

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

FERNAND PELLETIER

Sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques singulières

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 99-105

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__99_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE THÉORÈME DE GAUSS-BONNET POUR LES PSEUDO-MÉTRIQUES SINGULIÈRES

par *Fernand PELLETIER*

1) Introduction

Une pseudo-métrique g est un champ de formes bilinéaires symétriques sur une variété M . Lorsque g est non dégénérée et M compacte, le théorème classique de Chern-Gauss-Bonnet ([1], [2]) affirme que, l'intégrale de la forme Pfaffienne d'une connexion métrique compatible avec g , est égale à la classe d'Euler de M . Cette propriété n'est plus vraie, en général, si g est dégénérée. L'objet de cet exposé est d'étudier une telle situation lorsque le lieu singulier de g , c'est-à-dire l'ensemble des points de M où g est dégénérée, est une sous-variété de codimension 1.

2) Rappels sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les connexions métriques

Soit g une métrique pseudo-riemannienne sur une variété M de dimension M . Une connexion métrique compatible avec g ou connexion g -métrique est une application \mathbf{R} -bilinéaire

$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ ($\Gamma(M)$ espace des champs de vecteurs sur M)
ayant les propriétés suivantes :

- (1) $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$
 - (2) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$
- } pour toute fonction f sur M et tout X et Y de $\Gamma(M)$
- (3) $X\{g(Y, Z)\} = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ pour tout X, Y et Z de $\Gamma(M)$.

Il existe une unique connexion métrique à torsion nulle, c'est la connexion de Levi-Civita caractérisée par :

$$(4) \quad g(\nabla_X Y, Z) = X\{g(Y, Z)\} + Y\{g(X, Z)\} - Z\{g(X, Y)\} + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).$$

Soit (X_1, \dots, X_n) un champ de repères orthonormés sur un ouvert U de M . Pour toute connexion g -métrique, il existe une matrice de 1-forme (ω_i^j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ sur U telle que :

$$\nabla_X X_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j(X) X_j.$$

La matrice de courbure de ∇ est la matrice (Ω_i^j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ de 2 formes caractérisées par :

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Supposons M connexe, de dimension paire $n = 2p$, et notons (Ω_{ij}) le produit de (Ω_i^j) par la matrice $\begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$, $r + s = n$, si (r, s) est la signature de g sur M . La forme Pfaffienne de ∇ sur M est la $2p$ -forme Δ définie par ([3])

$$\Delta|_U = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^p \frac{1}{2^p p!} \sum \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}} \Omega_{\alpha_1 \alpha_{2p}} \wedge \dots \wedge \Omega_{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}}$$

où $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}}$ vaut $+1$ ou -1 selon que $(\alpha_1 \dots \alpha_{2p})$ est une permutation paire ou impaire de $(1 \dots 2p)$.

Lorsque M est compacte orientable on a ([1], [2], [3]).

THÉORÈME DE GAUSS-BONNET. — *L'intégrale de Δ sur M est égale à la caractéristique d'Euler Poincaré de M .*

3) Pseudo-métriques génériques

Une *pseudo-métrique sur M* est un champ C^∞ de formes bilinéaires symétriques. Le *lieu singulier de g* est l'ensemble des points x de M où le rang de g en x n'est pas égal à $n = \dim M$. En général, $\Sigma(g)$ sera non vide. Sur chaque composante connexe, de $M - \Sigma(g)$, g est une métrique pseudo-riemannienne de signature constante et cette signature peut varier d'une composante connexe à une autre. Sur $\Sigma(g)$, le noyau de g en x est l'espace $K_g(x) = \{u \in T_x M / g_x(u, v) = 0 \text{ pour tout } v \in T_x M\}$. L'ensemble $\Sigma(g)$ est la réunion des ensembles $\Sigma_c(g) = \{x \in \Sigma(g) | \dim K_g(x) = c\}$. Dans l'ensemble $\mathcal{P}(g)$ des pseudo-métriques sur M muni de la topologie C^∞ de Whitney, génériquement $\Sigma_c(g)$ est une sous-variété de codimension $\frac{c(c+1)}{2}$ de M éventuellement vide. Une pseudo-métrique ayant cette propriété sera dite *générique*. Sur chaque $\Sigma_c(g)$, lorsque g est générique, le noyau

définit un champ c -plan K_g . Les positions relatives de K_g et $T\Sigma_c(g)$ permettent de définir des ensembles singuliers "d'ordre supérieur" analogue aux singularités de Thom-Boardman pour les applications (voir [5]).

4) Connexion duale g -métrique

Soit g une pseudo-métrique générique sur M . Si $\Sigma(g)$ est non vide, il n'existe pas, en général, de connexion g -métrique, c'est-à-dire d'application $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ ayant les propriétés (1), (2) et (3) ci-dessus. En effet, soit K un champ de vecteurs sur un voisinage U de $x \in \Sigma_1(g)$ qui engendre le noyau de g sur $\Sigma_1(g) \cap U$ et qui est transverse à $\Sigma_1(g)$. (génériquement cette situation représente sur un ouvert dense de $\Sigma_1(g)$). L'équation locale de $\Sigma_1(g)$ est alors $g(K, K) = 0$ et comme K est transverse à $\Sigma(g)$ on a $K\{g(K, K)\} \neq 0$ sur $\Sigma(g) \cap U$. D'autre part, s'il existait une connexion g -métrique ∇ sur M on aurait $K\{g(K, K)\} = 2g(\nabla_K K, K)$ d'après (3). Mais K étant le noyau de g sur $\Sigma(g) \cap U$, $g(\nabla_K K, K) = 0$ sur $\Sigma(g)$ alors $K\{g(K, K)\} \neq 0!$

A la notion de connexion g -métrique, on va substituer la notion de connexion duale g -métrique : une connexion duale g -métrique ([4]) est une application \mathbf{R} -bilinéaire $D : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$ (espace des 1-formes sur M) ayant les propriétés suivantes :

- $$\left. \begin{aligned} (1') \quad D_X fY &= X(f)g(Y, \quad) + fD_X Y \\ (2') \quad D_{fX} Y &= fD_X Y \end{aligned} \right\} \text{pour toute fonction } f \text{ sur } M \text{ et tout } X, Y \in \Gamma(M)$$
- $$(3') \quad X\{g(Y, Z)\} = (D_X Y(Z) + D_X Z(Y)) .$$

Il existe toujours une telle connexion duale : la connexion duale de Levi-Cevita caractérisée par :

$$D_X Y(Z) \text{ est égal au second membre de (4).}$$

A une connexion duale g -métrique D est associée une unique connexion g -métrique sur $M - \Sigma(g)$ définie par $g(\nabla_X Y, Z) = D_X Y(Z)$. On peut donc associer à toute connexion duale g -métrique, lorsque $n = \dim M = 2p$, une forme Pfaffienne Δ sur $M - \Sigma(g)$ qui est la forme Pfaffienne de ∇ sur $M - \Sigma(g)$.

Si, de plus, M est compacte, $M - \Sigma(g)$ a un nombre fini de composantes connexes M_i , $i = 1 \cdots q$. Lorsque $\Sigma(g)$ est non vide la frontière de M_i est une pseudo-variété compacte contenue dans $\Sigma(g)$. Dans le cas particulier où g est générique et $\Sigma(g) = \Sigma_1(g)$, l'adhérence de M_i est une variété compacte à bord. L'étude de l'intégrale de Δ sur $M - \Sigma(g)$ revient donc dans ce cas à l'étude de l'intégrale de Δ sur la variété compacte à bord \overline{M}_i , $i = 1 \cdots q$ (\overline{M}_i étant l'adhérence de M_i dans M).

5) Intégrale de la forme Pfaffienne d'une connexion duale g -métrique sur une variété compacte à bord

Dans tout ce paragraphe, N est une variété compacte connexe orientable à bord ∂N non vide, de dimension paire $n = 2p$ et g est une pseudo-métrique sur N . Lorsque g est une métrique riemannienne, rappelons que l'on a ([3])

$$\int_N \Delta = \chi(N) + \sum_{k=1}^p a_k \int_{\partial N} \theta_k$$

où $\chi(N)$ est la caractéristique d'Euler Poincaré de N

$a_1, \dots, a_k, \dots, a_p$ sont des constantes universelles

$\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_p$ sont des $2p - 1$ formes sur ∂N qui ne dépendent que de la seconde forme fondamentale de ∂N et de la courbure de la connexion induite sur ∂N .

Lorsque g est une métrique pseudo-riemannienne, on peut établir un résultat analogue moyennant l'hypothèse suivante : la pseudo-métrique induite par g sur ∂N est non dégénérée.

On se place désormais dans la "situation singulière" suivante :

- (5) le lieu singulier de g est égal à ∂N .
- (6) le noyau de g est transverse à ∂N .

Il existe alors un voisinage collier $\emptyset : \partial N \times [0, 1[\rightarrow N$ ayant les propriétés suivantes :

- chaque composante connexe de $V = \emptyset(\partial N \times [0, 1[)$ est un voisinage d'une seule composante connexe de ∂N .
- la pseudo-métrique induite par g sur $\emptyset(\partial N \times \{t\})$ est non dégénérée.

On dira alors que $\emptyset : \partial N \times [0, 1[\rightarrow N$ est au *voisinage collier* adapté à g .

Etant donné un voisinage collier $\emptyset : \partial N \times [0, 1[\rightarrow N$ adapté à g , soit X un champ de vecteurs non nul sur $V = \emptyset(\partial N \times [0, 1[)$ orthogonal à $\emptyset(\partial N \times \{t\})$ pour tout $0 \leq t < 1$. La fonction $g(X, X)$ est alors nulle sur ∂N . On impose l'hypothèse supplémentaire suivante :

- (7) la fonction $\varphi : V \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(x) = g_x(X, X)$ est non dégénérée sur ∂N .

Soit D une connexion duale g métrique sur N et ∇ la connexion g métrique sur $N - \partial N$ associée (comme à la fin du paragraphe 4). On note Δ la forme

Pfaffienne de ∇ sur $N - \partial N$. Etant donné un voisinage $\emptyset : \partial N \times [0, 1[\rightarrow N$ adapté à g , sur la variété $N_t = N - \emptyset(\partial N \times [0, t[)$ on a :

THÉORÈME A. — 1) Soit F le fibré tangent au feuilletage $\{\emptyset(\partial N) \times \{t\}\}$. Il existe des $2p - 1$ formes $\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_p$ sur F telles que :

$$\int_{N_t} \Delta = \chi(N) + \sum_{k=1}^p a_k t^{\frac{1}{2}-k} \int_{\partial N_t} \theta_k + O(t^{\frac{1}{2}})$$

où a_k sont des constantes qui ne dépendent que de g .

2) Lorsque N est une surface, l'intégrale $\int_{N_t} \Delta$ est convergente si et seulement si $\int_{\partial N} \theta_1 = 0$. Dans ce cas, pour tout voisinage collier adapté à g on a $\int_N \Delta = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{N_t} \Delta = \chi(N)$.

Considérons un champ de vecteurs non nuls K sur ∂N qui engendre le noyau de g en tout point de ∂N . On appelle seconde forme fondamentale de ∂N (relativement à K) l'application :

$$\pi : \Gamma(\partial N) \times \Gamma(\partial N) \rightarrow \mathbf{R} \quad (\Gamma(\partial N) \text{ espace des champs de vecteurs sur } \partial N)$$

définie par

$$\pi(X, Y) = D_X Y(K).$$

On dira que ∂N est *autoparallèle* (relativement à la connexion duale g -métrique D) si et seulement si π est identiquement nulle. Cette propriété ne dépend pas du choix de K . On a alors

THÉORÈME B. — Lorsque ∂N est autoparallèle l'intégrale $\int_{N_t} \Delta$ est convergente pour tout voisinage collier adapté à g et $\int_N \Delta = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{N_t} \Delta = \chi(N)$.

6) Applications aux pseudo-métriques génériques dont le lieu singulier est de codimension 1

Revenons à la situation d'une pseudo-métrique g générique sur une variété compacte M de dimension paire $n = 2p$. On suppose de plus que le lieu singulier $\Sigma(g)$ est une sous-variété de M de codimension 1 (c'est-à-dire $\Sigma(g) = \Sigma_1(g)$) et que le noyau de g est transverse à $\Sigma(g)$. Il existe alors un voisinage $\emptyset : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ ayant les propriétés suivantes :

- Chaque composante connexe de $\emptyset(\Sigma(g) \times]-1, 1[)$ est voisinage d'une seule composante connexe de $\Sigma(g)$.

- La pseudo-métrique induite par g sur $\emptyset(\Sigma(g) \times \{t\})$, $-1 < t < 1$ est non dégénérée.

On dira alors que $\emptyset : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ est un *voisinage adapté* à g .

L'adhérence \overline{M}_i de chaque composante connexe M_i de $M - \Sigma(g)$ est une variété compacte à bord et la pseudo-métrique $g_i = g|_{M_i}$ vérifie les hypothèses (5), (6) et (7). Etant donné une connexion duale g -métrique sur M et Δ sa forme Pfaffienne sur $M - \Sigma(g)$ on a alors ([8]).

THÉORÈME I. — Soit $\emptyset : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ un voisinage adapté à g et F le fibré tangent au feuilletage $\{\emptyset(\Sigma(g) \times \{t\})\}$. Il existe des $(2p - 1)$ -formes $\theta_1, \dots, \theta_h, \dots, \theta_p$ sur F telles que, sur la variété $M_t = M - \emptyset[-t, t[$ on ait :

$$\int_{M_t} \Delta = \chi(M) + \sum_{k=1}^p t^{\frac{1}{2}-k} \left(\sum_{j=1}^r \sum_{h=k}^p a_{j h k} \int_{\Sigma_j(g)} \theta_h^{h-k} \right) + O(t^{\frac{1}{2}})$$

où les $a_{j h k}$ sont des constantes qui ne dépendent que de g

$\Sigma_1(g), \dots, \Sigma_j(g), \dots, \Sigma_r(g)$ sont les composantes connexes de $\Sigma(g)$

θ_h^l $h = 1 \dots p$ est définie par récurrence de la manière suivante :

$$\theta_h^0 = \theta_h, \quad \theta_h^l = L_{\emptyset_* \frac{\partial}{\partial t}} \theta_h^{l-1},$$

$l \geq 1$, $L_{\emptyset_* \frac{\partial}{\partial t}}$ étant la dérivée de Lie par $\emptyset_* \frac{\partial}{\partial t}$.

Pour les surfaces compactes, on a de plus ([8]).

THÉORÈME II. — L'intégrale $\int_M \Delta$ est convergente si et seulement si

$$\int_{\Sigma_j(g)} \theta_1 \text{ est nulle pour } j = 1, \dots, p.$$

Dans ce cas pour tout voisinage $\emptyset : \Sigma(g) \times]-1, 1[\rightarrow M$ à g l'intégrale de Δ sur la variété $M_t = M - \emptyset(]-t, t])$ est convergente et on a

$$\int_M \Delta = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{M_t} \Delta = \chi(M).$$

Soit g une pseudo-métrique générique sur M dont le lieu singulier est une sous-variété de M de codimension 1. On dira que $\Sigma(g)$ est *autoparallèle*, relativement à une connexion duale g -métrique D , si $D_X Y(Z) = 0$ pour tout champ de vecteurs X et Y tangent à $\Sigma(g)$ et Z orthogonal à $\Sigma(g)$. D'après [7], la pseudo-métrique induite par g sur $\Sigma(g)$ est alors non dégénérée. Par suite, g vérifie alors les hypothèses du début de ce paragraphe. En appliquant le théorème B à l'adhérence de chaque composante connexe de $M - \Sigma(g)$ on obtient ([7], [8]) :

THÉORÈME III. — Avec les hypothèses précédentes, l'intégrale de la forme Pfaffienne Δ de D est égale à $\chi(M)$.

Bibliographie

- [1] S.S. CHERN. — *A simple intrinsic proof of Gauss-Bonnet formula for closed riemannian manifolds*, Ann. of Math. Stud., **45**(4) (1944), 747-752.
- [2] S.S. CHERN. — *Pseudo-riemannian geometry and Gauss-Bonnet formula*, Ann. Acad. Brazil, **95** (1963), 17-26.
- [3] W. GREUB, S. HALPERIN ET R. VANSTONE. — *Connections, curvature and cohomologie, Tome I et II*, Acad. Press, 1973.
- [4] M. KOSSOWSKI. — *Fold singularities in pseudo-riemannian geodesic tubes*, AMS-proceedings, **95** (1985), 463-469.
- [5] F. PELLETIER. — *Singularités génériques de pseudo-métriques sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **296** (1983), 219-221.
- [6] F. PELLETIER. — *Formule de Gauss-Bonnet pour certaines pseudo-métriques*, Séminaire sud-rhodanien de géométrie - Travaux en cours, Hermann-Paris, 1985.
- [7] F. PELLETIER. — *Caractérisations des sous-variétés génériques totalement géodédiques d'une variété semi-riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **303** (1986), 651-654.
- [8] F. PELLETIER. — *Intégrale de la forme Pfaffienne d'une connexion duale g -métrique*, Note proposée au C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., .

Université de Savoie
Mathématiques
BP 1104
73011 CHAMBERY Cedex