Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Gérard Besson

Théorie de Morse (d’après E. Witten)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 1 (1982-1983), exp. nº 4, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1982-1983__1__A4_0>

Séminaire "Théorie spectrale et Géométrie"
CHAMBERY-GRENOBLE
1982-1983

THEORIE DE MORSE (d'après E. Witten)

par Gérard BESSON

0. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner une idée des méthodes introduites par E. Witten [W] qui conduisent à une preuve analytique des inégalités de Morse, ainsi que celles utilisées par P. Malliavin [M1] pour étudier le Laplacien de De Rham.

La première partie (§ 1 à 3) est consacrée à ce dernier point et permet de donner une expression stochastique du semi-groupe associé à l'opérateur apparaissant dans [W], obtenu par perturbation du complexe de De Rham.

La seconde partie esquisse la preuve des inégalités de Morse ([W]) dans un cas simple permettant d'illustrer l'importance de cette technique nouvelle. Pour cette dernière le lecteur avide de comprendre la philosophie de E. Witten [W] concernant la théorie de Morse doit se référer à la rédaction de l'exposé n° 617 du Séminaire Bourbaki ([Bo]) et à ses nombreuses références, ainsi qu'à [C]. Signalons enfin que cette rédaction s'est faite également sous l'influence de [Ro].

Dans ce qui suit, M désignera une variété riemannienne compacte. D sa connexion de Levi-Civita, $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur les p-formes défini par sa structure, d la différentielle extérieure et δ la codifférentielle.

I. PERTURBATION DE LA DIFFERENTIELLE EXTERIEURE

Soit h une fonction lisse à valeurs réelles, on considère les deux opérateurs suivants :

$$d_s = e^{-sh} d e^{sh}$$

$$\delta_s = d_s^* = e^{sh} \delta e^{-sh} = e^{sh} d^* e^{-sh}$$

et le Laplacien associé, opérant sur les formes différentielles :

$$\Delta_s = d_s \delta_s + \delta_s d_s$$

qui apparaît comme une perturbation régulière de l'opérateur Δ_0 qui coïncide avec le Laplacien de la variété riemannienne (M, g). L'objet de ce paragraphe est d'exprimer Δ_s en fonction de Δ_0.

Désignons par a l'opérateur de multiplication extérieure par dh et a^* l'opérateur adjoint qui est le produit intérieur par $(dh)^\#$ (champ de vecteur dual de dh) :

$$\delta \circ e^{-sh} = e^{-sh}(sa^* + \delta)$$

$$d[e^{2sh}(\delta \circ e^{-sh})] = e^{sh}[sa_0(sa^* + \delta) + sd_0 a^* + d\delta]$$

d'où :

$$d_s \delta_s = d\delta + s(da^* + a\delta) + s^2 aa^*$$

et de même :

$$\delta_s d_s = \delta d + s(\delta a + a^* d) + s^2 a^* a$$

$$\boxed{\Delta_s = \Delta + s^2(a^* a + aa^*) + s(da^* + a^* d + a\delta + \delta a)} \; .$$

Simplifions cette expression :

a) $(a^* a + aa^*)(\omega) = |dh|^2 \omega$

où ω est une forme différentielle.

b) $da^* + a^* d + a\delta + \delta a = L$.

Par la suite et pour la commodité des calculs, nous nous restreindrons au cas des 1-formes. Soit alors ω une 1-forme sur M et X un champ de vecteurs :

$$\begin{aligned}
L(\omega)(X) &= X.\langle\omega, dh\rangle + d\omega((dh)^{\#}, X) + (\delta\omega).dh(X) + \delta(dh\wedge\omega)(X)\\
&= \langle D_X\omega, dh\rangle + \langle\omega, D_X dh\rangle + d\omega((dh)^{\#}, X) + (\delta\omega).dh(X)\\
&\quad + \omega(X)(\Delta h) - dh(X)\delta\omega + \langle D_X dh, \omega\rangle - \langle dh, D_X\omega\rangle\\
&\quad - d\omega((dh)^{\#}, X) \quad ,
\end{aligned}$$

$$L(\omega)(X) = 2\langle D_X dh, \omega\rangle + (\Delta h)\omega(X) \ ,$$

$$L(\omega) = (\Delta h).\omega + 2\langle D_{\cdot}\, dh, \omega\rangle \ .$$

II. SCALARISATION DES FORMES DIFFERENTIELLES

Nous allons utiliser dans ce paragraphe une technique développée dans [M1]. Soit T^*M l'espace cotangent à M et P l'espace total du fibré des repères orthonormés de M. Le fibré cotangent (comme fibré euclidien) est associé au fibré des repères orthonormés (cf. [K-N]) :

$$\begin{array}{ccc}
P\times E & \xrightarrow{\;q\;} & T^*M\\
\downarrow & & \downarrow\\
P & \xrightarrow[\;p\;]{} & M
\end{array} \ .$$

E désigne l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, sur lequel $O(n)$ agit de manière canonique :

$$\lambda(g).\xi = g.\xi \qquad g\in O(n) \quad \text{et} \quad \xi\in\mathbb{R}^n \ ,$$

l'application q étant le passage au quotient par l'action $O(n)$ à droite sur P et à droite sur E égale à λ^{-1}.

Par cette identification, les sections du fibré cotangent, c'est-à-dire les 1-formes sur M correspondent de manière biunivoque aux sections du fibré trivial $P\times E$ au-dessus de P, c'est-à-dire aux fonctions sur P à valeurs dans E et vérifiant :

$$f(r.g) = \lambda(g^{-1})f(r)$$

où r désigne un repère orthonormé en un point de M. Plus précisément, rappelons qu'un repère orthonormé en un point x de M est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1,\ldots,e_n)$ sur T_xM. L'identification ci-dessus consiste donc à associer à une 1-forme ω la fonction sur P, f_ω, définie par :

$$f_\omega(r) = \{\omega_x(r(e_k))\}_{1\leq k\leq n} .$$

<u>Le Laplacien horizontal</u>.

• La donnée d'une connection ou dérivation covariante sur M est équivalente à la donnée d'une connection principale sur P. L'espace horizontal ainsi défini permet de munir P d'une métrique dont la restriction aux fibres de $P \to M$ soit bi-invariante et en sorte que cette fibration soit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques (voir [K-N] et [Be]).

• Soit r_0 un repère de M en un point x_0. Le transport parallèle du repère r_0 le long de la géodésique définie par le vecteur $r_0(e_i)$ définit une courbe $s \to r(s)$ dans P telle que $r(0) = r_0$.

Soit $A_i(r_0)$ le vecteur tangent à cette courbe à l'origine. La famille de champs de vecteurs $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ définit en chaque point un repère orthonormé de l'espace horizontal de la connection.

Remarquons, par ailleurs, que l'espace vertical (de la submersion) est parallélisable puisque isométrique de manière naturelle à un groupe de Lie. On retrouve, en conséquence, le fait que le fibré des repères d'une variété riemannienne est parallélisable (attention, ceci est faux pour le fibré des repères d'un fibré vectoriel euclidien quelconque !).

• Définissons l'opérateur :

$$\Delta_p = - \sum_{k=1}^{n} A_k^2$$

où A_k est le champ de vecteurs précédemment défini considéré comme opérateur différentiel.

Δ_p est le Laplacien horizontal de la submersion au sens de [B-B].

Ses propriétés sont liées à celles de la connection en un sens qu'il reste à préciser.

• Si ∇ désigne la dérivation covariante de M, étendue aux 1-formes, alors dans la correspondance entre une forme ω et la fonction f_ω sur P à valeurs dans E, on a :

$$\nabla_X \omega \sim f_{\nabla_X \omega} = X^*.f_\omega$$

$$\bar{\Delta}\omega = \nabla^* \nabla \omega \sim f_{\bar{\Delta}\omega} = \Delta_p(f_\omega)$$

où X désigne un champ de vecteurs sur M et X^* son relevé horizontal sur P à travers la connection (cf. [K-N] p. 116) et $\bar{\Delta}$ le Laplacien brut sur les formes différentielles.

La formule de Weitzenböck pour les 1-formes devient alors : pour toute 1-forme ω,

$$f_{\Delta\omega}(r) = \Delta_p(f_\omega)(r) + J(r).f_\omega(r) \qquad (*)$$

$J(r)$ étant la matrice symétrique de la courbure de Ricci exprimée dans le repère r.

L'intérêt de ce procédé est de "détordre" le fibré $T^*M \to M$ en un fibré trivial, en transportant la courbure et l'holonomie (obstruction à la trivialité) de l'espace total T^*M sur la base du nouveau fibré, soit P. Les endomorphismes du fibré cotangent deviennent, dans cette transformation, des fonctions sur P à valeurs dans les endomorphismes d'un espace euclidien <u>fixe</u> et le Laplacien de Hodge-De Rham, un opérateur différentiel d'ordre deux semi-elliptique avec potentiel.

Il suffit alors d'appliquer cette correspondance à l'opérateur Δ_s du paragraphe I ; pour obtenir la formule suivante :

$$\boxed{(**) \quad f_{\Delta_s(\omega)}(r) = \Delta_p(f_\omega)(r) + J(r).i_\omega(r) + K_s(r).f_\omega(r)}$$

avec

$$K_s(r) = s^2 |dh|^2 \circ p(r) Id_E + sL(r)$$

$$L(r) = (\Delta h) \circ p(r) Id_E + 2H(r)$$

$H(r)$ = matrice de $Hess(f)$ en $p(r)$ exprimé dans le repère r .

III. EXPRESSION DU SEMI-GROUPE ASSOCIE A Δ_s .

Ce paragraphe est également entièrement inspiré de [M1] et [M2].

Donnons-nous une forme ω et cherchons θ_t dépendant du paramètre $t \in \mathbb{R}^+$ vérifiant l'équation de propagation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta_t}{\partial t} = - \Delta_s \theta_t \\ \theta_0 = \omega . \end{cases}$$

Ce problème peut être traduit sur P en :

$$(I) \qquad \begin{cases} h_t = f_{\theta_t} \\ u = f_\omega \\ \dfrac{\partial h_t}{\partial t} = - f_{\Delta_s} = -(\Delta_p + J(r) + K_s(r)).h_t(r) \\ h_0 = u . \end{cases}$$

L'opérateur Δ_p n'étant pas elliptique la solution ne peut en général s'exprimer en fonction de la condition initiale à l'aide d'un noyau C^∞ .

On peut toutefois donner une expression simple utilisant la diffusion associée à Δ_p .

a) <u>Diffusion horizontale sur</u> P .

Soit $\Omega_{r_0}(P)$ l'espace de probabilité des trajectoires $r_\gamma(t)$ de la diffusion sur P , associée à Δ_p , partant du point r_0 . On note également par $P_t(r_0,dr)$ les probabilités de transition de ces deux processus.

Cette section est volontairement réduite, ceci étant justifié par le fait que la mise en place des connaissances nécessaires à la compréhension complète de la théorie de la diffusion sur les variétés riemanniennes nécessiterait des développements dépassant le cadre d'un exposé de séminaire. Nous nous bornerons donc à une compréhension intuitive. Pour de plus amples informations les ouvrages suivants peuvent être consultés : [M2], [Bi], [Ke], [E].

Rappelons toutefois que l'espace du paramètre γ de la diffusion peut être pris comme étant l'espace des chemins continus horizontaux.

b) <u>Intégrales multiplicatives</u>.

Soit $A(t)$ une matrice carrée d'ordre n dépendant régulièrement du paramètre réel t . Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle matricielle

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial t} = - A(t)V(t,s) \\ \text{ou} \qquad\qquad\qquad\qquad V(u,u) = Id \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = V(t,s)A(s) \ . \end{array}\right.$$

La solution est donnée par :

$$V(t,s) = \lim_{n\to\infty} \{(I+\Delta_n A(t)).(I+\Delta_n A(t+\Delta_n))\dots(I+\Delta_n A(s-\Delta_n)\}$$

$$\Delta_n = \frac{1}{n}(s-t) \ .$$

On utilisera la notation suivante :

$$V(t,s) = \exp\left(*\int_{[t,s]} A(u)du\right) = \text{intégrale multiplicative de } A .$$

Remarquons que :

$$\exp\left(*\int_{[t,s]} A(u)du\right) = \exp\left(*\int_{[t,v]} A(u)du\right)\exp\left(*\int_{[v,s]} A(u)du\right) .$$

Par contre, il n'existe pas en général de relations simples entre l'intégrale multiplicative de A et celle de $-A$.

c) Expression de la solution de (I).

THEOREME ([M1], [M2]). La solution de (I) s'écrit :

$$h_t(r_0) = E_{r_0}\left[\exp\left(*\int_{[0,t]} (-J-K_s)(r_\gamma(\xi))(d\xi)u(r_\gamma(t))\right)\right]$$

où E_{r_0} est l'espérance définie sur l'espace des chemins de la diffusion partant de r_0 , $\Omega_{r_0}(P)$.

IV. INEGALITE DE MORSE.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner une idée de la preuve de Witten [W] des inégalités de Morse. Le travail consiste à obtenir ces dernières de manière analytique, comme limite d'inégalités faisant intervenir l'opérateur Δ_s .

Comme précédemment, on se restreindra aux 1-formes et à la preuve de :

1er nombre de Betti de $M = b_1(M) \leq N_1 = \#$ {points critiques d'indice 1 de h}

où h sera supposée de Morse sur M .

1) La théorie de Hodge appliquée au complexe de De Rham permet de montrer ([K]) que :

$b_1(M)$ = multiplicité de la valeur propre 0 de Δ_s opérant sur les 1-formes

$\leq \# \{\text{valeurs propres de } \Delta_s \leq A\}$

et ceci pour tout s et $A > 0$ fixé.

L'inégalité cherchée découle alors de :

$$\overline{\lim_{s\to+\infty}}\, M(s) \leq N_1 \; .$$

2) Pour la démonstration de cette inégalité, nous nous placerons dans un cas particulièrement simple en supposant que chaque point critique de h possède un voisinage dans lequel la métrique de M est euclidienne et la fonction h s'écrit sous la forme réduite :

$$h(m) = h(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i^2$$

où (x_i) est un système de coordonnées locales euclidien. L'indice du point critique est alors le nombre de ϵ_i égaux à -1 .

3) Soit alors $m_1,\dots,m_q$ les points critiques de h et V_i les boules géodésiques de rayon ρ de centre ces points. On suppose ρ suffisamment petit en sorte que V_i possède la propriété du paragraphe précédent pour tout i . Enfin, on pose $V_0 = M\setminus \bigcup_{i\geq 1} V_i$.

Rappelons que l'opérateur Δ_s est associé à la forme quadratique suivante :

$$Q_s(\omega) = \int_M |d_s\omega|^2 + |\delta_s\omega|^2 \; .$$

Ayant pour domaine les sections L^2 de T^*M telles que les courants $d_s\omega$ et $\delta_s\omega$ soient aussi dans L^2 , i.e. $H^1(M;T^*M)$. De plus,

$$q_s(\omega) = \int_M (|d\omega|^2 + |\delta\omega|^2 + s^2|dh|^2|\omega|^2 + s\langle L\omega,\omega\rangle)$$

Notons alors $T|V_j$ la restriction de T^*M au-dessus de V_j et $H^1(T|V_j)$ l'espace de ses sections. On définit de manière naturelle l'opérateur de Neumann associé à Δ_s sur V_j, noté $\Delta_{s,j}$ par la forme quadratique

$$q_{s,j}(\omega) = \int_{V_j} (|d\omega|^2 + |\delta\omega|^2 + s^2|dh|^2|\omega|^2 + s\langle L\omega,\omega\rangle) .$$

Comme dans [R-S], section XIII-15, on a :

$$\bigoplus_{j=0}^{q} \Delta_{s,j} \leq \Delta_s ,$$

cette inégalité entre opérateurs devant bien être prise au sens des formes quadratiques. Et donc :

$$M(s) \leq \sum_{j=0}^{q} M_j(s)$$

avec $M_j(s) = \{\text{valeurs propres} \leq A \text{ de } \Delta_{s,j}\}$.

4) Sur V_0, $|dh|$ est bornée inférieurement par un nombre strictement positif, par conséquent si ℓ_s est le minimum sur V_0 de la plus petite valeur propre de l'endomorphisme $s^2|dh|^2 + sL$:

$$\ell_s \xrightarrow[s\to+\infty]{} +\infty$$

et donc il existe $b > 0$ tel que, pour s assez grand :

$$\Delta_{s,0} \geq \Delta + b > 0$$

d'où

$$M_0(s) = 0 \quad \text{pour } s \text{ assez grand.}$$

Sur V_j $(j \geq 1)$, les hypothèses simplificatrices permettent de se ramener à un problème purement euclidien : l'étude des valeurs propres d'un opérateur, opérant sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, défini sur la boule de centre 0 et de rayon ρ avec "conditions de Neumann au bord".

L'opérateur $\Delta_{s,j}$ se simplifie en :

$$\Delta_{s,j} = \sum_{i=1}^{n}(H_i + s\epsilon_i K_i)$$

où $$H_i = -\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + s^2 x_i^2$$

et $$K_i = [a_i, a_i^*]$$

a_i = multiplication extérieure par dx_i

a_i^* = multiplication intérieure par dx_i .

K_i est une matrice à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ et par conséquent commute avec H_i . Plus précisément K_i est une matrice diagonale dont tous les termes de la diagonale principale sont égaux à -1 à l'exception du terme de rang i qui vaut $+1$.

5) Etudions l'opérateur $H_s = \sum_{i=1}^{n} H_i + s\epsilon_i K_i$ sur $\mathbb{R}^n$.

H_i et K_i commutant, ils sont simultanément diagonalisables, or H_i est un oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}$, dont on connaît le spectre [R-S]

Spectre de $H_i = \sigma(H_i) = \{s(1+2N_i) \; ; \; N_i = 0,1,2,\ldots\}$.

Le spectre de K_i est constitué de la valeur propre -1 de multiplicité $n-1$ et de la valeur propre simple 1 .

D'où :

$$\sigma(H_s) = \{s\sum_{i=1}^{n}(1+2N_i+\epsilon_i n_i) \; ; \; N_i = 0,1,2,\ldots \quad n_i = \pm 1\} .$$

Il est clair que 0 est valeur propre de H_s si et seulement si le point critique est d'indice 1 et que dans ce cas elle est simple.

De plus, l'unique fonction propre, lorsqu'elle existe, est :

$$\omega_s = e^{-s\frac{r^2}{2}} dx_i \quad \text{où } r = \text{distance à l'origine},$$

si $\epsilon_i = -1$ et $\epsilon_j = 1$ pour $j \neq i$.

6) Pour obtenir l'inégalité désirée, il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} M_j(s) = 0 & \text{si } m_j \text{ est d'indice différent de } 1 \\ M_j(s) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour s suffisamment grand.

La démonstration utilise des techniques standards. Le lecteur peut se référer à [Bo] pour les détails.

V. CONCLUSION

E. Witten [W] donne d'autres résultats utilisant la même technique de démonstration, ainsi qu'une intéressante conjecture concernant le calcul de la cohomologie de M .

La référence [Bo] contient un résumé de certains développements de la méthode ainsi que de nombreuses références. On doit également consulter [C] et [G].

BIBLIOGRAPHIE

[B-B] BERARD BERGERY L. et BOURGUIGNON J.P., Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic Fibres. Illinois Journal of Maths, vol. 26, number 2, 1982.

[Be] BESSE A., Einstein Manifolds. A paraître.

[Bi] BISMUT J.M., Mécanique aléatoire. Lecture Notes in Math. 866, Berlin Heidelberg, New York, Springer-Verlag.

[Bo] BOURBAKI N., Séminaire. Exposé n° 617.

[C] COMBET E., Perturbations singulières et Formules de localisations.
C.R.A.S., t. 297, 1983.

[E] ELWORTHY K.D., Stochastic differential equations on Manifolds.
London Math. Society Lecture notes series 70, Cambridge University Press.

[G] ALVAREZ-GAUME L., Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem.
Comm. Math. Phys. 90, pp; 161-173 (1983).

[K] KOTAKE T., The fixed Point Theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators.
Comm. on Pure and Applied Math., vol. XXII, pp. 789-906 (1969).

[Ke] Mc KEAN H.P., Stochastic Integrals (1969).
New York, Academic Press.

[K-N] KOBAYASHI S. et NOMIZU K., Foundations of differential geometry.
Vol. I et II. Tracts in Mathematics 15. Interscience Pub.

[M 1] MALLIAVIN P., Formules de la moyenne, Calcul de Perturbations, etc.
J. Funct. Anal. 17, pp. 274-291 (1974).

[M 2] MALLIAVIN P., Géométrie différentielle stochastique.
Séminaire de Mathématiques Supérieures. Université de Montréal.

[Ro] ROACH M., Max Roach Quartet. The Loadstar.
Horo HDP 9-10.

[R-S] REED M. et SIMON B., Methods of Mathematical Physics.
Vol. IV. Analysis of Operators. Academic Press 1978.

[S] SIMON B., Semi-classical Analysis of low-lying eigenvalues I.
Ann. I.H.P. 38, n°3, pp. 295-308 (1983).

[W] WITTEN E., Supersymmetry and Morse theory.
J. of Diff. Geom. 17, pp. 661-692 (1982).
