Séminaire de Théorie
spectrale et géométrie

André Voros

Analyse semi-classique de la formule des traces de Selberg (début)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 57-66
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__57_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (57–66)

ANALYSE SEMI-CLASSIQUE DE LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG (début)

par *André VOROS*

Où nous montrons comment des formules apparemment nouvelles pour les *déterminants fonctionnels* permettent de réduire la formule des traces de Selberg à une *forme factorisée* [1].

Pour les besoins de l'exposé, on appellera *suite spectrale* toute suite $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \uparrow +\infty$, telle que

$$\Theta(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-t\lambda_m} \tag{1}$$

converge pour Re $t > 0$, et admette pour $t \downarrow 0$ un *développement asymptotique* en puissances (éventuellement fractionnaires) de t ,

$$\Theta(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_{i_n} t^{i_n} \tag{2}$$

avec

$$i_0 < i_1 < i_2 \ldots \uparrow +\infty \,, \quad \text{et} \quad i_0 < 0 \,. \tag{3}$$

Exemples de suites admissibles : les entiers positifs; le spectre de l'opérateur de Schrödinger à potentiel polynomial positif [2]; le spectre d'un opérateur différentiel elliptique positif sur une variété compacte [3]. Dans tous ces cas, le développement (2) est "en principe" explicitable à tous les ordres.

L'exposé comprend deux parties : une caractérisation semi-classique du *déterminant fonctionnel* (ou zêta-régularisé) d'une suite spectrale générale, aboutissant à la formule (20) qui calcule ce déterminant *par quadratures*; puis l'application spécifique à la formule des traces de Selberg pour un sous-groupe cocompact de $PSL(2,\mathbf{R})$, par laquelle la fonction zêta de Selberg se factorise naturellement en *deux déterminants fonctionnels.*

1. Sur divers déterminants associés à une suite spectrale

Appliquant le théorème de Karamata à (2), on obtient la *formule "de Weyl"* :

$$\operatorname{card}\{\lambda_m \leqslant \lambda\} \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{c_{i_0}}{\Gamma(1-i_0)} \lambda^{-i_0} . \tag{4}$$

On appelle $s_0 = -i_0 > 0$ l'*ordre* de la suite spectrale $\{\lambda_m\}$.

On veut associer une *fonction déterminant* $D(\lambda)$ à la suite $\{\lambda_m\}$, qui généralise le polynôme caractéristique $\prod(\lambda_m - \lambda)$ dans le cas d'un spectre fini. L'analogue le plus simple est le *déterminant de Fredholm*,

$$\Delta(\lambda) = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_m) , \tag{5}$$

qui converge si (mais seulement si) l'ordre vérifie $s_0 < 1$. Pour $s_0 \geqslant 1$ on a seulement convergence de l'expression $[s_0 + 1]$ fois dérivée (où $[x]$ = partie entière de x),

$$\begin{aligned} \eta([s_0+1], -\lambda) &= \Gamma([s_0+1]) \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_m - \lambda)^{-[s_0+1]} \\ &= \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{[s_0+1]} (-\log\Delta(\lambda)) \quad \text{si} \quad s_0 < 1 . \end{aligned} \tag{6}$$

On *définit* alors $\Delta(\lambda)$ par la formule

$$-\log\Delta(\lambda) = \left[\int d\lambda\right]^{[s_0+1]} \eta([s_0+1], -\lambda) , \tag{7}$$

mais ceci ne définit qu'un *déterminant à un facteur près*, lequel facteur est l'exponentielle d'un polynôme $\sum_0^{[s_0]} C_j(-\lambda)^j$. Une normalisation standard consiste à fixer $\lambda = 0$ comme *point de base*, et à poser

$$-\log\Delta_0(\lambda) = \left[\int_0^{\lambda} d\lambda'\right]^{[s_0+1]} \eta([s_0+1], -\lambda') , \tag{8}$$

ce qui redonne précisément la construction minimale de *produit canonique de Weierstrass*,

$$\Delta_0(\lambda) = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_m) \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_m^2} + \cdots + \frac{\lambda^{[s_0]}}{[s_0]\lambda_m^{[s_0]}}\right) \tag{9}$$

Il découle de la théorie de ces produits infinis que $\Delta_0(\lambda)$, et par conséquent tous les $\Delta(\lambda)$ définis par (7), sont des *fonctions entières d'ordre* s_0 ayant précisément $\{\lambda_m\}$ comme ensemble des zéros; la définition (7) est donc appropriée pour un déterminant. Toutefois, elle dépend explicitement du choix d'un point de base (où $(-\log\Delta_0)$ et toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant [s_0]$ sont astreints à s'annuler); or, ce choix est arbitraire, et non invariant par translation sur λ .

Une autre définition, non ambiguë, mais apparemment sans rapport avec (7), utilise la *régularisation zêta* [4] : on introduit une seconde fonction à deux variables, *cf.* (6) :

$$Z(s,a) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_m + a)^{-s} = \Gamma(s)^{-1}\eta(s,a) \tag{10}$$

primitivement définie et convergente pour Re $a > -\lambda_0$ et Re $s > s_0$; elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\frac{\partial}{\partial a} Z(s,a) = -sZ(s+1,a) \ . \tag{11}$$

On montre ensuite, grâce à la formule de transformation de Mellin,

$$Z(s,a) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^{\infty} \Theta(t) e^{-at} t^{s-1} dt \ , \tag{12}$$

que $Z(s,a)$ a un prolongement méromorphe à tout s complexe, dont tous les pôles sont simples, et qui est *régulier en* $s = 0$; on définit enfin le *déterminant fonctionnel* $D(\lambda)$ par

$$-\log D(\lambda) = \frac{\partial}{\partial s} Z(s,-\lambda)_{|s=0} \ . \tag{13}$$

Nous montrons tout de suite que ce déterminant en est bien un au sens de la définition (7), en utilisant la formule suivante qui découle de l'équation fonctionnelle (11) :

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^q (-\log D(\lambda)) = \frac{\partial}{\partial s}[s(s+1)\dots(s+q-1)Z(s+q,-\lambda)]_{|s=0} \ . \tag{14}$$

Il faut remarquer que l'opérateur $\frac{d}{ds}s$, appliqué à une fonction $f(s)$ ayant au plus un pôle simple en $s = 0$, en extrait la *partie finie* (PF) ,

$$\frac{d}{ds} s f(s)_{|s=0} = PF f(s)_{|s=0} \ . \tag{15}$$

Donc (14) se réduit à

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^q (-\log D(\lambda)) = PF[(s-1)\dots(s-q+1)Z(s,-\lambda)]_{s=q} \ . \tag{16}$$

En particulier, $s = q = [s_0 + 1]$ est dans la région d'analyticité primitive de $Z(s,a)$; comparant alors avec (6), on obtient bien $\eta([s_0+1],-\lambda)$ dans le membre de droite, conformément à (7). C.Q.F.D.

De plus, en soustrayant de $(-\log D(\lambda))$ son développement limité à l'ordre $[s_0]$ en $\lambda = 0$ pour obtenir le déterminant de Weierstrass, et en explicitant les dérivées intermédiaires grâce à (16), on obtient la relation, fort utile en pratique,

$$\begin{aligned} \Delta_0(\lambda) = \exp\Big\{ &\frac{\partial Z}{\partial s}(0,0) + \sum_{q=1}^{[s_0]} FPZ(q,0)\lambda^q/q \\ &+ \sum_{q=2}^{[s_0]} c_{-q}\Big(1 + \dots + \frac{1}{q-1}\Big)\lambda^q/q!\Big\} D(\lambda) \end{aligned} \tag{17}$$

avec la convention $c_{-q} \equiv 0$ si $-q \notin \{i_m\}$.

Un avantage crucial du déterminant fonctionnel est son *invariance par translation* sur les λ , évidente d'après la définition (13). Nous posons alors la question : comment sont caractérisées les constantes d'intégration spécifiques du déterminant fonctionnel dans la formule (7) ?

La réponse est que ces constantes sont spécifiées par des *conditions de normalisation asymptotique* en $\lambda = -\infty$, à savoir que le *développement semi-classique* (pour $\lambda \to -\infty$) de $-\log D(\lambda)$ a une *forme standard* qui détermine complètement les constantes d'intégration. En effet, faisant $a \to +\infty$ dans la formule (12) et utilisant (13), on trouve :

$$-\log D(\lambda) \underset{\lambda \to -\infty}{\sim} \sum_{i_n \neq -q} c_{i_n} \Gamma(i_n)(-\lambda)^{i_n} - \sum_{q=0}^{[s_0]} c_{-q} \left[\log(-\lambda) - \sum_{r=1}^{q} r^{-1} \right] \lambda^q / q! \quad (18)$$

avec toujours $c_{-q} \equiv 0$ si $-q \notin \{i_m\}$.

La structure de cette formule s'éclaire si nous refaisons maintenant le chemin inverse, remontant de $\eta([s_0+1], -\lambda)$ à $-\log D(\lambda)$ par intégrations successives en utilisant l'équation fonctionnelle (11) sous sa forme intégrée (où l'on peut *fixer la constante d'intégration)*

$$\eta(s, -\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \eta(s+1, -\lambda') d\lambda' \ . \quad (19)$$

Cette formule converge *stricto sensu* pour Re $s > s_0$, mais on peut l'étendre par prolongement analytique en s , (et extraction de partie finie si nécessaire); on peut alors intégrer certaines fonctions divergentes pour $\lambda \to -\infty$ par *intégration symbolique.* On vérifie que $[s_0+1]$ applications à $Z([s_0+1], -\lambda)$ de la formule (19) ainsi étendue donnent le résultat :

$$-\log D(\lambda) = \left[\int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda' \right]^{[s_0+1]} \eta([s_0+1], -\lambda') \quad (20)$$

qui est à la fois cohérent avec le développement semi-classique (18) requis pour $-\log D(\lambda)$, et similaire à la formule de Weierstrass pour la normalisation en $\lambda = 0$. Cette formule (20) éclaire donc le déterminant fonctionnel comme un cas limite de produit de Weierstrass quand le point de base est rejeté à l'infini, en même temps qu'elle fournit un procédé de *calcul effectif* de ce déterminant ne requérant aucun prolongement analytique, mais seulement un nombre fini de quadratures appliquées à la fonction $\eta([s_0+1], -\lambda)$, laquelle est définie par la série *convergente* (6). (On peut d'ailleurs éliminer la fonction η au profit de la fonction Z par l'identité (10).)

Il faut toutefois souligner que l'opérateur d'intégration $\int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda'$, lorsqu'il produit des termes logarithmiques par extraction de partie finie, n'obéit pas aux formules habituelles de changement de variable. En effet, le changement de variable sur les parties finies introduit des corrections de type "anomalies" (sauf dans le cas de translation pure). De tels termes seront effectivement rencontrés lorsque nous appliquerons la formule (20) à la fonction zêta de Selberg (§ suivant).

2. La formule des traces de Selberg et la factorisation de la fonction zêta de Selberg

Soit $X = \Gamma\backslash PSL(2,\mathbf{R})$ une surface compacte à courbure négative constante, de genre $g \geqslant 2$. Ses géodésiques périodiques orientées sont indexées par les *classes de conjugaison* hyperboliques du groupe discret Γ , de la forme $\{\gamma = p^n\}$ où p parcourt les classes *primitives* et $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\{\tau(\gamma)\} = \{n\tau(p)\}$ le *spectre des longueurs* τ de ces géodésiques. Prenons comme suite spectrale $\{\lambda_m\}$ les valeurs propres de $(-\Delta)$, où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami; cette suite est d'ordre $(-i_0) = 1$ au sens de la formule (4). La *formule des traces de Selberg* [5, 6] est une formule de dualité exacte entre les deux spectres, analogue à la formule sommatoire de Poisson et qui admet une forme réduite [6], où $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ et $\lambda = 1/4 - \kappa^2$, avec Re $\kappa > 1/2$:

$$\begin{aligned}\sum_m (\lambda_m - \lambda)^{-2} =&(2g-2)\frac{1}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial\kappa}\psi(\frac{1}{2}+\kappa)\\ &-\sum_{\{p\}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(p)}{2\mathrm{sh}\, n\tau(p)/2}\left(\frac{1}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)\frac{e^{-\kappa n\tau(p)}}{2\kappa}\ .\end{aligned} \tag{21}$$

En fait, en appliquant les formules (6-7) à la suite spectrale $\{\lambda_m\}$ d'ordre 1 , on voit que le membre de gauche vaut $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^2(-\log\Delta(\lambda))$ où $\Delta(\lambda)$ est un déterminant de la suite $\{\lambda_m\}$; par ailleurs, le membre de droite peut se resommer en utilisant la fonction zêta que Selberg a précisément introduite dans ce but [5] :

$$\mathcal{Z}(\frac{1}{2}+\kappa) = \prod_{\{p\}}\prod_{k=0}^{\infty}(1 - e^{-\tau(p)(\frac{1}{2}+\kappa+k)}) \quad (\mathrm{Re}\ \kappa > \frac{1}{2})\ . \tag{22}$$

Tous calculs faits, (21) se ramène à

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\kappa^2}\right)^2[-\log\Delta(1/4-\kappa^2)] =&(2g-2)\frac{\partial}{\partial\kappa^2}\psi(\frac{1}{2}+\kappa)\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial\kappa^2}\right)^2[-\log\mathcal{Z}(\frac{1}{2}+\kappa)]\ .\end{aligned} \tag{23}$$

Il devient alors clair que deux puissances de l'opérateur de dérivation $\partial/\partial\kappa^2 = (2\kappa)^{-1}\partial/\partial\kappa$ ne demandent qu'à s'éliminer pour donner à la formule des traces une forme encore plus réduite, donc plus fondamentale. Ainsi, deux intégrations indéfinies par rapport à κ^2 donnent après exponentiation :

$$\Delta(1/4-\kappa^2) = e^{-C\kappa^2 - C' - (2g-2)\int\psi(\frac{1}{2}+\kappa)2\kappa d\kappa}\mathcal{Z}(\frac{1}{2}+\kappa)\ . \tag{24}$$

Nous observons alors, par calcul explicite des zéros et de leurs multiplicités pour la fonction

$$\Delta^+(z) = \exp\int\psi(\frac{1}{2}-z)2zdz\ , \tag{25}$$

que c'est un déterminant pour la suite spectrale, $\{j+\frac{1}{2}$ avec multiplicité $(2j+1)\}$; mais cette suite n'est autre que le *spectre de l'opérateur* $(-\Delta+\frac{1}{4})$ *sur la sphère* S^2 .

Nous pouvons maintenant utiliser la théorie de l'intégration symbolique esquissée au § 1 pour préciser de manière *naturelle* les constantes d'intégration dans (24). Il suffit en effet de remarquer que la borne inférieure d'intégration $\kappa=+\infty$ (c'est-à-dire $\lambda=-\infty$) s'impose ici du fait que $\log \mathcal{Z}(\frac{1}{2}+\kappa)$ décroît exponentiellement pour $\kappa \to \infty$ (et qu'il n'y a aucune autre valeur de κ remarquable dans la région de convergence Re $\kappa > 1/2$ du produit infini (22)). La seule complication est que $\int_{-\infty}^{\lambda} d\lambda' \neq \int_{\kappa}^{\infty} 2\kappa' d\kappa'$ à cause des "anomalies" indiquées à la fin du § 1 ; la façon la plus simple d'évaluer ces anomalies est d'ajuster les premiers termes des développements asymptotiques des deux membres *après* intégration. On trouve ainsi, après une intégration sur (23),

$$PFZ(1,-\lambda) = -(2g-2)\psi(\frac{1}{2}+\kappa) + \frac{1}{2\kappa}\frac{\mathcal{Z}'}{\mathcal{Z}}(\frac{1}{2}+\kappa) \tag{26}$$

$$= -(2g-2)\psi(\frac{1}{2}+\kappa) + \sum_{\{p\}}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(p)}{2\mathrm{sh}\, n\tau(p)/2}\frac{e^{-\kappa n\tau(p)}}{2\kappa} \tag{27}$$

et enfin, après une seconde intégration (puis exponentiation), la formule essentielle dans laquelle les deux déterminants D et D^+ sont précisés comme les *déterminants fonctionnels* de leurs suites spectrales respectives,

$$\mathcal{Z}(\frac{1}{2}+\kappa) = [e^{\kappa^2} D^+(-\kappa)]^{2g-2} D(1/4-\kappa^2)\ . \tag{28}$$

(La correction de partie finie est $\exp(2g-2)\kappa^2$.) On peut enfin mettre cette factorisation sous forme canonique de Hadamard, $D^+(-\kappa)$ s'exprimant par la fonction G de Barnes [7] et $D(\lambda)$ par le produit de Weierstrass (17) (où toutefois les constantes supplémentaires ne sont pas connues explicitement). De telles factorisations viennent d'être trouvées indépendamment [8].

Il est remarquable que l'analyse semi-classique (par l'étude des développements asymptotiques pour $\lambda \to -\infty$) ait révélé une relation possible entre le terme provenant de la classe de conjugaison de l'identité dans la formule des traces (en facteur de $(g-1)$), et la *théorie spectrale de la sphère* S^2 . Cette relation n'a en fait rien de fortuit, mais requiert pour sa compréhension une autre analyse semi-classique plus fouillée, de nature différente [9].

Remarquons enfin que la formule (28), spécialisée à des valeurs particulières de κ , sert en théorie de la torsion analytique [10] et en physique, dans la théorie des cordes [11].

3. Appendice : un raisonnement semi-classique interdit

Colin de Verdière [3] et Guillemin [12] observent que la formule des traces de Selberg est un cas exceptionnel de la formule de Poisson sur les variétés [3] dans laquelle la singularité C^∞ en chaque point du support singulier se réduit à son terme dominant, et où de plus le reste C^∞ est explicitement connu.

Dans le même ordre d'idées, Gutzwiller [13] observe que la formule des traces de Selberg est un cas particulier exact d'une formule *semi-classique générale approchée*, en termes de la constante de Planck $\hbar$ qui est petite en mécanique quantique. Pour le laplacien sur une variété, cela revient à étudier la trace de la résolvante, $\sum(\lambda-\lambda_m)^{-1}$, dans la limite $|\kappa| \to \infty$ (où $\kappa \sim \sqrt{\lambda}$ remplace $\hbar^{-1}$). La formule semi-classique en question énonce que dans cette limite, cette trace est somme de *composantes périodiques dans la variable* κ , les périodes étant précisément les longueurs $\tau(\gamma)$ des géodésiques périodiques γ . Dans le cas d'un flot géodésique de type hyperbolique sur une surface, cette décomposition se réduit à

$$\sum_m \frac{1}{\lambda-\lambda_m} \underset{|\kappa|\to\infty}{\sim} -\frac{i}{\kappa}\sum_{\{\gamma\}} \frac{\tau_0(\gamma)}{2\mathrm{sh}\ \alpha(\gamma)/2} e^{i\kappa\tau(\gamma)} \tag{29}$$

où $\alpha(\gamma)$ est l'exposant d'instabilité de l'orbite γ . Or, si l'on tient compte d'une contribution non oscillante de forme spéciale, produite par les orbites nulles,on remarque [13] que la relation (29), en général approchée, devient exacte dans le cas de courbure négative *constante*, et c'est la formule des traces de Selberg (il faut observer que $\alpha(\gamma) \equiv \tau(\gamma)$ dans ce cas précis, puis faire : $\kappa \to i\infty$ et comparer à (27)).

Mais, par ailleurs, si l'on explicite l'indice de répétition de γ ($\gamma = p^n$, p orbite primitive), on observe que la contribution de toutes les itérées d'une même géodésique primitive se resomme géométriquement [14] :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{\gamma=p^n\}} \frac{\tau_0(\gamma)}{2\mathrm{sh}\ \alpha(\gamma)/2} \exp\{i\kappa\tau(\gamma)\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(p)}{2\mathrm{sh}\ n\alpha(p)/2} \exp\{i\kappa n\tau(p)\} \\
&= \tau(p)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-(\frac{1}{2}+k)n\alpha(p)\}\exp\{i\kappa n\tau(p)\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau(p)}{\exp\{(\frac{1}{2}+k)\alpha(p)-i\kappa\tau(p)\}-1} .
\end{aligned} \tag{30}$$

L'expression ainsi obtenue exhibe des *pôles complexes* en κ , de parties imaginaires *négatives* ,

$$\kappa_{n,k} = \frac{2\pi n}{\tau(p)} - i(\frac{1}{2}+k)\frac{\alpha(p)}{\tau(p)} , \quad n \in \mathbf{Z} , \quad k \in \mathbf{N} . \tag{31}$$

S'agissant d'une approximation semi-classique à la trace de la résolvante $\sum_m(\lambda - \lambda_m)^{-1}$, on est tenté d'interpréter ces pôles comme des *résonances du problème exact*, calculées à l'approximation semi-classique (par exemple, à grand κ). Deux arguments distincts soutiennent cette thèse :

• dans le cas où les orbites sont stables (et non instables), une formule purement *réelle*, similaire à (31) mais avec les exposants de *stabilité*, prédit effectivement des valeurs propres approchées du problème [14, 15]; c'est en fait la bonne généralisation des célèbres règles de niveaux de Bohr-Sommerfeld, appropriée au cas d'une orbite bidimensionnelle stable isolée;

• dans le cas d'un problème de Dirichlet *extérieur* bidimensionnel vérifiant certaines hypothèses, on peut associer effectivement [16] une famille de *résonances semi-classiques* à une orbite périodique hyperbolique isolée, précisément par la formule (31).

Cependant, le cas de la surface compacte à courbure négative constante montre que l'interprétation des pôles (31) comme résonances ne peut être vraie en général. En effet, il n'y a pas de résonances sur une variété compacte ; or, les formules (30-31) doivent décrire une situation *exacte* puisque la formule des traces est exacte. Que sont donc ces fausses résonances ?

En fait, le calcul de (30) décrit précisément la resommation par la fonction zêta de Selberg dans les formules (21-23), ou bien (26-27); quant aux valeurs $\kappa_{n,k}$, ce sont exactement les *zéros des facteurs* du produit infini (22) définissant la fonction zêta de Selberg! (sachant que $\alpha(p) \equiv \tau(p)$ dans ce cas).

Naïvement, au vu de la formule de factorisation (28), et après élimination des zéros connus du facteur trivial $D^+(-\kappa)$, les $\kappa_{n,k}$ semblent bien être des zéros comme du déterminant $D(\frac{1}{4} - \kappa^2)$ du spectre de $(-\Delta)$ sur la surface compacte X ; nous aurions ainsi trouvé des valeurs propres complexes d'un problème auto-adjoint!

La vérité est que les positions des zéros $\kappa_{n,k}$ prédites par la formule (31) sont *toutes localisées à l'intérieur du demi-plan* Re $\kappa < 1/2$, dans lequel le produit infini (22) est sévèrement *divergent*; les zéros de ses facteurs ne sont alors que des *pseudo-zéros*, où le *prolongement analytique* du produit infini peut ne pas s'annuler. En fait, il *ne doit pas* s'annuler en ces points sous peine de contradiction, ce qui montre accessoirement l'*impossibilité d'une régularisation multiplicative* du produit infini dans la région de divergence (comme par exemple, l'extension de son logarithme par la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin). (Une situation similaire vaut pour la fonction zêta de Riemann, dont le produit d'Euler admet aussi des pseudo-zéros, ayant une relation purement ... hypothétique aux vrais zéros de la fonction.)

Cette discussion nous rend très pessimiste sur la possibilité de trouver une formule semi-classique quelconque pour les valeurs propres individuelles du laplacien dans ce problème (et plus généralement dans le cas où le flot géodésique est hyperbolique). En fait, c'est la propriété de *double factorisation du déterminant* *fonctionnel D* qui semble être la bonne notion analogue à la règle de niveaux de Bohr-Sommerfeld. Pour une surface à courbure négative constante, cette propriété est *exacte* et correspond à l'existence de la factorisation de Hadamard (28) *et* du produit infini Eulérien (22) pour la fonction zêta de Selberg. Pour un flot hyperbolique plus général, la formule (29) suggère que cette même propriété de double factorisation continue d'exister dans une certaine approximation semi-classique, mais dont le sens reste à préciser.

Références

[1] A. VOROS. — Phys. Lett. **B 180** (1986) 245-246, et *Spectral Functions, Special Functions and the Selberg Zeta Function*, Comm. Math. Phys, **110** (1987), 439-465.

[2] A. VOROS. — *Ann. Inst. H. Poincaré.* **39 A** *211-338*,1983.

[3] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Composit. Math.* **27** *159-184*,1973.

[3] J. CHAZARAIN. — *Invent. Math.* **24** *65-82*,1974.

[3] J.J. DUISTERMAAT, V.W. GUILLEMIN. — *Invent. Math.* **29** *39-79*,1975.

[4] D. RAY, I.M. SINGER. — *Ann. Math.* **98** *154-177*,1973.

[5] A. SELBERG. — *J. Indian Math. Soc.* **20** *47-87*,1956.

[5] D. HEJHAL. — *The Selberg Trace Formula on* $PSL(2,\mathbf{R})$ *I & II. Springer Lecture Notes in Math.* **548** *(1976) et* **1001**,1983.

[6] D. HEJHAL. — *Duke Math. J.* **43** *441-482*,1976.

[6] J. ELSTRODT. — *Jber. d. Dt. Math. - Verein* **83** *45-77*,1981.

[6] N.L. BALAZS, A. VOROS. — *Physics Reports* **143** *109-240, Eq. (VII. 20) p. 173*,1986.

[7] E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON. — *A course of Modern Analysis, (Chap. XII, Ex. 48-50), Cambridge Univ. Press*,1965.

[8] J. FISHER. — *Dissertation* (Westf. Wilhelms Universität, Münster, RFA, 1975, non publié), et *An Approach to the Selberg Trace Formula via the Selberg Zeta-function*, Springer Lecture Notes in Math. **1253**,1987.

[8] P. SARNAK. — *Determinants of Laplacians*, Comm. Math. Phys, **110** (1987), 113- 120.

[9] P. CARTIER, A. VOROS. — *en préparation*,1987.

[10] D. FRIED. — *Invent. Math.* **84** *523-540*,1986.

[11] E. D'HOKER, D.H. PHONG. — *Comm. Math. Phys.* **104** *537-545*,1986.

[12] V.W. GUILLEMIN. — *Duke Math. J.* **44** *485-517*,1977.

[13] M.C. GUTZWILLER. — *Phys. Rev. Lett.* **45** *150-153*,1980.

[14] M.C. GUTZWILLER. — *J. Math. Phys.* **12** *343-358*,1971.

[15] A. VOROS. — *dans : J.M. Souriau ed., Géométrie Symplectique et Physique Mathématique (Colloques Internationaux n° 237, Aix-en-Provence 1974), C.N.R.S., pp. 277-287*,1975.

[15] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Invent. Math.* **43** *15-52*,1977.

[16] C. BARDOS, J.C. GUILLOT, J. RALSTON. — *Comm. Partial Diff. Equations* **7** *905*,1982.

[16] M. IKAWA. — *J. Math., Kyoto Univ.* **23** *127-194*,1983.

[16] C. GÉRARD, J. SJÖSTRAND. — *Comm. Math. Phys.* **108**, *391-421*,1987.

A.V.
Chercheur C.N.R.S.
Service de Physique Théorique
CEN-Saclay
F–91191 GIF-SUR-YVETTE CEDEX

– ◊ –