

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GUY LAFFAILLE

## Déterminants de laplaciens

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 5 (1986-1987), p. 77-84

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1986-1987\\_\\_5\\_\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__77_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DÉTERMINANTS DE LAPLACIENS

par Guy LAFFAILLE

### 1. Introduction

Soit  $M$  une surface compacte à bord  $\partial M$  de classe  $C^\infty$ . Dans [OPS], OSGOOD, PHILLIPS et SARNAK donnent une formule explicite pour le déterminant du laplacien et montrent que le maximum de ce déterminant est atteint pour une métrique uniforme.

DÉFINITION. — On appelle *métrique uniforme* une métrique sur  $M$  vérifiant une des propriétés suivantes :

- (i) si  $\partial M = \emptyset$  alors  $M$  est fermée et a une courbure constante;
- (ii) si  $\partial M \neq \emptyset$  alors
  - (I)  $M$  a une courbure constante et  $\partial M$  est une réunion de géodésiques
  - ou
  - (II)  $M$  est plate et  $\partial M$  a une courbure géodésique constante.

Un hémisphère, un pantalon, un cylindre vérifient (I); un cylindre, le disque unité euclidien, un tore plat avec des trous circulaires égaux vérifient (II).

Dans la suite, on désigne par  $K$  la courbure de GAUSS, par  $\chi$  la caractéristique d'EULER, par  $A$  l'aire, par  $k$  la courbure géodésique et par  $ds$  l'élément de longueur.

#### THÉORÈME 1.

a) Si  $M$  est fermée, la métrique uniforme est celle qui a un déterminant maximum parmi les métriques d'une classe conforme et d'aire donnée.

b) Si  $\partial M = \emptyset$ , la métrique uniforme de type (I) a un déterminant maximum

parmi les métriques d'une classe conforme, d'aire donnée et vérifiant

$$\int_{\partial M} k ds \geq 0 \quad (CI)$$

c) Si  $\partial M \neq \emptyset$ , la métrique uniforme de type (II) a un déterminant maximum parmi les métriques d'une classe conforme, de longueur du bord donnée et vérifiant

$$\int_{\partial M} k ds \geq 2\pi\chi(M) \quad (CII)$$

## 2. Formule du déterminant

Soit  $M$  une surface sans bord et  $\sigma$  une métrique sur  $M$ . Soient  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  les valeurs propres du laplacien  $\Delta$ . Soit  $u_j$  une base orthonormée de vecteurs propres ( $\Delta u_j + \lambda_j u_j = 0$ ).

DÉFINITION. — On pose

$$\det' \Delta = \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i$$

On va montrer que cette définition a un sens. Pour cela on définit une fonction zeta par

$$Z(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s}$$

Cette fonction converge pour  $\Re(s) > 1$  d'après le comportement asymptotique des valeurs propres et formellement on a  $\det' \Delta = e^{-Z'(0)}$ .

En utilisant la fonction  $\Gamma$ , on a

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \right) t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} (\text{Tr}(e^{t\Delta}) - 1) t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \text{Tr} \left( e^{t\Delta} - \frac{1}{A} \right) t^{s-1} dt \end{aligned}$$

Le noyau de  $e^{t\Delta}$  est

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} u_j^2(x) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{K(x)}{12\pi} + o(t)$$

Donc

$$\text{Tr}(e^{\Delta t}) = \frac{A}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + o(t)$$

et

$$Z(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{A}{4\pi(s-1)} + \left( \frac{\chi(M)}{6} - 1 \right) \frac{1}{s} + \text{analytique en } s \right\}$$

pour  $\Re(s) > -1$ .

On en déduit que  $Z$  est régulière en  $s = 0$  et  $\det' \Delta$  a bien un sens.

On désire faire varier la métrique : on fixe une métrique  $\sigma_0$  sur  $M$  et on pose  $\sigma = \rho\sigma_0$  avec  $0 < \rho \in C^\infty(M)$ . On écrit  $\rho = e^{2\varphi}$  et on fait varier  $\varphi$ . On a les formules :

$$\begin{cases} dA = e^{2\varphi} dA_0 \\ \Delta = e^{-2\varphi} \Delta_0 \\ K = e^{-2\varphi} (-\Delta_0 \varphi + K_0) \end{cases} .$$

Un petit calcul de variations donne :

$$\begin{aligned} \delta Z(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \text{Tr} \left( e^{\Delta t} - \frac{1}{A} \right) t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \text{Tr} (\delta \Delta e^{\Delta t}) t^s dt \\ \delta \Delta &= -2e^{-2\varphi} \delta \varphi \Delta_0 = -2\delta \varphi \Delta \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta Z(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \text{Tr} (-2\delta \varphi \Delta e^{t\Delta}) t^s dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \text{Tr} \left( 2\delta \varphi \left( e^{\Delta t} - \frac{1}{A} \right) \right) t^s dt \\ &= \frac{2s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \text{Tr} \left( \delta \varphi \left( e^{\Delta t} - \frac{1}{A} \right) \right) t^{s-1} dt \end{aligned}$$

La fonction  $\Gamma$  a un pôle simple en 0, donc en dérivant et en faisant  $s = 0$ , il reste :

$$\begin{aligned} \delta Z'|_{s=0} &= 2 \int_M (\delta \varphi) \left( \frac{K(x)}{12\pi} - \frac{1}{A} \right) e^{2\varphi} dA_0 \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_M (\delta \varphi) (-\Delta_0 \varphi + K_0) dA_0 - \delta \log A \end{aligned}$$

d'où en intégrant :

$$\log \det' \Delta_\varphi = -\frac{1}{6\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0 \varphi dA_0 \right\} + \log A + C$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varphi$ .

Vérification : si  $\varphi$  est constante, ça marche!

$$\begin{aligned}\lambda_n &= e^{-2\varphi} \lambda_n^0 \\ Z_\varphi(s) &= \sum (\lambda_n^0 e^{-2\varphi})^{-s} = e^{2s\varphi} Z_0(s) \\ Z'_\varphi(0) &= Z'_0(0) + 2\varphi \left( \frac{\chi(M)}{6} - 1 \right).\end{aligned}$$

### 3. Le cas où $M$ a un bord

Soit  $k$  la courbure géodésique du bord de  $M$ . On a la formule supplémentaire :

$$k = e^{-2\varphi} (k_0 + \partial_n \varphi)$$

où  $\partial_n$  désigne la dérivée normale extérieure.

Soient  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$  les valeurs propres pour le problème de DIRICHLET.

On procède de la même façon et on a :

$$\text{Tr}(e^{\Delta t}) = \frac{A}{4\pi t} - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}} \int_{\partial M} ds + \frac{1}{6} \chi(M) + o(\sqrt{t}) \quad ,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\log \det' \Delta_\varphi &= -\frac{1}{6\pi} \left\{ \int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0 \varphi dA_0 + \int_{\partial M} k_0 \varphi ds_0 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial M} k ds + C\end{aligned}$$

### 4. La fonctionnelle $F$

On va remplacer le déterminant du laplacien par une fonctionnelle.

Si  $\partial M = \emptyset$ , on pose

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla_0 \varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0 \varphi dA_0 - \pi \chi(M) \log \left( \int_M e^{2\varphi} dA_0 \right)$$

La formule de GAUSS-BONNET donne  $F(\varphi + a) = F(\varphi)$ . On a

$$F(\varphi) = -6\pi \log(\det' \Delta_\varphi) + \pi(6 - \chi(M)) \log A.$$

On impose que  $A = 1$  ou plutôt que

$$\int_M \varphi dA_0 = 0.$$

Si  $\psi$  minimise  $F$  avec  $\int_M \psi dA_0 = 0$  alors  $\varphi = \psi - \frac{1}{2} \log \left( \int_M e^{2\varphi} dA_0 \right)$  minimise  $F$  avec  $A = 1$ .

Dans le cas à bord, on définit de même des fonctionnelles  $F_1$  et  $F_2$ . On néglige les termes  $\int_{\partial M} k ds$ , en se restreignant à  $\int_{\partial M} k ds = \text{cte}$ .

On peut supposer que le bord est formé de géodésiques ( $k_0 = 0$ ). Sinon on remplace  $\sigma_0$  par  $e^{2\varphi}\sigma_0$  où  $\varphi$  vérifie  $\partial_n\varphi + k_0 = 0$ . Si  $k_0 = 0$ , les fonctionnelles  $F_1$  et  $F$  sont identiques.

Dans le cas où la longueur du bord est constante, on peut supposer que  $\sigma_0$  est plate ( $K_0 = 0$ ). Sinon on prend  $\varphi$  telle que  $\Delta_0\varphi = K_0$ .

Si  $\sigma$  est plate, alors  $\int_{\partial M} k ds = 2\pi\chi(M)$  et

$$F_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\nabla\varphi|^2 dA_0 + \int_{\partial M} k_0\varphi ds_0 - 2\pi\chi(M) \log \left( \int_{\partial M} e^\varphi ds_0 \right) .$$

C'est encore invariant par translation.  $F_2$  est minimisée par des fonctions harmoniques si on garde  $\varphi$  fixée sur le bord.

### 5. Le cas $\chi(M) \leq 0$

Les termes non linéaires dans  $F$ ,  $F_1$  et  $F_2$  sont de même signe et ces fonctionnelles sont convexes en  $\varphi$  d'après l'inégalité de HÖLDER:

$$\int e^{\alpha\varphi+(1-\alpha)\psi} \leq \left( \int e^\varphi \right)^\alpha \left( \int e^\psi \right)^{1-\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 .$$

Si  $\partial M = \emptyset$ , on choisit une suite  $\varphi_n \in C^\infty(M)$  telle que  $F(\varphi_n)$  converge vers  $\alpha = \inf F(\varphi)$ .

L'inégalité de POINCARÉ pour  $\sigma_0$  donne :

$$\left| \int_M K_0\varphi dA_0 \right| \ll \left( \int_M \varphi^2 dA_0 \right)^{1/2} \ll \left( \int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 \right)^{1/2}$$

et on a :

$$\log \left( \int_M e^{2\varphi} dA_0 \right) \geq 0$$

car  $A_0 = 1$  et  $\int \varphi dA_0 = 0$ . Alors il existe  $C$  telle que

$$\int_M |\nabla_0\varphi_n|^2 dA_0 \leq 0 .$$

D'après le critère de compacité de RELICH, il existe  $\psi$  dans  $W^1(M')$ , le 1-espace de SOBOLEV des fonctions de moyenne nulle, telle que  $\varphi_n$  converge faiblement dans  $W^1(M')$ , donc fortement dans  $L^2(M)$  et point par point presque partout.

D'où :

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_0 \psi|^2 dA_0 &\leq \liminf \int_M |\nabla_0 \varphi_n|^2 dA_0 \\ \int_M K_0 \psi dA_0 &= \lim \int_M K_0 \varphi_n dA_0 \\ \int_M e^{2\varphi} dA_0 &\leq \liminf \int_M e^{2\varphi_n} dA_0 \quad (\text{FATOU}). \end{aligned}$$

Comme  $\alpha = \inf F$ , on a  $F(\psi) = \alpha$ . Donc  $\psi$  minimise  $F$  et la première variation de  $F$  est nulle en  $\psi$  :

$$-\Delta_0 \psi + K_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0} e^{2\psi} = 0$$

au sens faible et par régularité elliptique au sens classique. Alors  $K_\psi = \frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0}$  est constante. Donc  $\log \det' \Delta_\psi$  avec  $A = 1$  a un maximum global unique à la métrique de courbure constante.

Toute métrique uniforme  $e^{2\psi} \sigma_0$  est critique pour  $F$ ; mais  $F$  est strictement convexe donc  $\varphi = \psi$ .

Si  $M$  a un bord non vide, des arguments du même type permettent de montrer le théorème.

## 6. Le cas de la sphère $S^2$

Les auteurs admettent que sur  $S^2$  toute métrique est conforme à la métrique standard  $\sigma_0$  ( $K_0 = 1$ ).

Pour prouver la partie correspondante du théorème 1, il suffit de montrer que  $\log \det' \Delta_\varphi$  soumis à la contrainte  $A = 4\pi$  atteint son maximum si et seulement si  $(S^2, e^{2\varphi} \sigma_0)$  est isométrique à  $(S^2, \sigma_0)$ .

On remarque que si  $\tau$  est une transformation de MÖBIUS,  $(S^2, |\tau'|^2 \sigma_0)$  est isométrique à  $(S^2, \sigma_0)$ . Si  $\sigma_0$  donne un maximum du déterminant, cette famille de métrique donne aussi des maxima. Comme  $F$  n'est plus convexe, ce cas est plus difficile que le précédent.

On pose  $u = 2\varphi$ . On a  $\chi(S^2) = 2$ , donc  $F(\varphi)$  admet  $\varphi = 0$  comme extremum si et seulement si :

$$\frac{1}{4} \int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 \frac{dA_0}{4\pi} + \int_{S^2} u \frac{dA_0}{4\pi} - \log \left( \int_{S^2} e^u \frac{dA_0}{4\pi} \right) \geq 0 \quad .$$

On verra qu'il y a égalité si et seulement si  $u = 2 \log |\tau'| + \beta$ .

On pose  $d\mu = dA_0/4\pi$ . On est ramené à :

$$0 \leq G(u) = \frac{1}{4} \int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu - \log \left( \int_{S^2} e^u d\mu \right) \quad ,$$

soumis à  $\int_{S^2} u d\mu = 0$ , avec égalité si et seulement si  $u = 2 \log |\tau'| - 2 \int_{S^2} \log |\tau'| d\mu$ .

Rappelons l'inégalité de MOSER [M] :

THÉORÈME. — Si  $u$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $S^2$  telle que

$$\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu \leq 1 \quad \int_{S^2} u d\mu = 0$$

alors il existe une constante absolue  $C$  telle que

$$\int_{S^2} e^{4\pi u^2} d\mu \leq C \quad .$$

On en déduit l'inégalité :

$$\log \int_{S^2} e^u d\mu \leq \frac{1}{16\pi} \int_{S^2} |\nabla u|^2 d\mu + \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} u d\mu + C,$$

où  $C$  est une autre constante.

MOSER remarque que l'on peut supposer  $u \geq 0$  en remplaçant  $u$  par  $|u|$  sans changer l'intégrale du gradient. On peut aussi utiliser le procédé de symétrisation : à la fonction  $u(x) \geq 0$ , on associe une fonction  $u^*$  ne dépendant que de la latitude en imposant que

$$\mu\{x \mid u^* > \rho\} = \mu\{x \mid u > \rho\} \quad \text{pour tout } \rho \geq 0.$$

Il est clair que  $u^*$  est monotone. Le résultat le plus important de la symétrisation est que l'intégrale du gradient diminue.

On en déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que  $G(u) \geq C$ .

Maintenant on pose

$$G_\varepsilon(u) = \frac{1+\varepsilon}{4} \int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu - \log \left( \int_{S^2} e^u d\mu \right) \quad .$$

Il suffit de voir que pour  $\varepsilon > 0$ , on a  $G_\varepsilon(u) \geq 0$ .

D'après l'inégalité de MOSER, pour  $\varepsilon > 0$  et  $C$  fixé, il existe  $B$  tel que :

$$\{u \mid G_\varepsilon(u) \leq C\} \subset \left\{ u \mid \int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu \leq B \right\} \quad .$$

Soit  $u_n$  une suite telle que  $G_\varepsilon(u_n)$  converge vers  $\inf G_\varepsilon$ . On peut supposer que la suite converge faiblement dans  $W^1(S^2')$  et point par point vers  $\psi$ . On peut supposer, par l'inégalité de MOSER, que  $\exp(u_n)$  converge faiblement dans  $L^2(S^2)$ ; la limite est alors  $\exp(\psi)$ , donc  $\int_{S^2} e^{u_n} d\mu$  converge vers  $\int_{S^2} e^\psi d\mu$ .

Donc  $G_\varepsilon$  atteint son minimum global en  $\psi \in W^1(S^2')$ . Par symétrisation, on peut supposer que  $\psi$  est invariante par rotation autour de l'axe nord-sud et est monotone en  $\theta$ .



Puisque  $\psi$  est critique pour  $G_\varepsilon$ ,  $\psi$  satisfait

$$-\frac{1+\varepsilon}{2}\Delta_0\psi + 1 - \frac{e^\psi}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} = 0 \quad .$$

On va voir que ces conditions imposent que  $\psi = 0$ , ce qui prouve que  $G_\varepsilon(u) \geq 0$ .

On pose  $\psi = \psi_1 + a$  où  $a = \log \int_{S^2} e^\psi d\mu$ . Alors  $\psi_1$  est monotone, ne dépend que la latitude et satisfait l'équation :

$$-\frac{1+\varepsilon}{2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\psi_1}{d\theta} \right) = e^{\psi_1} - 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

On a le lemme technique :

LEMME. — Soit  $u$  une solution monotone sur  $[0, \pi]$  de

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) = C(e^u - 1).$$

Si  $C \neq 2$  alors  $u$  est constante.

On en déduit que  $\psi = 0$ , puisque sa moyenne est nulle.

Si  $\psi$  est minimisante, alors

$$-\frac{\Delta_0\psi}{2} + 1 - \frac{e^\psi}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} = 0.$$

On en déduit que  $\varphi = \psi/2$  est telle que  $K_\varphi = \text{cte}$ . Donc la métrique  $e^{2\varphi}\sigma_0$  est uniforme et le théorème 1 est vrai pour  $S^2$ .

### Références

- [M] J. MOSER. — *A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger*, Ind. Uni. Math. J., 20, 107-1092, 1971.
- [OPS] OSGOOD, PHILLIPS et SARNAK. — *Extremals of Determinants of Laplacians*, preprint, 1987.