SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

ROBERT MOLZON

Symétrie et problème aux limites pour l'opérateur de Laplace dans les cas hémisphérique et hyperbolique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 6 (1987-1988), p. 39-40

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__39_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1987–1988 (39–40)

SYMÉTRIE ET PROBLÈME AUX LIMITES POUR L'OPÉRATEUR DE LAPLACE DANS LES CAS HÉMISPHÉRIQUE ET HYPERBOLIQUE

par *Robert MOLZON*

Un beau théorème de Serrin établit un lien entre la symétrie d'un problème aux limites pour l'opérateur de Laplace sur un domaine borné $D \subset R^n$ avec la symétrie du domaine. Le théorème de Serrin affirme que si $D \subset R^n$ est un domaine dont la frontière est C^2 et $u \in C^2(\overline{D})$ satisfait $\Delta u = -1$ sur D , $u = 0$ sur ∂D et $\frac{\partial}{\partial n} u = k$ sur ∂D alors D est une boule. La démonstration de Serrin utilise la méthode de réflexion d'Alexandrov.

Un résultat analogue à celui énoncé ci–dessus ne se généralise pas au cas de la sphère S^n . Berenstein et Karlovitz ont donné des exemples de domaines $D \subset S^n$ et de fonctions u de classe C^∞ sur un voisinage de D qui satisfont le problème aux limites sur S^n et tels que le domaine D n'est pas une boule géodésique. Pour $n > 2$, ces domaines ont des frontières de classe C^∞ et connexes et ne peuvent dès lors pas s'écrire comme différence de boules géodésiques.

Avec pour motivation les exemples de Berenstein et Karlovitz, nous considérons le problème de la symétrie sur un hémisphère et dans un espace hyperbolique. Nous montrons que si M est un hémisphère de dimension n ou un espace réel hyperbolique, $D \subset M$ est un domaine dont la frontière est C^2 et $u \in C^2(\overline{D})$ satisfait $\Delta u = -1$ sur D , $u = 0$ sur ∂D , et $\frac{\partial}{\partial n} u = k$ sur ∂D alors D est une boule géodésique. La méthode employée dans la démonstration est la méthode de réflexion d'Alexandrov. La seule complication dans l'extension de la méthode de R aux cas hémisphérique et hyperbolique réside dans l'apparition des dérivées des coefficients de la métrique dans le calcul des dérivées secondes de u en certains points frontières.

Référence

MOLZON R. — *Symmetry and a boundary value problem for the laplacian on the sphere and hyperbolic space*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 101, Grenoble .

University of Kentucky
Lexington, Kentucky 40506
(U.S.A.)