigne la projection de $\tilde{V}_+$ sur V, on a $\pi^*_{\tilde{V}_+,V}\xi_V = \xi_{\tilde{V}_+}$. Les fibrés $\xi_a, \mathcal{L}(\xi)_a$ sont introduits de manière analogue. On notera le diagramme commutatif suivant (encore un!), si $a < a'$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}(\xi_2)_a & \hookrightarrow & \mathcal{L}(\xi_2)_{a'} & \hookrightarrow & \mathcal{L}(\xi_2)_\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_a & \hookrightarrow & V_{a'} & \hookrightarrow & V \end{array}$$

Si $\mathbf{C}^n/T^*$ désigne le tore complexifié de T', on notera de la même manière $(\xi, \xi_2 \ldots)$ les fibrés sur ce tore dont les restrictions à T' donnent les fibrés précédemment introduits.

On a alors le théorème suivant, corrollaire immédiat de ce qui précède :

THÉORÈME 6.1. — *L'application résolvante $(H_p - \lambda)^{-1}$ définie sur $\tilde{VP}$ définit une section (qu'on notera encore R) du fibré $\mathcal{L}(\xi)$ de base VP et se prolonge en une section méromorphe (notée R_a)du fibré $\mathcal{L}(\xi)_a$ de base V_a.*

Pour $(p, \lambda) \in \tilde{VP}$, on a $J_\tau^{-1} R_0(p, \lambda) J_\tau = R_0(p + \tau, \lambda)$, d'où on déduit, grâce à (3.1) et la commutation de J_τ avec les opérateurs de multiplication par Q et χ, pour

$(p,\lambda) \in \tilde{V}P, \tau \in T^*$:

$$\tilde{d}(p+\tau,\lambda) = D_{(n+1)/2}(QR_0(p+\tau,\lambda)\chi) = D_{(n+1)/2}(J_\tau^{-1}QR_0(p,\lambda)\chi J_\tau)$$
$$= D_{(n+1)/2}(QR_0(p,\lambda)\chi) = \tilde{d}(p,\lambda),$$

et donc que $\tilde{d}$ définit une fonction (notée d) sur VP, prolongeable holomorphiquement à $V \setminus BL$, où on a noté BL le quotient $\tilde{B}L/T^*$. Au corollaire 5.4 répond le corrollaire suivant :

COROLLAIRE 6.2. — *Il existe une fonction holomorphe d sur $V \setminus BL$ et pour tout a, une section holomorphe S_a du fibré $\mathcal{L}(\xi)_a \to V_a \setminus BL$ telle que $R_a = S_a/d$. Ces sections se prolongent méromorphiquement à V_a.*

Appendice

La situation hamiltonien d'hypersurface est le cas particulier d'une situation un peu plus générale, dont l'étude est esquissée rapidement dans cet appendice : Les directions périodiques sont de codimension $q \geqslant 1$ et l'hamiltonien à l'infini (*cf.* remarque 4.5) est du type $(\Delta_g + Q)_{\mathbf{R}^n} + \Delta_{\mathbf{R}^q}$ où g (*resp.* Q) est une métrique (*resp.* un potentiel) T–périodique sur $\mathbf{R}^n$.

Avec ces hypothèses, la désintégration C^∞ de Floquet perdure. La définition de la variété d'impulsion–énergie est moins évidente. On a tout d'abord une distinction suivant que q est impair ou pair : la résolvante $(\Delta_{\mathbf{R}^q} - \mu)^{-1}$ est définie dans le premier cas sur la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{\mu}$ et celle de la fonction $\log \mu$ dans le second. D'autre part, le fait que les valeurs propres de $(\Delta_g)_p$ soient paramétrées (en tant que fonctions entières de p) par le tore dual T^* (les composantes irréductibles de la variété de Bloch apparaissent ainsi comme le graphe de fonctions entières) est caractéristique des potentiels constants, du moins en dimension $n = 1$ ou 2, comme l'indique le théorème suivant du à Borg pour $n = 1$ et à Knörrer, Trubowitz pour $n = 2$:

THÉORÈME A2.1[4]. — *Soit Q un potentiel L^2 à valeurs réelles, T^*–périodique. Supposons qu'il existe une fonction entière Λ sur $\mathbf{C}^n$ telle que la variété de Bloch $BL(Q)$ soit l'union du graphe de Λ et de ses T^*–translatés, i.e. $BL(Q) = \cup_{\tau \in T^*}\{(p,\lambda) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}, \lambda \doteq \Lambda(p+\tau)\}$. Alors Q est constant.*

La construction de la variété V repose sur le déterminant $\det((\Delta_g + Q)_p - \lambda)$. Celui–ci dépend analytiquement des paramètres (p,λ), cela résulte de l'étude des asymptotiques en temps petit de l'opérateur de la chaleur ([3]), la proposition suivante l'exprime dans un cadre un peu plus général :

PROPOSITION A2.2. — *Soit X une variété riemannienne compacte, $\tilde{X}$ son revêtement universel et P un opérateur elliptique sur $C^\infty(X)$, formellement autoadjoint.*

Soit T' le dual du groupe $H_1(X,\mathbf{Z})$ et $T'_{\mathbf{C}}$ son complexifié naturel ($\simeq (\mathbf{C}^*)^b$ où b est le premier nombre de Betti de X). Pour $\rho \in T'_{\mathbf{C}}$ (représentation de $H_1(X,\mathbf{Z})$ non nécessairement unitaire), soit L_ρ le fibré en droites plat de base X associé à l'action $\gamma \bullet (x,z) = (\gamma \bullet x, \rho([\gamma])z)$ du groupe fondamental $\pi_1(X)$ sur le fibré trivial $\tilde{X} \times \mathbf{C}$ et P_ρ l'opérateur induit par P sur $C(L_\rho)$. Alors la fonction déterminant $\det(P_\rho - \zeta)$, *définie par régularisation ζ, est analytique sur $T'_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}$.*

Preuve. — Soit $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ et $(\omega_1, \ldots, \omega_b)$ une base de différentielles harmoniques représentant la cohomologie $H^1(X,\mathbf{R})$.

Si $T^* = \{\omega \in H^1(X,\mathbf{R}), \int_{H_1(X,\mathbf{Z})} \omega \subset \mathbf{Z}\}$, alors $T' = H^1(X,\mathbf{R})/T^*$. Notons par $\tilde{\rho}$ un représentant de ρ dans $H^1(X,\mathbf{R})$. On définit la fonction $s_{\tilde{\rho}}(\tilde{x}) = \exp(2i\pi \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} \tilde{\rho})$ qui induit une section non nulle (et par suite une trivialisation) du fibré $L_{\tilde{\rho}}$. L'opérateur P_ρ est alors unitairement équivalent à l'opérateur $s_{\tilde{\rho}}^{-1} P s_{\tilde{\rho}}$ de domaine $H_{\mathrm{ord}\,P}(X)$. La famille d'opérateurs $s_{\tilde{\rho}}^{-1} P s_{\tilde{\rho}}$ est une famille analytique relativement aux variables $\tilde{\rho}$. La dépendance analytique de fonctions ζ ([3]) entraîne alors l'analyticité de la fonction (T^*–invariante) $\det(s_{\tilde{\rho}}^{-1} P s_{\tilde{\rho}} - \zeta)$ est par suite celle de $\det(P_\rho - \zeta)$. □

On définit alors

$$\tilde{V}_0 = \{(p, \lambda, \mu) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}, \det((\Delta_g + Q)_p - \lambda - \mu^2) = 0\}$$

sur laquelle T^* opère. Dans le cas où $\Delta_g + Q$ est le laplacien euclidien, $\tilde{V}_0$ a une infinité de revêtements $\pi_{\tau_1} : \tilde{V} \to \tilde{V}_0$ avec $\pi_{\tau_1}(p, \lambda, (z_\tau)) = (p, \lambda, z_{\tau_1})$ vérifiant $\pi_{\tau_1}(p, \lambda, -z_\tau)) = \pi_{\tau_2}(p + \tau_1 - \tau_2, \lambda, (z_\tau))$.

La définition de $\tilde{V}$ dans le cas général n'est pas claire. On laisse en suspens les questions suivantes :

- Définir $\sqrt{H_p - \lambda}$ (ou $\log(H_p - \lambda)$ pour q pair) sur un revêtement de $\tilde{V}_0 - \{\mu = 0\}$.
- Étendre la définition précédente à une variété qui soit un révêtement ramifié de $\tilde{V}_0$.

Il serait utile d'avoir des réponses pour le problème analogue où on remplace la famille $(H_p - \lambda)$ par une famille $(A(\zeta))_{\zeta \in \mathbf{C}^m}$ d'endomorphismes d'un espace de dimension finie.

Références

[1] GÉRARD C. — *Resonance theory in atom–surface scattering*, prépublication, 1988.

[2] GOLDSTEIN C. I. — *The singularities of the S–matrix and Green's function associated with perturbations of* $-\Delta$ *acting on the cylinder*, Bull. of the A. M. S, 79 (1973), 1303–1308.

[3] GILKEY P. — *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah–Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.

[4] KNÖRRER H., TRUBOWITZ E. — A directional compactification of the complex Bloch variety, preprint, Zürich, 1988.

[5] MÜLLER W. — *Manifolds with cusps of rank one, spectral theory and* L^2*–index theorem*, Lecture notes in Math. 1244, Berlin, Heidelberg, New–York, Springer–Verlag, 1987.

Laurent GUILLOPÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)