

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

NABILA TORKI

**Perturbations par champs magnétiques faibles sur  $S^2$**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 5 (1986-1987), p. 85-97

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1986-1987\\_\\_5\\_\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__85_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie  
CHAMBÉRY-GRENOBLE  
1986–1987 (85–97)

# PERTURBATIONS PAR CHAMPS MAGNÉTIQUES FAIBLES SUR $S^2$

par *Nabila TORKI*

## *Abstract*

By this work, we prove that the nonzero eigenvalues of the Laplacian —noted  $\Delta_0$ — associated to the Riemannian manifold  $(S^2, g_0)$  are all stable —in the sense of the Arnold's transversality hypothesis— for a weak electromagnetic field perturbation family of  $\Delta_0$ .

L'objet de ce travail est de montrer que toutes les valeurs propres non nulles du Laplacien  $\Delta_0$  associé à la variété Riemannienne  $(S^2, g_0)$  sont stables —au sens de l'hypothèse de transversalité d'Arnold— pour la famille des perturbations de  $\Delta_0$  par des champs électromagnétiques faibles.

## *Avant-Propos*

---

*Je tiens à ce que le Professeur Yves COLIN DE VERDIÈRE qui dirige mes recherches, Michel BRION, et Colette ANNÉ, trouvent ici l'expression de mes remerciements pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec eux.*

## SOMMAIRE

1. Introduction
  2. Laplacien sur un fibré au-dessus de  $S^2$
  3. Hypothèse d'Arnold
  4. Situation du Problème
  5. Perturbation par champ magnétique seul
- Appendice  
Références

### 1. Introduction

Soit  $(S^2, g_0)$  la sphère de dimension 2, munie de la métrique Riemannienne  $g_0$  induite par celle euclidienne canonique de  $\mathbf{R}^3$ . On note  $\Delta_0$  le Laplacien associé à  $(S^2, g_0)$  opérant sur  $L^2(S^2, v_{g_0})$ , espace de fonctions sur  $S^2$  à valeurs complexes. Il a pour spectre, la suite des valeurs propres  $(\lambda_l = l(l+1))_{l \geq 0}$  dégénérées, de multiplicité  $(2l+1)$  (voir [B.G.M]). L'espace propre de  $\Delta_0$  associé à  $\lambda_l$  est l'ensemble  $\mathcal{H}_l$  des harmoniques sphériques de degré  $l$ .

Sous l'action d'un champ magnétique *assez faible*, les  $(2l+1)$  raies spectrales superposées, qui correspondent à  $\lambda_l$ , éclatent. On obtient  $(2l+1)$  raies distinctes voisines de  $\lambda_l$  et symétriques par rapport à celle-ci pour une approximation du 1<sup>er</sup> ordre. C'est l'effet Zeemann en mécanique quantique (cf. [Bl]). Si on applique en plus un champ électrique assez faible, on a toutes les possibilités de distributions des  $(2l+1)$  raies dans un petit voisinage de  $\lambda_l$ . De plus, les opérateurs, dont la  $l^e$  valeur propre a la multiplicité  $(2l+1)$ , forment une sous-variété de codimension la dimension de l'espace des formes hermitiennes sur  $\mathcal{H}_l$ . Ceci s'exprime en disant que  $\lambda_l$  est stable pour cette perturbation.

Nous montrons cela en prouvant que l'hypothèse de transversalité d'Arnold (\*) est vérifiée dans cette situation.

Dans un premier paragraphe, nous définissons le Laplacien sur un fibré en droites complexes au-dessus de  $S^2$ . Nous introduisons ensuite l'hypothèse d'Arnold dans le cas de famille d'opérateurs à coefficients complexes et adaptée à notre cas.

---

(\*) Cette notion de stabilité des valeurs propres est inspirée d'une idée d'Arnold [A], développée et établie par Y. Colin de Verdière [CV 1], utilisée aussi par G. Besson [Be].

Puis, dans la partie ultérieure nous prouvons que cette hypothèse est vérifiée dans le cas considéré.

## 2. Laplacien sur un fibré au-dessus de $S^2$

Nous adopterons les définitions et résultats cités dans [W], ([K 2], §2), [CV 2].

1). — Soit  $E$  un fibré en droites complexes au-dessus de  $S^2$ . On munit  $E$  d'une structure hermitienne donnée par un produit hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  sur chaque fibre  $E_x$  de  $E$ ; tel que pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $S^2$  et toutes sections  $\eta, \xi$  de  $E$  définies sur  $\mathcal{U}$ , l'application :

$$\begin{aligned} \langle \eta, \xi \rangle : \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \langle \eta(x), \xi(x) \rangle_x \end{aligned}$$

est de classe  $C^\infty$ .

2) **Connexion sur  $E$ .** — On considère  $\tilde{d}$  une *connexion linéaire* sur  $E$  compatible avec la structure hermitienne dont on a muni  $E$ .

—  $\tilde{d}$  est un opérateur linéaire de  $C^\infty(E)$  (\*) dans  $\Lambda^1(E)$  tel que :  $\tilde{d}(a \cdot \xi) = da \cdot \xi + a \cdot \tilde{d}\xi$ , pour tout  $a \in C^\infty(S^2)$ ,  $\xi \in C^\infty(E)$ . Plus généralement, on définit  $\tilde{d}$  sur les  $p$ -formes sections :

$$\tilde{d} : \Lambda^p(E) \rightarrow \Lambda^{p+1}(E),$$

est un opérateur tel que :

$$\tilde{d}(\xi \cdot w) = \tilde{d}\xi \wedge w + \xi \cdot dw, \text{ pour } \xi \in C^\infty(E), w \in \Lambda^p(S^2).$$

Soit  $e$  une section locale (définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $S^2$ ) unitaire i.e.  $\langle e, e \rangle = 1$ . Alors  $\tilde{d}$  sera entièrement déterminée par son action sur  $e$ , c'est-à-dire par  $\tilde{d}e = \theta e$ . Ainsi  $\theta$  est la matrice de  $\tilde{d}$  dans la base  $e$ .

— La condition que  $\tilde{d}$  soit compatible avec la structure hermitienne de  $E$  est exprimée par :

$$d\langle \eta, \xi \rangle = \langle \tilde{d}\eta, \xi \rangle + \langle \eta, \tilde{d}\xi \rangle$$

$\eta, \xi$  deux sections locales sur  $E$ ; Ce qui donne, pour  $\eta = \xi = e$ ,  $\langle e, e \rangle = 1$  et  $\theta + \bar{\theta} = 0$ .

C'est-à-dire que  $\theta$  est une 1-forme imaginaire pure qui s'écrit  $\theta = i\alpha$ , avec  $\alpha$  : une 1-forme réelle sur  $S^2$ .

---

(\*)  $C^\infty(E)$  est l'ensemble des sections  $C^\infty$  de  $E$   
 $C^\infty(S^2)$  est l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  sur  $S^2$  à valeurs complexes  
 $\Lambda^p(S^2) = \{p\text{-formes sur } S^2\}$   
 $\Lambda^p(E) = C^\infty(E) \otimes \Lambda^p(S^2)$ .

### 3) Remarques.

1 - Nous supposons dans la suite que  $E$  est le fibré trivial au-dessus de  $S^2$ . Ainsi tout ce qu'on vient d'introduire localement dans un ouvert de  $S^2$  peut être vu globalement sur la sphère.

2 - Nous pouvons alors voir  $\tilde{d}$  comme opérant sur les fonctions de  $S^2$ . En effet :

$$\tilde{d}(a \cdot e) = da \cdot e + ia\alpha e = (da + ia\alpha)e .$$

où  $a \in C^\infty(S^2)$ .

Tenant compte des remarques 1 et 2, nous avons l'opérateur

$$\begin{aligned} \tilde{d}: C^\infty(S^2) &\rightarrow \Lambda^1(S^2) \\ a &\mapsto da + ia\alpha . \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{d} = d + ia\alpha$ .

4) **Matrice courbure de  $\tilde{d}$ .** — On note  $\Omega$  la matrice courbure de  $\tilde{d}$  dans la base  $e$ . Par définition :  $\Omega = d\theta + \theta \wedge \theta$  qui est égale à  $d\theta = id\alpha$  dans notre cas.

DÉFINITION. — On appelle *champ magnétique* sur  $(S^2, g_0, E, \tilde{d})$ , la 2-forme réelle fermée  $d\alpha$  associée à la connexion  $\tilde{d}$  sur  $E$ .

NOTATION. —  $d\alpha = bv_0$ , où  $v_0$  est la 2-forme volume sur  $(S^2, g_0)$  et  $b \in C^\infty(S^2)$ .

5) **Laplacien associé à  $(S^2, g_0, E, \tilde{d})$ .** — Nous définissons en fait la forme hermitienne  $q_\alpha$  qui est associée au Laplacien  $\Delta_\alpha$  de  $(S^2, g_0, E, \tilde{d})$  de la façon suivante :

$$\langle \Delta_\alpha f, g \rangle = q_\alpha(f, g), \text{ pour toutes } f, g \in C^\infty(S^2) .$$

DÉFINITION. — La forme hermitienne  $q_\alpha$  sur  $C^\infty(S^2)$  est donnée par :

$$q_\alpha(f, g) = \int_{S^2} (df + if\alpha)(\overline{dg + ig\alpha})v_0$$

pour toutes  $f, g \in C^\infty(S^2)$ .

Remarque. —

1 - Si  $\alpha' = \alpha + da$  où  $a \in C^\infty(S^2)$ , les champs magnétiques associés sont égaux. Naturellement, on s'attend à ce qu'ils produisent les mêmes phénomènes. En effet  $\Delta_\alpha$  et  $\Delta_{\alpha'}$  sont unitairement équivalents (\*) :  $\Delta_{\alpha'} = e^{-ia}\Delta_\alpha e^{ia}$ . Ils ont par conséquent le même spectre. Donc il suffit de paramétrer  $\Delta_\alpha$  par  $b$ .

---

(\*) Voir [A-H-S], page 848, [K 2], page 6.

2 - En outre, la 1-forme  $\alpha$  se décompose d'une manière unique comme :  $\alpha = d^*(\varphi v_0) + da$ , où  $a, \varphi \in C^\infty(S^2)$ .

D'après la remarque 1, on peut supposer  $da = 0$ . Il en résulte que  $b$  est égal à  $d(d^*(\varphi v_0))$ , soit  $-\Delta\varphi$ . Et la famille des Laplaciens  $\Delta_\alpha$  sera paramétrée par les  $\varphi$ . Et on a :

$$\langle \Delta_\varphi f, g \rangle = \int_{S^2} (df + ifd^*(\varphi v_0)) \overline{(dg + igd^*(\varphi v_0))} v_0.$$

où  $f, g \in C^\infty(S^2)$ .

### 3. Hypothèse d'Arnold

On se place directement dans le cas de la variété Riemannienne  $(S^2, g_0)$ , et avec la famille d'opérateurs qui nous intéresse.

Soit  $\Delta_h = \Delta_\varphi + V$ , où  $h = (\varphi, V) \in C^\infty(S^2) \times C^\infty(S^2) = T$ . C'est le Laplacien  $\Delta_0$  de  $(S^2, g_0)$  perturbé par un champ magnétique ( $bv_0 = -\Delta\varphi v_0$ ) et par un champ électrique  $V$ .

Les  $\Delta_h$  ( $h$  varie dans  $T$ ) opèrent sur le même domaine et dépendent continuellement de  $h$  dans  $T$ .

Fixons une valeur propre  $\lambda_l$ , ( $l \geq 1$ ) de  $\Delta_0$ . Et soit  $D$  le disque de  $\mathbb{C}$  centré en  $\lambda_l$  et de rayon  $\varepsilon$  assez petit, de sorte que  $D$  ne rencontre le spectre de  $\Delta_0$  qu'en  $\lambda_l$ . Alors, il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de 0 dans  $T$ , tel que pour tout  $h \in \mathcal{O}$ , la dimension de la somme  $E_h$  des espaces propres de  $\Delta_h$  associés aux valeurs propres contenues dans  $D$  est égale à la multiplicité de  $\lambda_l$  (voir [CV 1], §1).

On considère donc des perturbations  $\Delta_h$  de  $\Delta_0$  par des champs électromagnétiques faibles c'est-à-dire voisins de 0.

Lorsque  $h$  tend vers 0, l'espace  $E_h$  se rapproche de  $E_0 = \mathcal{H}_l$ . On note  $I_h$  l'isométrie naturelle de  $E_0$  dans  $E_h$  (\*).  $\mathcal{Herm}(\mathcal{H}_l)$  désigne l'espace de toutes les formes hermitiennes sur  $\mathcal{H}_l$ .

**DÉFINITION.** — La valeur propre  $\lambda_l$  vérifie l'hypothèse d'Arnold forte (SAH) relativement à la famille  $(\Delta_h)_{h \in T}$ , si l'application, de l'ouvert  $\mathcal{O}$  vers  $\mathcal{Herm}(\mathcal{H}_l)$  qui à  $h \in \mathcal{O}$  associe la forme  $q_h(I_{h^\bullet}, I_{h^\bullet})$  dans  $\mathcal{Herm}(\mathcal{H}_l)$ , est une submersion en  $h = 0$ .

**CRITÈRE** (de Y. Colin de Verdière), (cf. [CV 1]). — Pour que  $\lambda_l$  vérifie (SAH) il faut et il suffit que la différentielle de l'application  $\Psi : \begin{matrix} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Herm}(\mathcal{H}_l) \\ a \mapsto q_a \end{matrix}$ , en  $a = 0$ , soit surjective.

(\*) Pour plus de détails, voir [CV 1], §1.

Nous utiliserons ce critère pour notre problème.

#### 4. Situation du problème

Soit  $T_0\mathcal{O}$  l'espace tangent à  $\mathcal{O}$  en 0,  $T_0\mathcal{O} = C^\infty(S^2) \oplus C^\infty(S^2)$ . On note  $\dot{q}_h = d\Psi_0 \cdot h$  : la différentielle de  $\Psi$  en 0 dans la direction  $h$ .

Nous allons montrer que l'application  $d\Psi_0 : \begin{matrix} C^\infty(S^2) \oplus C^\infty(S^2) \rightarrow \text{Herm}(\mathcal{H}_I) \\ h \mapsto \dot{q}_h \end{matrix}$  est surjective.

La clé de la démonstration est la remarque suivante.

*Remarque.* —

1 - En tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ ,  $\text{Herm}(\mathcal{H}_I)$  se décompose en somme directe  $Q(\mathcal{H}_I) \oplus i\mathcal{A}(\mathcal{H}_I)$ ; où  $Q(\mathcal{H}_I)$  est l'espace des formes quadratiques réelles sur  $\mathcal{H}_I$  et  $\mathcal{A}(\mathcal{H}_I)$  est celui des formes antisymétriques réelles.

2 - Dans l'espace tangent  $T_0\mathcal{O}$ , les variations dans les directions  $(\varphi, 0)$  et  $(0, V)$  sont des variations indépendantes. Nous avons alors  $\dot{q}_h = \dot{q}_{(\varphi, 0)} + \dot{q}_{(0, V)}$ ;  $\dot{q}_\varphi$  correspond à la famille  $(\Delta_{(\varphi, 0)})_\varphi$  et  $\dot{q}_V$  à la famille  $(\Delta_{(0, V)})_V$ .

3 - L'application :  $\begin{matrix} C^\infty(S^2) \rightarrow Q(\mathcal{H}_I) \\ V \mapsto \dot{q}_V = \langle V \bullet / \bullet \rangle \end{matrix}$  est surjective (cf. [CV 1]§2).

Il est naturel de voir que l'application  $F : \begin{matrix} C^\infty(S^2) \rightarrow i\mathcal{A}(\mathcal{H}_I) \\ \varphi \mapsto \dot{q}_\varphi \end{matrix}$  est surjective.

Ainsi,  $d\psi : h \mapsto \dot{q}_h$  est surjective, et le problème est résolu.

#### 5. Perturbation par champ magnétique seul

Nous allons démontrer que l'application  $F : \varphi \mapsto \dot{q}_\varphi$  est une application surjective de  $C^\infty(S^2)$  sur  $i\mathcal{A}(\mathcal{H}_I)$ .

**a - Explicitons d'abord  $\dot{q}_\varphi$ .** — Rappelons que  $q_\varphi$  est donnée par :

$$q_\varphi(f, g) = \int_{S^2} (df + ifd^*(\varphi v_0)) \overline{(dg + igd^*(\varphi v_0))} v_0 ; f, g \in \mathcal{H}_I .$$

La dérivée  $\dot{q}_\varphi$  dans la direction  $\varphi$ , est alors donnée par :

$$\dot{q}_\varphi(f, g) = \int_{S^2} (id^*(\varphi v_0) f d\bar{g} - i\bar{g} df d^*(\varphi v_0)) v_0 ; f, g \in \mathcal{H}_1 .$$

Soit  $\dot{q}_\varphi(f, g) = i \int_{S^2} d^*(\varphi v_0)(f d\bar{g} - \bar{g} df) v_0$ . On peut voir facilement que pour  $f$  et  $g$  réelles on a :

$$\dot{q}_\varphi(f, g) = -\dot{q}_\varphi(g, f) .$$

Ce qui se traduit, tenant compte du fait que  $\dot{q}_\varphi$  est une forme hermitienne, par :  $\dot{q}_\varphi(f, g) = -\dot{q}_\varphi(\bar{g}, \bar{f})$ , pour  $f, g$  complexes.

Donc  $\dot{q}_\varphi$  appartient à  $i\mathcal{A}(\mathcal{H}_1)$ , c'est-à-dire que l'image de l'application linéaire  $F$  est contenue dans  $i\mathcal{A}(\mathcal{H}_1)$ .

Nous nous proposons de prouver qu'elle est en fait égale à  $i\mathcal{A}(\mathcal{H}_1)$ .

**b -  $F$  est surjective.** — Nous allons montrer que l'application, qu'on notera encore  $F$ ,  $F : \mathcal{P}_{2l-1} \rightarrow i\mathcal{A}(\mathcal{H}_1)$  est surjective, où  $\mathcal{P}_{2l-1}$  est l'ensemble des polynômes homogènes de degré  $2l - 1$  de  $\mathbf{R}^3$ .

1) Reprenons d'abord l'expression de  $\dot{q}_\varphi(f, g)$  et simplifions-la.

$$\begin{aligned} \dot{q}_\varphi(f, g) &= i \int_{S^2} d^*(\varphi v_0)(f d\bar{g} - \bar{g} df) v_0 \\ &= i \int_{S^2} (\varphi v_0) d(f d\bar{g} - \bar{g} df) v_0 \\ &= i \int_{S^2} (\varphi v_0)(df \wedge d\bar{g} - d\bar{g} \wedge df) v_0 \\ &= 2i \int_{S^2} (\varphi v_0) \wedge *(df \wedge d\bar{g}) . \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\dot{q}_\varphi(f, g) = 2i \int_{S^2} \varphi \cdot *(df \wedge d\bar{g}) v_0$$

2) Nous considérons l'application  ${}^tF$ , transposée de  $F$ . Il suffira alors de montrer que l'application  ${}^tF$ , du dual de  $i\mathcal{A}(\mathcal{H}_1)$  dans le dual de  $\mathcal{P}_{2l-1}$ , est injective.

Le dual de  $\mathcal{P}_{2l-1}$  sera identifié à  $\mathcal{P}_{2l-1}$  lui-même. Et le dual de  $i\mathcal{A}(\mathcal{H}_1)$  est l'ensemble des 2-formes anti-symétriques sur  $\mathcal{H}_1$ , noté  $\mathcal{H}_1 \wedge \overline{\mathcal{H}}_1$ . Pour  $\varphi \wedge \overline{\psi}$  de  $\mathcal{H}_1 \wedge \overline{\mathcal{H}}_1$  on a :

$$\varphi \wedge \overline{\psi}(f, g) = \frac{1}{2} [\varphi(f)\psi(\bar{g}) - \varphi(g)\psi(\bar{f})] , f, g \text{ dans } \mathcal{H}_1 .$$



Puis nous identifierons  $\varphi$  et  $\psi$  à des fonctions de  $\mathcal{H}_l$ .

Ainsi nous avons :

$${}^tF : \begin{array}{l} \mathcal{H}_l \wedge \overline{\mathcal{H}}_l \rightarrow \mathcal{P}_{2l-1} \\ \varphi \wedge \overline{\psi} \mapsto *(d\varphi \wedge d\overline{\psi}). \end{array}$$

Il est à remarquer que  $\mathcal{P}_{2l-1}$  et  $\mathcal{H}_l \wedge \overline{\mathcal{H}}_l$  ont la même dimension  $l(2l+1)$ . Il est alors suffisant de montrer que  ${}^tF$  est surjective.

3) Nous utiliserons pour cela des arguments de la théorie des représentations du groupe  $SO(3)$  (cf. [V], [B-D]). (\*)

Le groupe  $SO(3)$  opère sur  $\mathcal{P}_{2l-1}$  et  $\mathcal{A}(\mathcal{H}_l)$ . Et la décomposition de ces deux espaces en somme directe d'espaces invariants irréductibles sous l'action de  $SO(3)$  (\*\*\*) est :

$$\mathcal{H}_{2l-1} \oplus \mathcal{H}_{2l-3} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_1.$$

Vu que  ${}^tF$  commute avec l'action du groupe  $SO(3)$ ; pour que  ${}^tF$  soit surjective, il faut et il suffit que chaque  $\mathcal{H}_{2k+1}$  ( $0 \leq k \leq l-1$ ) —invariant et irréductible— contienne un élément atteint par  ${}^tF$ .

Or on a le lemme suivant :

LEMME. — *Tout sous-espace de  $\mathcal{P}_{2l-1}$ , invariant par  $SO(3)$  et irréductible, contient une fonction zonale c'est-à-dire invariante par rotation autour de  $(Oz)$ , soit invariante par le sous-groupe  $SO(2)$  de  $SO(3)$ . (cf. [V], chap. IX, §2.10).*

Notons  $a = x + iy$ ,  $b = z$  et  $c = x - iy$ ;  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont harmoniques et homogènes de degré 1. Et le système de monôme  $\mathcal{B} : (e_{u,v} = a^u b^v c^w, u+v+w = 2l-1)$  constitue une base de  $\mathcal{P}_{2l-1}$ . L'espace des fonctions zonales est engendré par le système  $\mathcal{B}' : (e_{u,u} = a^u b^v c^u, 2u+v = 2l-1)$ .

D'après le lemme précédent,  $\mathcal{H}_{2k+1}$  contient une fonction zonale, pour tout  $0 \leq k \leq l-1$ . Cette fonction zonale est combinaison linéaire de monômes zonaux.

Il suffit donc que tout monôme zonal de  $\mathcal{B}'$  soit atteint par  ${}^tF$ . Nous allons voir que  $e_{l-1,l-1}$  est atteint par  ${}^tF$ , et que nous pouvons ensuite atteindre les autres  $e_{u,u}$  de  $\mathcal{B}'$ .

**1ère étape.** — Prenons  $\varphi = \psi = a^l$  qui est un élément de  $\mathcal{H}_l$  et trouvons l'image

(\*) M. Brion m'a aidé à utiliser ces arguments, je l'en remercie.

(\*\*) Pour la décomposition de  $\mathcal{P}_{2l-1}$ , voir par exemple [B-G-M], lemme C.I.2. Et pour celle de  $\mathcal{A}(\mathcal{H}_l)$ , voir Appendice.

de  $\varphi \wedge \bar{\psi}$  par  ${}^tF$ .

$$\begin{aligned} d\varphi \wedge d\bar{\psi} &= da^l \wedge d\bar{a}^l \\ &= l(x+iy)^{l-1}(dx+idy) \wedge l(x-iy)^{l-1}(dx-idy) \\ &= -2il^2(x+iy)^{l-1}(x-iy)^{l-1}dx \wedge dy \\ &= -2il^2(x+iy)^{l-1}z(x-iy)^{l-1}v_0 ; \text{ avec } v_0 = \frac{dx \wedge dy}{z} . \end{aligned}$$

D'où, finalement

$$\begin{aligned} {}^tF(a^l \wedge \bar{a}^l) &= *(da^l \wedge d\bar{a}^l) \\ &= -2il^2 a^{l-1} b c^{l-1} \\ &= -2il^2 e_{l-1, l-1} . \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons trouvé un antécédent de  $e_{l-1, l-1}$  par  ${}^tF$  qui est  $\frac{i}{2l^2} a^l \wedge \bar{a}^l$ .

**2ème étape.** — Nous introduisons ici les dérivations  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  qui engendrent l'algèbre de Lie  $so(3)$  opérant sur  $\mathcal{P}_{2l-1}$  par dérivations.

$L_x = y\partial_z - z\partial_y$  et les autres s'obtiennent par permutation circulaire.

$L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$  correspondent aux rotations autour de  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  respectivement.

On pose  $W_{\pm} = L_y \pm iL_x$ , et on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} W_+(a) &= W_-(c) = 2b , \\ W_+(c) &= W_-(a) = 0 , \\ W_+(b) &= -c , \quad W_-(b) = -a . \end{aligned}$$

Les opérateurs  $W_{\pm}$  agissent sur un monôme de  $\mathcal{B}$  en augmentant et diminuant le poids  $(u+v)$  de 1, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W_+(e_{u,w}) &= 2ue_{u-1,w} - ve_{u,w+1} \\ W_-(e_{u,w}) &= 2we_{u,w-1} - ve_{u+1,w} . \end{aligned}$$

De plus, il ne peut se produire par l'action de  $W_+$  ou  $W_-$  qu'il y ait un terme dont le poids  $(u+v)$  est supérieur à  $2l-1$ .

**3ème étape.** — On applique  $W_+$  puis  $W_-$  au monôme  $e_{l-1, l-1}$  :

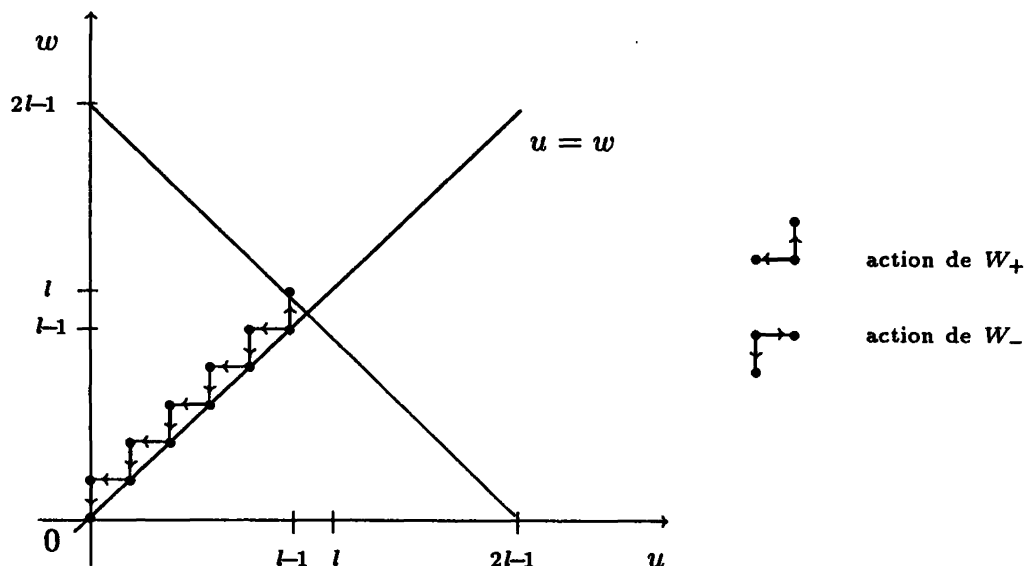
$$\begin{aligned} W_+(e_{l-1, l-1}) &= 2(l-1)e_{l-2, l-1} - e_{l-1, l} \\ W_-W_+(e_{l-1, l-1}) &= 2(3l-2)e_{l-1, l-1} + 4(l-1)^2 e_{l-2, l-2} . \end{aligned}$$

Et on a alors :

$$e_{l-2, l-2} = \frac{-2(3l-2)}{4(l-1)^2} e_{l-1, l-1} + \frac{1}{4(l-1)^2} W_-W_+(e_{l-1, l-1}) .$$

Vu que  ${}^tF$  est linéaire et  $W_{\pm}$  commutent avec  ${}^tF$ , le monôme  $e_{l-2, l-2}$  admet un antécédent par  ${}^tF$ .

Nous obtiendrons aussi tous les monômes  $e_{u,u}$  de  $\mathcal{B}'$  en appliquant successivement  $W_+$  et  $W_-$  (voir figure).



Et nous avons un antécédent de  $e_{u,u}$  par  ${}^tF$  à partir de celui de  $e_{u+1,u+1}$  ( $0 \leq u \leq l-2$ ).

Donc tout monôme zonal de  $\mathcal{B}'$  admet un antécédent par  ${}^tF$ . Par suite, toutes les fonctions zonales sont atteintes par  ${}^tF$ . En particulier, celle appartenant à  $\mathcal{H}_{2k+1}$ .

Ce qui achève notre démonstration.

## Appendice

Nous allons prouver (\*) dans cet Appendice la décomposition de  $\mathcal{A}(\mathcal{H}_l)$  en somme directe d'espaces invariants et irréductibles sous l'action de  $SO(3)$ ; qui intervient dans §5b.3).

Nous montrons que :

$$(1) \quad \mathcal{A}(\mathcal{H}_l) = \mathcal{H}_{2l-1} \oplus \mathcal{H}_{2l-3} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_1 .$$

**1. Observation.** — Vu que le caractère d'une représentation détermine celle-ci à isomorphisme près, nous allons montrer l'égalité (1) sur les caractères des représentations du groupe  $SO(3)$  sur les espaces respectifs. Soit à montrer :

$$(2) \quad \chi_A = \chi_1 + \chi_3 + \cdots + \chi_{2l-3} + \chi_{2l-1} ,$$

(\*) Les résultats utilisés se trouvent dans [B-D]; notamment le chapitre II.

en notant  $\chi_j$  le caractère de la représentation sur  $\mathcal{H}_j$ , pour  $j = 1, 3, \dots, 2l-1$ ; et  $\chi_A$  celui de  $\mathcal{A}(\mathcal{H}_l)$ .

(Nous avons aussi utilisé le fait que le caractère d'une représentation sur une somme directe d'espaces est la somme des caractères sur chaque espace respectivement).

**2. Calcul de  $\chi_j$ .** — Tout élément  $r$  du groupe  $SO(3)$  est conjugué à une notation  $r_t$  dont la matrice est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ .

Donc nous avons  $\chi_j(r) = \chi_j(r_t)$ .

Notons  $T_j$  la représentation de  $SO(3)$  sur  $\mathcal{H}_j$ .  $\chi_j(r_t)$  est la somme des valeurs propres de l'opérateur  $T_j(r_t)$ , qui sont les  $(e^{ikt})_{-j \leq k \leq j}$ . Alors  $\chi_j(r_t) = \sum_{-j \leq k \leq j} e^{ikt}$ . Le deuxième membre de (2) devient :

$$(3) \quad (\chi_1 + \chi_3 + \dots + \chi_{2l-1})(r_t) = \sum_{-1 \leq k \leq 1} e^{ikt} + \sum_{-3 \leq k \leq 3} e^{ikt} + \dots + \sum_{-2l+1 \leq k \leq 2l-1} e^{ikt}.$$

**3. Calcul de  $\chi_A$ .** —  $\mathcal{A}(\mathcal{H}_l)$  est identifié à  $\mathcal{H}_l \wedge \mathcal{H}_l$ . Notons  $x_{-l}, \dots, x_{l-1}, x_l$  les vecteurs propres de  $T_l(r_t)$  associés aux valeurs propres  $e^{-ilt}, \dots, e^{i(l-1)t}, e^{ilt}$ . Ces vecteurs forment une base de  $\mathcal{H}_l$ . Et une base de  $\mathcal{H}_l \wedge \mathcal{H}_l$  est le système  $(x_j \wedge x_k)_{-l \leq j < k \leq l}$ .

L'action de  $SO(3)$  sur  $\mathcal{H}_l \wedge \mathcal{H}_l$  est donnée par  $(T_l \wedge T_l)$ .

$$((T_l \wedge T_l)(r))(x \wedge x') = (T_l(r))(x) \wedge (T_l(r))(x');$$

pour  $r \in SO(3)$ ;  $x, x' \in \mathcal{H}_l$ .

Nous avons donc, pour les vecteurs propres de  $\mathcal{H}_l$  :

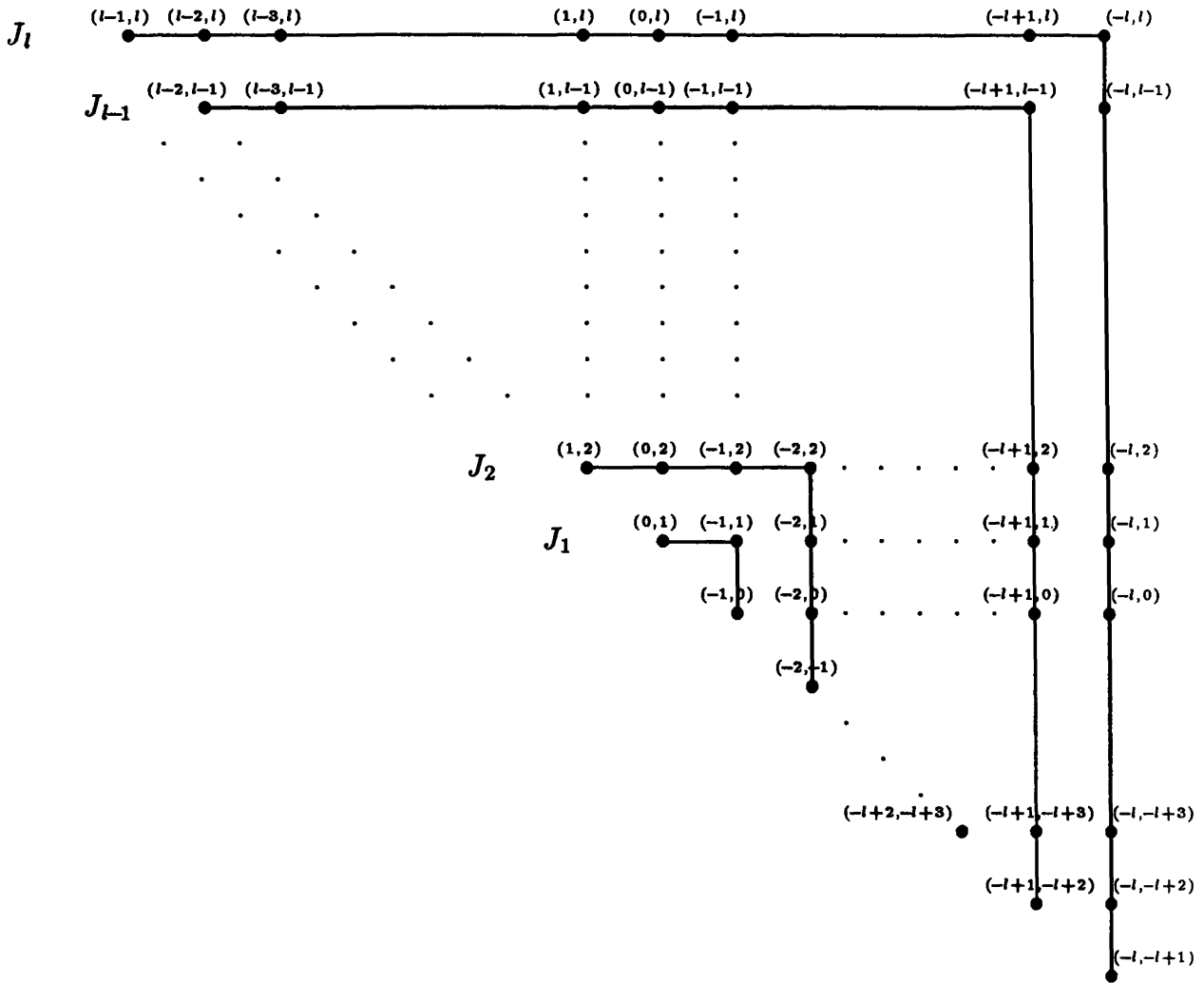
$$\begin{aligned} ((T_l \wedge T_l)(r_t))(x_j \wedge x_k) &= e^{ijt} x_j \wedge e^{ikt} x_k \quad ; -l \leq j < k \leq l \\ &= e^{i(j+k)t} (x_j \wedge x_k). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $(T_l \wedge T_l)(r_t)$  sont donc les  $(e^{i(j+k)t})_{-l \leq j < k \leq l}$ . Et nous avons par conséquent :

$$(4) \quad \chi_A(r_t) = \sum_{-l \leq j < k \leq l} e^{i(j+k)t}.$$

**4. Preuve de (2).** — Nous allons resommer les termes de la somme dans (4), de sorte à retrouver la forme (3).

Soit  $\{J = \{(j, k), \text{ tel que } -l \leq j < k \leq l\}$  Représentons les éléments de  $J$  par des points, de telle sorte que sur chaque ligne  $k$  est fixé et  $j$  varie de  $-l$  à  $k$ . Nous obtenons la figure ci-dessous :



Avec  $J_1, J_2, \dots, J_{l-1}, J_l$  les ensembles des points  $(j, k)$  se trouvant respectivement dans les lignes brisées tracées sur la figure.

Ainsi, nous avons :

$$\sum_{(j,k) \in J_n} e^{i(j+k)t} = \sum_{m=2n-1}^{-2n+1} e^{imt} = \chi_{2n-1} .$$

Comme  $\sum_{(j,k) \in J} e^{i(j+k)t} = \sum_{n=1}^l \sum_{(j,k) \in J_n} e^{i(j+k)t}$ , nous obtenons l'égalité  $\sum_{(j,k) \in J} e^{i(j+k)t} = \sum_{n=1}^l \chi_{2n-1}$  c'est-à-dire  $\chi_A = \sum_{n=1}^l \chi_{2n-1}$ .

Ce qui achève notre preuve.

## Références

- [A] ARNOLD V.I.. — *Modes and quasi-modes*, Functional Anal. Appl., **6** (1972), 94-101.
- [A-H-S] AVRON J., HERBST I. SIMON B.. — *Schrödinger operators with magnetic fields. I - General interactions*, Duke Math. J., **45** (1978), 847-883.
- [B-G-M] BERGER-GAUDUCHON-MAZET. — *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer Verlag, 1971.
- [B-D] BRÖCKER I., DIECK T.T.. — *Representations of compact Lie groups*, Springer Verlag, 1985.
- [Be] BESSON G.. — *Propriétés génériques des fonctions propres et multiplicité*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, 1987.
- [Bl] BLOKHINTSEV D.. — *Principes de mécanique quantique*, Mir Moscou, 1981, §74, page 312.
- [CV 1] COLIN DE VERDIÈRE Y.. — *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold*, à paraître dans Comment. Math. Helv., 1987.
- [CV 2] COLIN DE VERDIÈRE Y.. — *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Math. Phys., **105** (1986), 327-335.
- [K 1] KUWABARA R.. — *Some spectral results for the laplacian on line bundles over  $S^n$* , Comment. Math. Helv., **59** (1984), 439-458.
- [K 2] KUWABARA R.. — *On spectra of the Laplacian on vector bundles*, J. Math. Tokushima Univ., **16** (1982), 1-23.
- [V] VILENKIN N.J.. — *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, 1969.
- [W] WELLS R.O.. — *Differential analysis on complex manifolds*, Springer Verlag, 1980 Chapitres I et III.