Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LAURENT GUILLOPÉ

Séances de problèmes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 175-177
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__175_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (175–177)

Séances de Problèmes

Laurent GUILLOPÉ

Soit T_q un arbre homogène de valence q, $L^2(T_q)$ l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à la mesure de comptage sur T_q. Le laplacien combinatoire Δ_{T_q} opérant dans $L^2(T_q)$ ($(\Delta_{T_q}u)_S = \Sigma_{V\in\mathcal{V}(S)}u_V$, où $\mathcal{V}(S)$ est l'ensemble des sommets voisins de S) a pour spectre $\sigma_q = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$, spectre absolument continu de multiplicité infinie.

Soit G un graphe fini, Δ_G le laplacien combinatoire sur G. On suppose l'existence d'un élément (λ, φ) propre de Δ_G avec φ nulle en un sommet S_0 de G. Soit $G\#_{S_0}T_q$ le graphe obtenu en attachant le graphe G à l'arbre T_q, via l'identification de S_0 et d'un sommet de T_q. La valeur propre λ est encore valeur propre de $G\#_{S_0}T_q$, avec fonction propre la fonction de support $G\setminus S_0$ et coïncidant avec φ sur ce support.

La perturbation $T_q\#_{S_0}G$ de T_q a même spectre (absolument) continu que T_q et, dans certains cas, la valeur propre λ est immergée dans le spectre continu σ_q.

Peut-on construire d'autres exemples de graphes avec valeurs propres immergées dans le spectre continu? Y-a-t-il un série perturbative pour la valeur propre λ (éventuellement considérée comme une résonance) pour une petite perturbation du laplacien $\Delta_G\#_{S_0}T_q$?

Colette ANNÉ

Y-a-t-il un principe de Dirichlet pour les formes différentielles? C'est-à-dire si ω est une forme harmonique sur une variété à bord, nulle sur le bord (sa partie tangente et sa partie normale) est-elle nécessairement identiquement nulle sur la variété?

n.b. : la réponse est oui, la démonstration est en cours de rédaction.

Problème 1

Sur une variété riemannienne fermée X , soit λ une valeur propre du Laplacien et E l'espace propre correspondant. Soit (u_i) une base orthonormée de E .

Existe-t-il un principe de prolongement analytique pour les fonctions de l'espace vectoriel engendré par

$$\{uv | u \in E \ , \ v \in E\} \ ?$$

Précisément, est-ce que

$$\sum_{i \leqslant j} \alpha_{ij} u_i(x) u_j(x) \equiv 0 \text{ pour } x \in U \text{ ouvert de } X$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i \leqslant j} \alpha_{ij} u_i(x) u_j(x) \equiv 0 \text{ pour } x \in X$$

($\alpha_{ij} \in \mathbf{R}$ non tous nuls).

C'est vrai si $\dim E \leqslant 2$ (exercice) ou si la métrique est analytique réelle car les fonctions propres le sont.

Problème 2

Sur une surface fermée orientable X de genre $\gamma \geqslant 2$ on note $m_i(g)$ la multiplicité de la $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ valeur propre non nulle du Laplacien associé à la métrique g . Que vaut

$$M(\gamma) = \sup\{m_1(g) | g \text{ à courbure constante } = -1\} \ ?$$

On sait que $E\left(\frac{1+\sqrt{8\gamma+1}}{2}\right) \leqslant M(\gamma) \leqslant 4\gamma + 3$.

Problème 3

Avec les mêmes notations, si g est une métrique ***fixeée*** a courbure constante ***fixée***, est-ce que

$$\sup_i \left(m_i(g)\right) < +\infty \ ?$$

(La réponse ets non si $\gamma = 0$ ou 1).

Yves COLIN DE VERDIÈRE

Triangulations des surfaces : existe-t-il des triangulations totalement géodésiques d'une surface riemannienne (X, g), compacte, telle que tous les triangles aient des angles $< \pi/2$? Ce problème apparaît lorsque l'on souhaite que les matrices servant à calculer les valeurs propres du Laplacien par la méthode des éléments finis, associée à la triangulation, soient des opérateurs de la classe $\mathcal{O}_\Gamma$, où Γ est le 1-squelette de la triangulation et la classe $\mathcal{O}_\Gamma$ est l'ensemble des matrices symétriques (a_{ij} (i, j sommets de Γ)) telles que : $a_{ij} < 0$ si $i \sim j$, $a_{ij} = 0$ si $i \sim j$ et $i \neq j$. J'ai introduit cette classe d'opérateurs dans l'étude de la multiplicité des valeurs propres (TSG 86-87, Exposé de Gérard Besson).

[**Note** (nov. 87) : la réponse est oui ; je l'ai démontré avec A. Marin (prépublication I.F., n°88, soumis à J. of Diff. Geometry)].