

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

CHRISTOPHE BAVARD

## **Inégalités isosystoliques conformes**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 6 (1987-1988), p. 71-79

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1987-1988\\_\\_6\\_\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__71_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

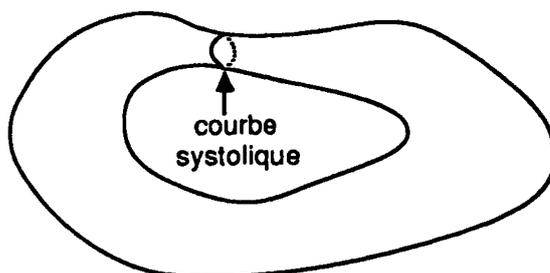
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INÉGALITÉS ISOSYSTOLIQUES CONFORMES

par *Christophe BAVARD*

Soit  $M$  une variété riemannienne compacte non simplement connexe. La *systole* de  $M$  est la plus petite longueur d'une courbe non contractile :



Une inégalité isosystolique permet d'estimer le volume en fonction de la systole, *i.e.*

$$\text{vol} \geq C(\text{sys})^n$$

pour un type topologique (ou conforme) fixé. On s'intéressera ici uniquement à des inégalités *optimales*.

*Remarque.* — Une telle inégalité non triviale ( $C > 0$ ) n'existe pas toujours ; par exemple pour  $S^1 \times S^2$  on a  $C = 0$  (prendre  $S^1$  de longueur fixée et  $S^2$  d'aire petite).

## I. Deux résultats classiques

**1.1.** — Les premières inégalités ont été obtenues par Lœwner (1949) sur le tore  $T^2$  :  $C = \sqrt{3}/2$  avec égalité pour le tore plat équilatéral, et Pu (1952) sur le plan projectif réel  $P^2$  :  $C = 2/\pi$  avec égalité pour la courbure 1 (voir [Pu]).

La preuve s'appuie sur le fait que toute classe conforme de métriques sur  $T^2$  ou  $P^2$  contient une métrique homogène ; avec  $S^2$ , ce sont les seules surfaces fermées qui ont cette propriété. Considérons donc une métrique  $g = \varphi^2 g_0$  sur  $M = T^2$  ou  $P^2$ , avec

Isom  $g_0 = G$  transitif et  $\varphi \in C^0(M)$ . Noter que

$$\text{long}^g(\gamma) = \int \varphi \circ \gamma \, ds \quad \text{et} \quad \text{vol } g = \int \varphi^2 dg_0 .$$

On fait la moyenne de  $\varphi$  par le groupe d'isométries en posant

$$\psi(x) = \int_G \varphi \circ \sigma(x) d\sigma \quad (= \text{constante})$$

où  $x \in M$  et  $d\sigma$  est la mesure de Haar de masse 1 sur  $G$ . Alors :

$$\text{vol } g = \int_G \left( \int_M \varphi^2 \sigma dg_0 \right) d\sigma \geq \int_M \left( \int_G \varphi \circ \sigma d\sigma \right)^2 dg_0 = \int_M \psi^2 dg_0 ,$$

et pour toute courbe  $\gamma$  non contractile :

$$\text{long}^{\psi^2 g_0}(\gamma) = \int \psi \circ \gamma \, ds = \int_G (\varphi \circ \sigma \circ \gamma) \, ds \geq \text{sys } g .$$

Ce qui établit les inégalités de Lœwner et Pu.

**1.2.** — Dans la théorie des applications conformes, on s'intéresse à la question plus générale de majorer la *longueur conforme* d'une famille de courbes  $\Gamma$ . Etant donné  $(M^2, g_0)$  et  $\Gamma$  on définit

$$\text{long conf } \Gamma = \sup_{g = \varphi^2 g_0} (\text{long}^g \Gamma / \sqrt{\text{vol } g})$$

et également le *module conforme* de  $\Gamma$  :

$$\text{mod}(\Gamma) = (\text{long conf } \Gamma)^{-2}$$

qui sont des invariants conformes (voir [Je]).

M. Gromov décrit dans [Gr] la méthode des longueurs extrémales comme suit. A toute probabilité  $\mu$  sur  $\Gamma$  est associée une mesure  ${}^*\mu$  sur  $M^2$  :

$$({}^*\mu, \varphi) = \int_{\Gamma} \left( \int \varphi \circ \gamma \, ds \right) d\mu(\gamma) , \quad \varphi \in C^0(M) .$$

Si  ${}^*\mu$  a une densité  $f \in L^2(dv)$  par rapport à la mesure volume  $dv$  de  $M^2$ , alors

$$\text{long conf } \Gamma \leq \|f\|_2 .$$

Par exemple  $\text{vol} / \text{sys}^2(g) \geq 1 / \|f\|_2^2$  ( $g = \varphi^2 g_0$ ). En effet

$$\text{sys } g \leq \int_{\Gamma} \left( \int \varphi \circ \gamma \, ds \right) d\mu(\gamma) = \int_M f \varphi \, dv \leq \|f\|_2 (\text{vol } g)^{1/2} . \quad (1)$$

Cependant l'inégalité isosystolique obtenue n'est pas optimale en général.

## II. Critère de minimalité

Les inégalités (1) montrent que  $M^2$  minimise  $\text{vol} / \text{sys}^2$  dans sa classe conforme quand les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) toute courbe du support de  $\mu$  est systolique;

2)  $f \equiv \text{constante}$ .

En fait, elles sont nécessaires :

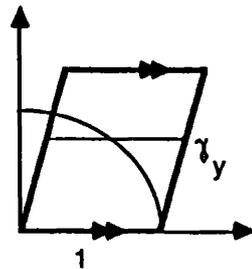
**THÉORÈME ([Ba 3]).** — Soit  $M$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ ,  $s_0 = \text{sys } M$ ,  $v_0 = \text{vol } M$ ,  $dv$  la mesure volume et  $S$  l'espace des courbes systoliques de  $M$ .

$M$  minimise  $\text{vol} / \text{sys}^n$  dans sa classe conforme si et seulement si il existe une probabilité  $\mu$  sur  $S$  telle que  $^*\mu = s_0/v_0 dv$ .

Dans ce cas  $M$  est unique à homothétie près.

Il est clair que l'existence de  $\mu$  entraîne la minimalité (on dira que la métrique est optimale). Voici quelques exemples :

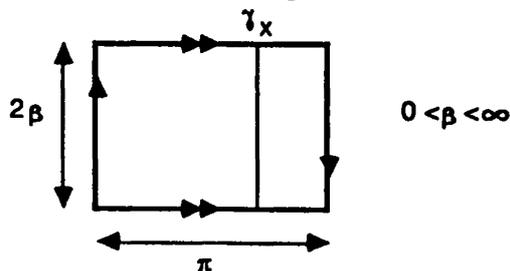
*Exemple 1.* —



$\mu = dy$  sur  $\{\gamma_y\} \subset S$ . Donc un tore plat est optimal.

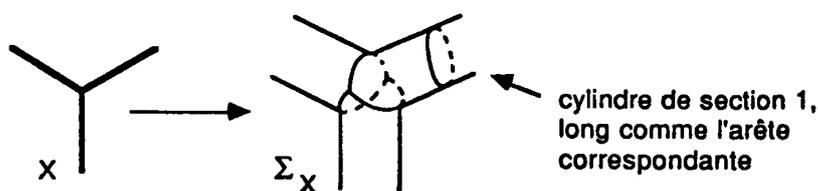
Noter qu'on n'a pas utilisé tout le groupe d'isométries.

*Exemple 2.* — Soit  $K_\beta$  la bouteille de Klein plate :



On voit que  $K_\beta$  est optimale pour  $0 < \beta \leq \pi/2$  en posant  $\mu = dx$  sur  $\{\gamma_x\} \subset S$ . Pour  $\beta > \pi/2$  l'inégalité obtenue n'est pas optimale car les  $\gamma_x$  ne sont plus systoliques.

*Exemple 3.* — A tout graphe métrique compact  $X$  on associe une surface  $\Sigma_X$  (plate avec des singularités coniques) :



Pour chaque sommet de degré  $k$  de  $X$ , on a deux singularités d'angle  $k\pi$ . Quand systole  $X \geq 1$ ,  $\Sigma_X$  est optimale ( $S =$  les sections des cylindres,  $\mu =$  mesure de longueur de  $X$ ).

*Démonstration du théorème.* — Il reste à prouver l'existence de  $\mu$  pour une métrique optimale. Fixons  $L > \text{sys } M$ , et notons  $\Gamma^L$  l'espace des courbes géométriques non contractiles de longueur  $\leq L$ , muni de la topologie uniforme quotient; c'est un compact métrique. Sa topologie est aussi définie par la distance de Hausdorff des compacts de  $M$ . Enfin, notons  $K$  l'ensemble convexe et compact des probabilités sur  $\Gamma^L$  avec la topologie vague.

Soit  $\varphi \in C^0(M)$  et

$$\bar{\varphi}(\gamma) = \int \varphi \circ \gamma \, ds .$$

Si  $\varphi$  est positive,  $\bar{\varphi}$  est semi-continue inférieurement sur  $\Gamma^L$  (c'est une fonction longueur), donc quand  $\mu \in K$ ,  $\langle * \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \bar{\varphi} \rangle$  est bien défini pour tout  $\varphi \in C^0(M)$ . Observer que

$$\langle * \mu, 1 \rangle \geq s_0 .$$

### Assertion 1.

$s_0/v_0 \, dv$  appartient à l'adhérence de  $*K$ .

Sinon il existerait  $\psi \in C^0(M)$  et  $a$  réel  $> 0$  tels que

$$\frac{s_0}{v_0} \int \psi \, dv + a < \inf_{\nu \in *K} \langle \nu, \psi \rangle = \inf_{\mu \in K} \langle * \mu, \psi \rangle .$$

Donc, pour  $\varepsilon > 0$  :

$$a\varepsilon + \int \frac{s_0}{v_0} (1 + \varepsilon\psi) \, dv < \inf_{\mu \in K} \langle * \mu, 1 + \varepsilon\psi \rangle .$$

Soit  $M^\varphi$  la métrique conforme  $M$  par  $\varphi = 1 + \varepsilon\psi$  (supposée  $> 0$ ) et  $s = \text{sys } M^\varphi$ ,  $v = \text{vol } M^\varphi$ . Par continuité de la systole et de la longueur par rapport à  $\varphi$  il existe  $\gamma \in \Gamma^L$  systolique pour  $M^\varphi$ ; d'où

$$\inf_{\mu \in K} \langle * \mu, \varphi \rangle = s, \quad (\mu = \delta_\gamma) .$$

Vu que  $s_0/v_0 \int \varphi \, dv = s_0 \sqrt{v/v_0} - O(\varepsilon^2)$ , on en déduit finalement

$$s_0 \sqrt{v/v_0} < s - a\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

ce qui est absurde.

**Assertion 2.**

$$s_0/v_0 \, dv \in {}^*K .$$

On sait déjà qu'il existe une suite  $(\mu_n) \subset K$  qui converge vers  $\mu \in K$  et avec  $\lim_n {}^*\mu_n = \frac{s_0}{v_0} \, dv$ . Soit  $\varphi \in C^0(M)$ ,  $\varphi > 0$ . Comme  $\bar{\varphi}$  est s.c.i. on a

$$\langle \mu_n, \bar{\varphi} \rangle = \sup \{ \langle \mu_n, g \rangle ; g \text{ continue } \leq \bar{\varphi} \}$$

(idem pour  $\mu$ ) et pour tout réel  $\alpha > 0$  il existe  $g$  continue sur  $\Gamma^L$  telle que

$$\langle \mu, \bar{\varphi} \rangle \leq \alpha + \langle \mu_n, g \rangle \leq \alpha + \langle \mu_n, \bar{\varphi} \rangle = \alpha + \langle {}^*\mu_n, \varphi \rangle$$

( $n$  assez grand). Donc

$$\langle {}^*\mu, \varphi \rangle \leq \frac{s_0}{v_0} \int \varphi \, dv . \tag{2}$$

En fait (2) est une égalité car pour  $0 < \varphi < 1$

$$s_0 \leq \langle {}^*\mu, 1 \rangle = \langle {}^*\mu, \varphi \rangle + \langle {}^*\mu, 1 - \varphi \rangle \leq s_0 .$$

D'où l'assertion 2.

Enfin, on vérifie facilement que le support de  $\mu$  est inclus dans  $S$ .

**III. Cas de la bouteille de Klein (voir [Ba 2])**

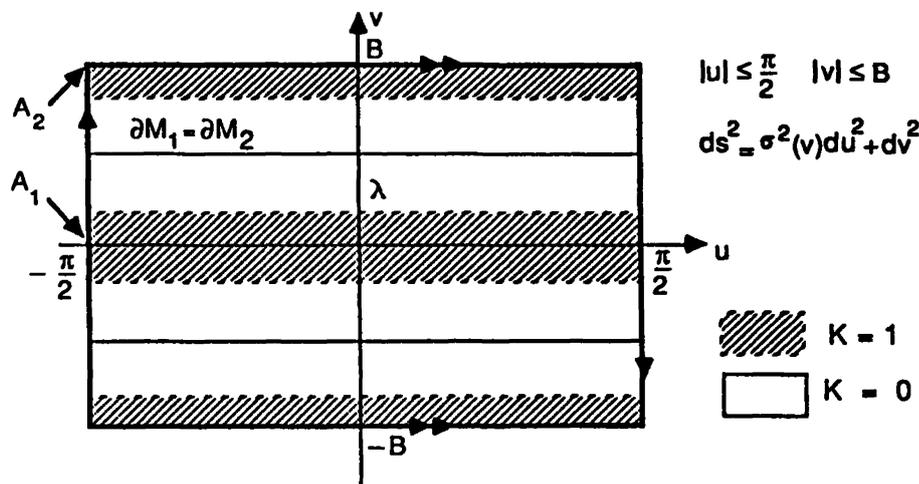
Toute bouteille de Klein est conformément équivalente au modèle plat  $K_\beta$ ,  $0 < \beta < \infty$  (II. ex.2);  $\beta$  sera le *type conforme*. On se propose de déterminer le volume systolique conforme

$$m(\beta) = \inf \{ \text{vol } g / \text{sys}^2 g ; g \text{ de type } \beta \} .$$

1). —  $0 < \beta \leq \pi/2$ .

$$m(\beta) = \pi/2\beta \quad (\text{voir II, ex. 2}) .$$

2). — Pour  $\beta > \pi/2$  les métriques plates ne sont plus optimales. Soit  $K_\sigma$  la bouteille suivante :



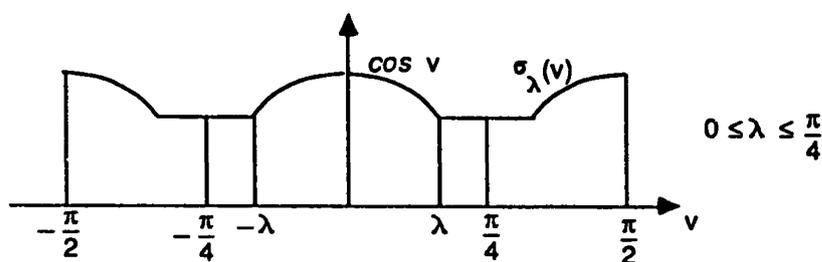
où  $\sigma$  est une fonction continue de  $v$ , paire et  $B$ -périodique. Topologiquement,  $K_\sigma$  est formée de 2 rubans de Möbius collés par leur bord  $\partial M_1 = \partial M_2$ . La métrique est invariante par les "translations"  $(u, v) \mapsto (u + \theta, v)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , la symétrie le long de  $\partial M_1$  et la symétrie le long des âmes  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) des rubans. Noter aussi que les verticales sont géodésiques et que la courbure est  $-\sigma''/\sigma$ .

Posons  $f(v) = \int_0^v dt/\sigma(v)$  et  $F(x, y) = (x, g(y))$  où  $g$  est la réciproque de  $f$ . Alors

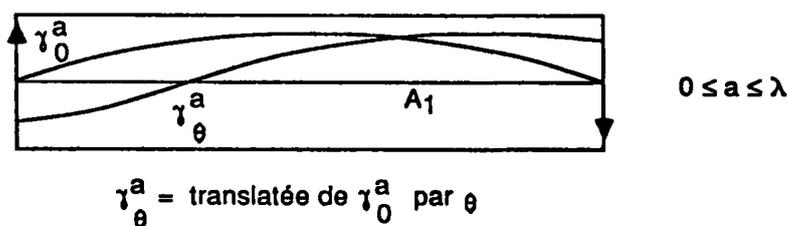
$$F^*(ds^2) = \sigma^2 \circ g(y)(dx^2 + dy^2)$$

le type conforme de  $K_\sigma$  est donc  $\beta = \int_0^B dv/\sigma(v)$ .

Pour l'instant on conserve  $B = \pi/2$  et on introduit progressivement de la courbure 1 dans la bouteille plate carrée ( $\sigma \equiv 1$ ) à partir des âmes  $A_i$  :



Il s'agit de 2 rubans de Möbius à courbure 1 de largeur  $2\lambda$  raccordés par un anneau plat. Les verticales  $\{\gamma_u\}$ , ( $|u| \leq \pi/2$ ) sont systoliques de longueur  $\pi$ , mais il y a d'autres systoles dans les bandes elliptiques :



$\{\gamma_u\}$  est muni de la mesure  $\mu_1 = \cos \lambda du$  de sorte que  $^*\mu_1$  est la mesure volume de la partie plate.

Puis on cherche  $\mu_2$  sur  $\{\gamma_\theta^a\}$ , ( $0 \leq a \leq \lambda$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) de la forme  $x(a)da \otimes d\theta$  pour avoir  $^*(\mu_1 + \mu_2) = dv$  sur  $\{|v| \leq \lambda\}$ . En fait

$$^*\mu_2 = 2\chi_{\{|v| \leq \lambda\}} \left[ \int_{|v|}^{\lambda} (\sigma_\lambda^2(v) - \sigma_\lambda^2(a))^{-1/2} x(a) da \right] \cdot \text{vol}$$

( $\chi$  = fonction caractéristique).

D'où

$$2 \int_v^\lambda (\cos^2 v - \cos^2 a)^{-1/2} x(a) da = 1 - \cos \lambda / \cos v \quad (0 \leq v \leq \lambda).$$

En posant  $z = \cos^2 a - \cos^2 \lambda$  et  $t = \cos^2 v - \cos^2 \lambda$  on se ramène à une équation de la forme

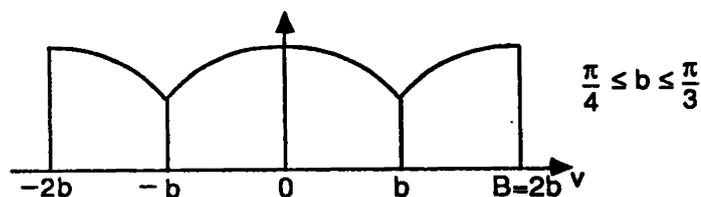
$$\int_0^t (t-z)^{-1/2} y(z) dz = f(t), \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

de solution  $g(t) = \frac{1}{\pi} \left[ f(0)/\sqrt{t} + \int_0^t (t-z)^{-1/2} f'(z) dz \right]$ . On trouve ainsi  $x(a) = \sin a/\pi \cos a (\cos^2 a - \cos^2 \lambda)$ ,  $0 \leq a \leq \lambda$ . La métrique associée à  $\sigma_\lambda$  est donc optimale. Quand  $\lambda$  croît de 0 à  $\pi/4$ ,  $\beta (= 2 \log \operatorname{tg}(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4}) + (\frac{\pi}{2} - 2\lambda) \cos \lambda)$  croît de  $\pi/2$  à  $2 \log(1 + \sqrt{2})$  et

$$m(\beta) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \lambda + \left( \frac{\pi}{4} - \lambda \right) \cos \lambda \right]$$

décroît de 1 à  $2\sqrt{2}/\pi$ . La bouteille plate carrée s'est métamorphosée en une bouteille  $K_0$  à courbure 1, double d'un ruban de Möbius sphérique de longueur  $\pi$  et de largeur  $\pi/2$  (métrique lisse en dehors d'une courbe).

3). — Reprenons le modèle général  $K_\sigma$ . Pour augmenter encore le type conforme on augmente  $B$  :



Les verticales ne sont plus systoliques, et la systole reste égale à  $\pi$  tant que la longueur du bord des 2 rubans sphériques est supérieure à  $\pi$ , i.e.  $b \leq \pi/3$ . Dans  $\{|v| \leq b\}$  on considère comme plus haut les  $\{\gamma_\theta^a\}$ ,  $0 \leq a \leq b$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , et

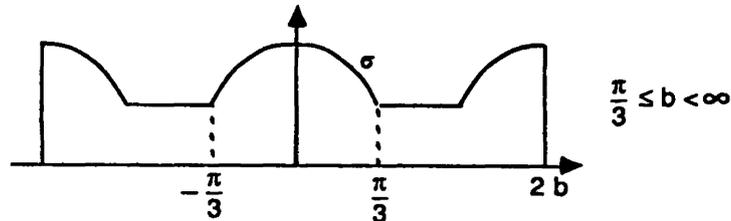
$$\mu = \frac{\sin 2a}{2\pi} (\cos^2 a - \cos^2 b)^{-1/2}, \quad (0 \leq a \leq b)$$

(de même pour  $\{b \leq |v| \leq 2b\}$ ). La mesure associée  ${}^*\mu$  est le volume. Quand  $b \in [\pi/4, \pi/3]$  on trouve

$$\beta = 2 \log \operatorname{tg} \left( \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{croît de } 2 \log(1 + \sqrt{2}) \text{ à } 2 \log(2 + \sqrt{3})) \text{ et}$$

$$m(\beta) = \frac{4}{\pi} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} \quad (\text{croît de } 2\sqrt{2}/\pi \text{ à } 2\sqrt{3}/\pi).$$

4). — Enfin pour épuiser les valeurs de  $\beta$ , il suffit d'épaissir le bord commun des 2 rubans du cas précédent  $b = \pi/3$  en un anneau plat de longueur  $\pi$  et de largeur arbitraire :



Dans la partie plate où les courbes d'équation  $v = \pm a$  sont systoliques on prend  $\mu = da$ , ( $\pi/3 \leq a \leq 2b - \pi/3$ ), puis on complète par une mesure comme en 3).

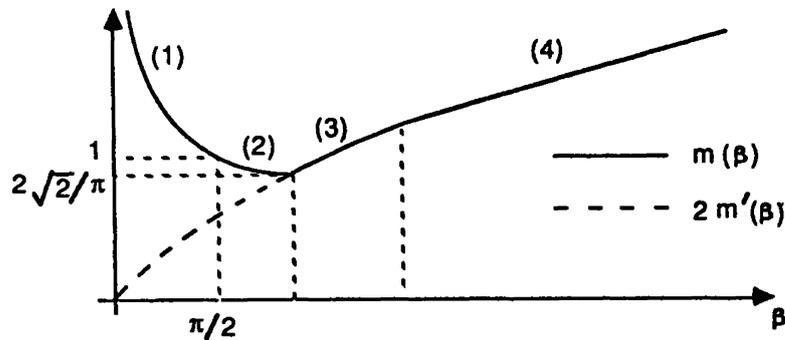
Ainsi

$$\beta = 2 \left[ \log(2 + \sqrt{3}) + 4(b - \pi/3) \right]$$

et

$$m(\beta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{2\pi} (\beta - 2 \log(2 + \sqrt{3})) .$$

Voici l'allure de  $m(\beta)$  :



*Remarque.* — Soit  $m'(\beta)$  le minimum de  $\text{vol} / \text{sys}^2$  pour les rubans de Möbius conformément équivalents au ruban plat de longueur  $\pi$  et de largeur  $\beta$ .  $m'(\beta)$  est donné seulement par les parties 3) et 4), car il n'y a pas à contrôler la longueur des courbes verticales. On retrouve grâce au morceau 3) une inégalité qui figure dans [Pu] avec une preuve analytique assez longue.

Comme corollaire on obtient l'inégalité optimale pour la bouteille de Klein [Ba 1] :

**THÉORÈME.** — Pour toute métrique continue sur  $K$  on a

$$\text{vol} / \text{sys}^2 \geq 2\sqrt{2}/\pi$$

et l'égalité caractérise  $K_0$  à isométrie et homothétie près.

**Bibliographie**

- [Ba 1] BAVARD C. — *Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein*, Math. Ann., **274** (1986), 439-441.
- [Ba 2] BAVARD C. — *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein*, Geometriae Dedicata, **27** (1988), 349-355.
- [Ba 3] BAVARD C. — *Inégalités isosystoliques conformes*, preprint.
- [Gr] GROMOV M. — *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **18** (1983), 1-147.
- [Je] JENKINS J. — *Univalent functions and conformal mapping*, Springer-Verlag, 1965.
- [Pu] PU P. — *Some inequalities in certain non orientable Riemannian manifolds*, Pacific J. Math., **2** (1952), 55-71.

Christophe BAVARD  
E.N.S. Lyon  
46, Allée d'Italie  
69364 LYON Cedex 07