

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Jean-Michel PIPEAU

De la dynamique classique aux fonctions propres du laplacien via l'équation de Schrödinger

Volume 37 (2021-2022), p. 19-80.

<https://doi.org/10.5802/tsg.382>

© Les auteurs, 2021-2022.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.centre-mersenne.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.centre-mersenne.org/legal/>).



Publication membre du Centre Mersenne
pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

e-ISSN : 2118-9242

DE LA DYNAMIQUE CLASSIQUE AUX FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN VIA L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

Jean-Michel Pipeau

RÉSUMÉ. — Ce texte est le mémoire de master de Jean-Michel, l'un des étudiants les plus motivés de l'université d'Auffargis, mais pas le moins fêtarde. En particulier on peut affirmer que ce mémoire a pris le temps de mûrir : il a été écrit entre l'automne 2021 et l'automne 2023, sous la tutelle des chercheuses et des chercheurs de l'Institut International du Pipeau Mathématique d'Auffargis. Il a pour but de présenter, de manière informelle, les liens entre la dynamique des particules quantiques (l'équation de Schrödinger) et la dynamique classique. L'auteur espère que le lecteur/la lectrice aura autant de plaisir à le lire qu'il en a eu à l'écrire.

TABLE DES MATIÈRES

Un jour d'automne 2021...	20
Avant-propos	21
1. Introduction et guide de lecture	21
Le laplacien	22
Une analogie matricielle pour introduire l'équation de Schrödinger	22
Le lien avec le flot géodésique	24
La récolte	24
2. L'équation de Schrödinger	25
2.1. Faisons les présentations	25
2.2. Solutions sous formes d'ondes planes	26
2.3. L'équation de Schrödinger et le flot géodésique	28
2.4. Paquets d'ondes	30
2.5. Propagation des paquets d'ondes dans $\mathbb{R}^n$.	31
2.6. Cas d'une variété riemannienne quelconque	33
2.7. Prenons un peu de hauteur	33
2.8. Temps d'Ehrenfest	34
3. Décomposition en paquet d'ondes.	36
3.1. Décomposition en paquet d'ondes	36
3.2. Propagation.	37
3.3. Une fonction d'onde pensée comme une mesure sur TM	38
3.4. Microlocalisation	39
4. Les fonctions propres du laplacien	41
4.1. Rappels sur le laplacien	41

4.2.	Le jeu entre la fréquence, la vitesse et la constante de Planck h	42
4.3.	Fonctions propres, fréquence et paquets d'ondes	43
4.4.	Mesures associées aux fonctions propres et mesures semi-classiques	44
5.	Des bonnes questions	46
5.1.	Fonctions propres du laplacien à haute fréquence	47
5.2.	Mesures semi-classiques	48
5.3.	Le tore plat	49
5.4.	La sphère ronde S^2	50
5.5.	Surfaces hyperboliques	51
6.	Localisation des fonctions propres en moyenne : lois de Weyl.	52
6.1.	Loi de Weyl classique	52
6.2.	Loi de Weyl locale	55
7.	Le théorème d'ergodicité quantique	58
7.1.	Des rappels de dynamique et théorie ergodique	59
7.2.	Une pipeaumonstration du théorème d'ergodicité quantique	60
Annexe A.	Formulaire de Fourier	62
Annexe B.	Paquets d'ondes dans $\mathbb{R}^n$	63
Annexe C.	Sur la dynamique du flot géodésique	69
Annexe D.	Onde ou particule ?	72
D.1.	Un phénomène typiquement ondulatoire : les interférences	72
D.2.	Des interférences quantiques	74
Annexe E.	Une démonstration du théorème d'ergodicité quantique	77
	Conseils de lecture du soir	79

Un jour d'automne 2021...

Au comptoir d'Auffargis, 11h du matin, Jean-Michel et Sylvie dégustent un 204.

- *S : Alors Jean-Mich, ça donne quoi ce M1 ?*
- *JM : J'y comprends rien en vrai, à l'analyse semiclassico-cale... Franchement c'est abusé, pas une référence un peu introductive pour les néophytes. Pourtant Freduch il m'a bien vendu les bails, ça a l'air cool en vrai.*

Une pause un peu gênée s'en suit. Sylvie se demande comment son ami de toujours a pu se lancer dans cette histoire de master de maths, lui qui a déjà du mal à additionner 2 et 2 dans ses rares moments de sobriété... Elle-même est étudiante à l'IIPMA, elle a un peu moins trainé que Jean-Michel, et travaille à sa thèse sur la percolation dans les milieux décaféinés.

- *S : C'est quand ta soutenance déjà ?*
- *JM : Je vois pas dans quel monde je vais soutenir ce stage de toute façon...*
- *S : Bon tu veux me raconter un peu ? Qu'est-ce que tu trouves sympa là-dedans ?*

Avant-propos

Ce texte est destiné à un public ayant des connaissances élémentaires en géométrie et en système dynamique, et curieux des problèmes de l'analyse semi-classique, en particulier du chaos quantique. Il a été écrit pour être lu par quelqu'un n'ayant *aucun* bagage en calcul pseudo-différentiel, en analyse microlocale ou encore en géométrie symplectique. Le prix à payer pour viser un tel public est très clair : ce texte n'a aucune visée démonstrative. Son auteur, Jean-Michel, instinctivement doué dans l'art si subtil du pipeau, a gentiment accepté de donner son point de vue sur ce sujet, riche et profond mais difficile d'accès.

Jean-Michel évite délibérément le formalisme un peu aride du calcul pseudo-différentiel, qui n'a en première approche qu'une place technique en ce qui concerne les questions du chaos quantique. Le texte n'y fait donc jamais appel, pas plus qu'aux notions de quantification, de symbole principal semi-classique ou autres, souvent utilisées dans ce contexte.

Aucun énoncé de ce texte ne sera démontré, ni même ne sera tout à fait bien énoncé. Le parti pris étant, insistons sur ce point, de donner une idée des motivations et des phénomènes autour de la question du chaos quantique en particulier, et de l'analyse semi-classique en général, ce qui nous semblait incompatible avec un rigorisme trop appuyé. Nous invitons donc la lectrice à ne pas se tenir trop près du texte, et plutôt à se laisser aller à réfléchir aux phénomènes qu'on a essayé de mettre en valeur, quitte à réfléchir « un peu dans vent » comme Jean-Michel (pas tout à fait frais) le soulignait pas plus tard qu'hier soir, tard.

1. Introduction et guide de lecture

La motivation principale de ce texte est, étant donnée une variété riemannienne (M, g) , d'expliquer les liens entre les trois objets suivants :

- le *laplacien* (un opérateur défini sur les fonctions d'une variété riemannienne) ;
- l'*équation de Schrödinger* (qui est une équation aux dérivées partielles) ;
- le *flot géodésique de la variété* (qui est un système dynamique).

Le laplacien

On aborde ces questions du point de vue suivant : si (M, g) est une variété riemannienne compacte, on veut étudier son laplacien $\Delta_g = -\operatorname{div}(\nabla_g)$, et en particulier l'équation aux valeurs propres

$$\Delta\psi = \lambda \cdot \psi.$$

On demande à notre lecteur d'accepter que cette question est d'intérêt, bien qu'il soit raisonnable d'en douter ! On discute du sens précis à donner à cette question dans le paragraphe 5, dans laquelle on donne une introduction culturelle au laplacien et ses fonctions propres et où l'on traite superficiellement les cas de la sphère ronde $\mathbb{S}^d$ et du tore plat $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Le laplacien est un opérateur purement géométrique, au sens où il ne dépend que de la métrique. On s'attend donc à ce que ses propriétés (ses fonctions propres et ses valeurs propres en pratique) dépendent et reflètent la géométrie de la variété riemannienne sous-jacente. Malheureusement, les tentatives pour décrire les fonctions/valeurs propres du laplacien en étudiant *directement* le lien entre l'opérateur Δ_g et les propriétés géométriques de la variété (M, g) ne donnent que des résultats très partiels et qui sont loin d'être complètement satisfaisants. Cette approche donne quand même des résultats importants, comme les *lois de Weyl*, que nous pipeautons dans le paragraphe 6. Très grossièrement, l'approche purement géométrique (dont le produit principal sont les lois de Weyl susmentionnées) donne des résultats sur les fonctions propres *en moyenne* et ne décrit jamais les fonctions propres individuellement, ce qui est une limitation de taille. Pire ! les lois de Weyl sont des théorèmes *universels*, au sens où leurs conclusions ne permettent pas de différencier deux métriques riemanniennes de même dimension.

On demande à notre lecteur de croire au fait pratique suivant : étudier le laplacien directement en utilisant la géométrie est difficile. On se demande donc comment étudier les fonctions propres du laplacien, sans passer directement par le laplacien lui-même.

Une analogie matricielle pour introduire l'équation de Schrödinger

On prend le parti, le temps de ce court paragraphe, de traiter le laplacien (qui est un opérateur *linéaire* $\Delta : L^2(M, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(M, \mathbb{C})$ sur un espace

de dimension infinie) comme si c'était une brave matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Bien sûr, en théorie, si on connaît les coefficients d'une matrice, on peut en tirer toute l'information qu'on veut sur ses vecteurs propres. En pratique, c'est difficile pour les grosses matrices (l'auteur abandonne à partir des matrices 3×3) et le laplacien peut être vu comme une matrice en dimension infinie, ce qui fait beaucoup de coefficients. On va donc chercher d'autres moyens pour trouver des informations sur les vecteurs propres.

Commençons par une remarque formelle : pour tout $z \in \mathbb{C}$, la matrice exponentielle

$$\exp(zA) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} A^n$$

et la matrice A , commutent. Elles ont donc les mêmes sous-espaces stables, donc, à une blague près, les mêmes vecteurs propres. Si, par un miracle quelconque, on sait dire des choses intéressantes sur $\exp(zA)$ pour certains z , on sera en meilleur position pour décrire les vecteurs propres de A .

On peut alors se poser la question : que veut dire $\exp(z\Delta)$ pour le laplacien ? On se restreint pour le moment aux valeurs de z imaginaires pures, $z = it$ avec $t \in \mathbb{R}$. La famille à un paramètre de matrices

$$U(t) = \exp(itA)$$

satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{d}{dt} U(t) = iAU(t) !$$

On peut espérer en tirer de l'information sur A .

Faisons maintenant le chemin inverse, mais pour le laplacien. Supposons donnée une famille d'opérateurs $U(t)$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} U(t) = i\Delta U(t)$$

avec condition initiale $U(0) = \text{Id}$, la famille $U(t)$ sera un bon analogue de $\exp(itA)$ mais pour le laplacien. En supposant toujours qu'on a trouvé une telle famille $U(t)$ si u_0 est une fonction sur M , la fonction $u(t, x) = U(t)u_0$ satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u.$$

Ce que certains appellent l'équation de Schrödinger !

Cette petite analyse a porté ses fruits, et on peut ainsi inverser le processus pour définir $U(t) = \exp(it\Delta)$. Précisément, l'opérateur qui à une fonction u_0 associe la solution fixée au temps t de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u$

(opérateur appelé le *propagateur* de l'équation de Schrödinger) est un analogue de $\exp(itA)$ si on remplace une matrice A par le laplacien. En particulier il a les mêmes fonctions propres que Δ et si on est capable de le décrire d'une manière plus satisfaisante que Δ lui-même, on peut espérer comprendre des choses intéressantes.

Le lien avec le flot géodésique

Le paragraphe précédent nous aura convaincu que si on veut étudier les fonctions propres du laplacien Δ , on peut aussi bien regarder $\exp(it\Delta)$ (notation qu'on utilisera à partir de maintenant pour décrire le propagateur de l'équation de Schrödinger, on discute de cette notion de « propagation/propagateur » en détail en section 2.1) pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}$. Notre lecteur sera en droit de se demander,

Très bien, et alors ? Qu'avons-nous gagné *en pratique* ?

La réponse à cette question vient du fait qu'il existe un lien *descriptif* entre l'équation de Schrödinger (et son propagateur $\exp(it\Delta)$) et un système dynamique qu'on connaît souvent assez bien, le *flot géodésique*. On explique ce lien dans les paragraphes 2 et 3. Un poil plus précisément, l'étude de l'équation de Schrödinger peut se ramener, *en première approximation*, à celle du flot géodésique. Cette connexion non-triviale et profonde est le gain majeur de cette approche. On appelle cette connexion *Pipeau Fondamental*, et est formalisée par le *théorème d'Egorov* (qu'on appelle aussi *théorème de propagation des paquets d'onde*).

Il faudra se méfier ici. L'équation de Schrödinger et le flot géodésique sont deux objets de natures très différentes, faire le lien entre les deux n'est pas chose aisée. C'est l'investissement principal qu'on demande au lecteur de faire, à savoir lire les sections 2 et 3 avec grande attention. Le reste devrait, on l'espère, couler de source.

La récolte

Finalement, une fois que ce lien a été solidement établi (si ce n'est formellement, au moins dans la tête du lecteur!), on montre comment s'en servir pour décrire, d'une manière assez satisfaisante, les fonctions propres du laplacien sur une variété à courbure négative. C'est le *théorème d'ergodicité quantique*, qui montre que le fait que le flot géodésique d'une variété

soit ergodique a des conséquences spectaculaires sur l'allure des fonctions propres du laplacien. On y consacre le paragraphe 7.

On invite notre lectrice à penser à ce théorème comme une application parmi d'autres, certes remarquable, du lien fondamental entre le laplacien et le flot géodésique, et nous l'avons inclus pour convaincre que la compréhension de ce lien permet une *meilleure* compréhension du laplacien. Il nous semble que le phénomène important reste le théorème d'Egorov, sous ses multiples versions, et la description qu'il permet de faire des solutions de l'équation de Schrödinger à l'aide du flot géodésique. Et maintenant sans transition, place aux maths !

2. L'équation de Schrödinger

2.1. Faisons les présentations

On considère ici l'équation de Schrödinger libre (sans potentiel)

$$(2.1) \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{h}{2} \Delta u.}$$

On précise les notations.

- l'inconnue est une fonction $u : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{C}$ où M est une variété riemannienne (on peut supposer $M = \mathbb{R}^n$ muni de la métrique plate pour fixer les idées).
- Δ est le laplacien usuel

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) \left(\Delta u = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) \text{ pour } \mathbb{R}^n \right).$$

- h est une constante strictement positive, que l'on pense petite, qu'on appellera *constante de Planck*.

Une EDP d'évolution est un système dynamique. L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles *d'évolution*, c'est à dire qu'elle s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u(t, \cdot))$$

où $F : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ dépend de $u(t, \cdot)$ et de ses dérivées en espace (d'aucuns diraient que F est un opérateur différentiel). En d'autres termes, une équation d'évolution est juste une équation différentielle ordinaire sur un espace de fonctions (et donc de dimension infinie). Cela nous

permet de penser à l'équation (2.1) comme à un système dynamique : c'est une équation différentielle autonome (indépendante du temps) et linéaire d'ordre 1 sur un espace fonctionnel : la courbe $t \mapsto u(t, \cdot)$ est alors la courbe intégrale du champ de vecteurs $\vec{X}_h(u) := i(h/2)\Delta u$ sur $\mathcal{C}^\infty(M)$.

On profite donc de cette présentation pour introduire la terminologie suivante, qui indique bien comment il faut penser à l'équation de Schrödinger (et à une équation de transport en général). Si u_0 est une fonction sur notre variété M , on appelle son *propagé* au temps τ la fonction $u_\tau : M \rightarrow \mathbb{C}$ qui correspond à l'évaluation au temps $t = \tau$ de la solution $u(t, x)$ de l'équation de Schrödinger satisfaisant $u(0, x) = u_0(x)$ pour tout x (encore faudrait-il justifier que tout ce bazar existe et est bien défini, mais croyez-nous sur parole, il n'y a pas de problème à ce niveau). En d'autres termes, étant donnée une distribution spatiale $u_0 : M \rightarrow \mathbb{C}$, on peut la *propager* dans le temps en utilisant l'équation de Schrödinger.

Note pour la lectrice : l'équation de Schrödinger est un des objets centraux de la mécanique quantique. Il s'avère que pour notre propos, on peut complètement en ignorer le sens physique et nous avons pris le parti de nous affranchir, autant que possible, de la terminologie et des considérations de nature physique. Pour les curieuses, nous avons néanmoins inclus une annexe (annexe D) expliquant en quelques mots la physique sous-jacente à notre belle équation.

- *S* : Du coup, t'as une brave EDP d'évolution et tu décide de la voir comme un système dynamique en dimension infinie ? Mais **POURQUOI** tu me racontes des conneries pareilles ?
- *JM* : ben c'est la dualité onde/particule. Mais je vais pas te raconter ça maintenant, ça me coupe dans le fil de mon récit, et j'ai l'inspiration qui vient là. (Il se tourne vers le comptoir) Tu nous en remets deux Roger stp ? (À Sylvie), bon je continue, et va voir l'annexe D si tu veux en savoir plus là-dessus.

2.2. Solutions sous formes d'ondes planes

Dans ce paragraphe, on introduit des solutions particulières à l'équation de Schrödinger dans le cas le plus simple où notre variété M est la droite réelle $\mathbb{R}$. Dans ce cas, l'équation de Schrödinger devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On peut facilement vérifier que pour tout $v \in \mathbb{R}$, la fonction

$$u^v : (t, x) \mapsto \exp(iv(x - vt/2)/h)$$

est une solution de l'équation de Schrödinger. On appelle une telle solution une *onde plane*. C'est le *propagé* de l'état initial $u_0^v(x) = \exp(i\frac{v}{h}x)$.

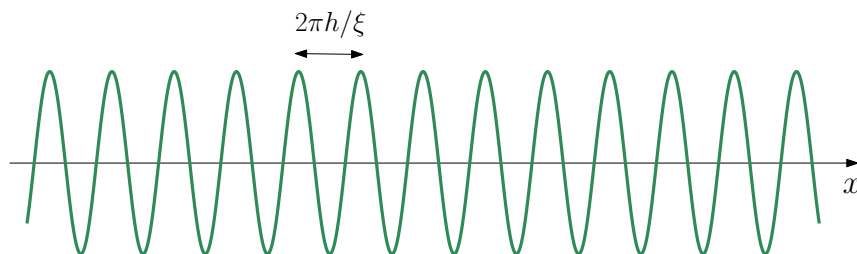


FIGURE 2.1. Le graphe de (la partie réelle de) $x \mapsto u^v(t, x)$ pour un t donné.

Quand on *propage* l'état initial $u^v(0, \cdot)$ dans le temps, son graphe est donc simplement translaté à vitesse constante. On définit ainsi la *vitesse* d'une telle onde plane comme la vitesse de translation de ce graphe : c'est la vitesse à laquelle une crête donnée de l'onde se déplace. On laisse en exercice le fait important suivant.

FAIT 2.1. — Une onde plane (par exemple $u_0(x) = e^{ivx/h}$) propagée par Schrödinger se déplace à la vitesse $\frac{v}{2}$.

Remarquons que quand h tend vers 0, une onde se déplaçant à vitesse 1 oscille très vite (sa fréquence est proportionnelle à h^{-1}).

On a donc construit une fonction qui, propagée par l'équation de Schrödinger, se déplace à vitesse constante le long d'une ligne droite, c'est-à-dire le long d'une géodésique. C'est le premier indice quant au lien entre l'équation de Schrödinger et le flot géodésique.

Note pour le lecteur : jusqu'à présent la constante h n'a joué aucun rôle, et la lectrice filoute pourrait remarquer que si $u(t, x)$ est solution de l'équation de Schrödinger $\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{h}{2}\Delta u$, la fonction $u(\frac{2t}{h}, x)$ est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u$. Formellement, on ne perdrait rien à supposer $h = 1$. Le lecteur peut donc se demander ce que cette constante vient faire ici. On va lever le voile dans les paragraphes suivants : le lien entre l'équation de Schrödinger et la dynamique classique (le flot géodésique) apparaîtra à la limite quand h tend vers 0.

2.3. L'équation de Schrödinger et le flot géodésique

Notre objectif, pour le reste de cette section, est de convaincre le lecteur qu'on peut donner du sens à l'énoncé suivant et le démontrer :

PIPEAU FONDAMENTAL. — *Quand $h \rightarrow 0$, l'équation de Schrödinger tend vers le flot géodésique de la variété riemannienne M .*

Le lien entre ces deux systèmes dynamiques devrait avoir été clarifié à la fin du paragraphe 2.4. Faisons, pour commencer, quelques remarques sur la nature de ces deux objets. Revenons à leurs définitions.

- (1) Pour l'équation de Schrödinger : c'est une famille (indexée par $h > 0$) d'équations d'évolution, auxquelles on peut penser comme à des systèmes dynamiques sur $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ et qu'on peut voir comme les flots des champs de vecteurs $\vec{X}_h(u) = i\frac{h}{2}\Delta u$.
- (2) Le flot géodésique $g: \mathbb{R} \times TM \longrightarrow TM$ est lui un système dynamique sur le fibré tangent de M .

Une première remarque qu'il convient de faire pour éclaircir le propos, est que lorsque h tends vers 0, l'équation de Schrödinger converge algébriquement vers l'équation triviale $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Cela nous indique juste que le sens à donner à l'énoncé du Pipeau Fondamental sera forcément un peu subtil.

L'équation de transport. Une première difficulté, pour comparer ces deux cas, est qu'ils ne vivent pas sur le même espace : le flot géodésique agit sur des *points* de M ; alors que l'équation de Schrödinger propage des *fonctions* sur M .

A priori, ce n'est pas insurmontable si on approche le problème avec le bon point de vue. En effet, si l'on se donne un nuage de points sur M à vitesse initiale donnée que l'on modélise par une fonction $u_0: TM \rightarrow \mathbb{R}$ qui en représente la densité, alors la densité de ce nuage de points au temps t est donnée par

$$u(t, (x, v)) := u_0 \circ g_t(x, v)$$

qui satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante, appelée *équation de transport* :

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = du(X),$$

où X est le champ de vecteurs définissant le flot géodésique et du la différentielle de u . Cette équation de transport est complètement équivalente au flot géodésique, elle en est juste sa *formulation fonctionnelle*.

Maintenant qu'on a réussi à faire vivre nos deux systèmes dans le même monde (celui des équations aux dérivées partielles), une première formulation possible de la convergence de l'équation de Schrödinger vers le flot géodésique pourrait alors être la suivante

L'équation de Schrödinger converge-t-elle, d'une manière ou d'une autre, vers l'équation de transport (2.2) ?

La réponse à cette question est *non !* Cela nous dit qu'il faut travailler un peu plus pour donner du sens au Pipeau Fondamental.

- *S : Donc tu veux comparer la dynamique de l'équation de Schrödinger sur tes fonctions d'onde avec celle du flot géodésique sur les particules dans ta variété ?*
- *JM : Exactement ! Les ondes vont jouer quantiquement le rôle des points.*
- *S : Mais attends, je veux bien qu'une fonction de M puisse te donner des informations sur la position d'une particule. Mais comment tu vas retrouver sa vitesse ?*
- *JM : on y vient, on y vient... Mais il commence à faire soit là non ?*
- *S : Attends, viens on s'emmène une gourde, et on va faire un tour en forêt. Faut que j'aille sortir Don José, sinon il va pisser partout dans le rade.*
- *JM : Don José hahaha ! Pourquoi tu l'as appelé comme ça ?*
- *S : Ben dès qu'il entend une sirène de keufs il chante. Je te jure !*
- *JM : Mais oui... (Au comptoir) Roger, tu peux me remplir ça ? (Il lui tend une gourde) Moitié moitié hein ;)*
- *R : Bien sûr, on peut même y rentrer quelques glaçons !*

Où est passé l'espace tangent ? Un problème en apparence technique (mais qui cache la saveur réelle de cette discussion) de la formulation de la question précédente est que l'équation de transport ainsi définie vit sur un espace de fonctions à valeurs réelles, définies sur TM (le fibré tangent à M) ; alors que l'équation de Schrödinger vit sur un espace de fonctions à valeur complexe, définies sur M . Pas de panique, TM a une dimension deux fois plus grande que M , mais c'est compensé par le fait qu'on regarde des fonctions à valeurs complexes pour l'équation de Schrödinger. Un problème plus substantiel est que pour pouvoir comparer une fonction

à valeur complexe de M à des éléments de TM , il faudra donner un sens à sa « vitesse » et à sa « position ». Nous verrons que, grossièrement,

- l'information de la *position* d'une fonction u sur M sera contenue dans le *module* de u ;
- la *vitesse* d'une particule sur M sera encodée dans (la variation de) l'*argument* de u .

Notre objectif pour la fin de cette section, est de faire un premier lien précis entre le flot géodésique et les solutions de l'équation de Schrödinger à travers l'un des piliers de la théorie : le(s) *théorème(s) de propagation des paquets d'ondes*. Cela devrait éclaircir les deux points précédents.

2.4. Paquets d'ondes

Les paquets d'ondes vont être les objets de base grâce auxquels on va explorer la correspondance entre le flot de Schrödinger et le flot géodésique. *Pour simplifier notre propos, on commence par les définir dans $\mathbb{R}^n$.*

DÉFINITION 2.2. — *Un h -paquet d'ondes au point $x \in \mathbb{R}^n$, de vitesse $v \in \mathbb{R}^n$ est défini par la fonction.*

$$\Phi_{x,v}^h : y \mapsto C_h e^{i \frac{v \cdot y}{h}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2h}},$$

où $C_h \sim h^{-n/4}$ est une constante de normalisation qui garantit $\|\Phi_{x,v}^h\|_{L^2} = 1$.

Remarque 2.3. — Le fait important ici est que le flot de Schrödinger est unitaire, c'est à dire qu'une solution de l'équation de Schrödinger a une norme L^2 constante au cours du temps. On normalisera toutes les fonctions dans L^2 , nous renvoyons la lectrice intéressée à l'appendice D pour plus de détails.

Un dessin vaut ici mieux qu'une définition, voici le graphe de la partie réelle d'un h -paquet d'ondes.

On voit que $\Phi_{x,v}^h$ n'est rien d'autre qu'une onde plane qu'on a « tronquée » près de x . De fait, un paquet d'ondes se déplace comme une onde plane, à vitesse constante égale à v .

— *S : Attends tu m'arnaques là, les ondes planes elles se déplaçaient à vitesse $v/2$. Il sortait d'où ce facteur $\frac{1}{2}$ chelou d'ailleurs ?*

- JM : De l'équation de Schrödinger. C'est le dieu 51 qui l'a placé là, on y peut rien.
- S : Mais là y en a plus ? C'est quoi ce délire...
- JM : AH! Tu vois que c'est le bordel ce truc. Bon, va voir l'annexe B, je vais essayer d'expliquer un peu tout ça. En fait il se déplace à une vitesse v , mais l'onde sous-jacente à vitesse $v/2$... Mais bon, c'est pas hyper important à ce stade.

Des sirènes s'approchent, une voiture de police passe en trombe à la lisière de la forêt.

- DJ : AAAA OOOO UUUUUUUU OOOO UUUU AAAA

2.5. Propagation des paquets d'ondes dans $\mathbb{R}^n$.

On énonce maintenant le résultat principal qui va nous permettre de faire le lien entre dynamique classique et équation de Schrödinger. On note

$$e^{it\frac{h}{2}\Delta}(\Phi_{x,v}^h)$$

la solution au temps de t de l'équation de Schrödinger $\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{h}{2}\Delta u$ dont la condition initiale est $\Phi_{x,v}^h$. Informellement, le résultat est le suivant.

Pour des temps t pas trop grands, $e^{it\frac{h}{2}\Delta}(\Phi_{x,v}^h)$ est (presque) un paquet d'ondes de vitesse v , centré en l'image de (x, v) par le flot géodésique.

Essayons de rendre cet énoncé un peu plus précis. On définit la largeur d'une fonction du type $y \mapsto C_h e^{-(\frac{|y-x|}{\sigma})^2} e^{i\frac{v \cdot y}{h}}$ comme étant σ . L'énoncé plus précis devient alors

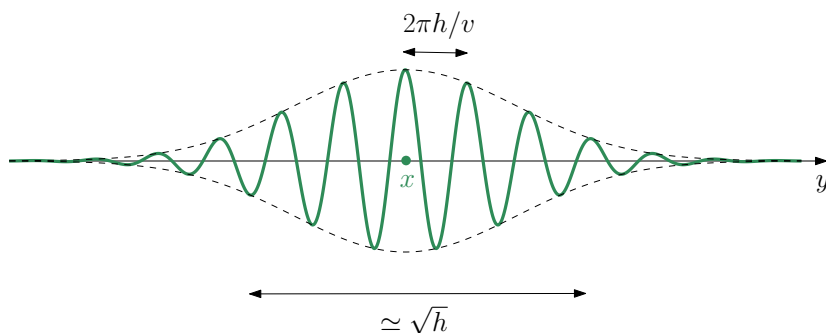


FIGURE 2.2. Le graphe de $y \mapsto \Phi_{x,v}^h(y)$.

THEOREME D'EGOROV 2.4 (Propagation des paquets d'onde dans $\mathbb{R}^n$).
Pour tout $t > 0$ pas trop grand, $e^{ti\frac{h}{2}\Delta}\Phi_{x,v}^h$ est un paquet d'ondes dont la largeur grandit linéairement en t , centré en $x + tv$, de vitesse v .

En termes plus pédestres, l'image d'un paquet d'ondes localisé en x est un paquet d'ondes en $x + tv$, qui a un peu « bavé ». Ce théorème est le fait central sur lequel on va baser toute notre compréhension de l'équation de Schrödinger, il est donc important de bien assimiler son énoncé !

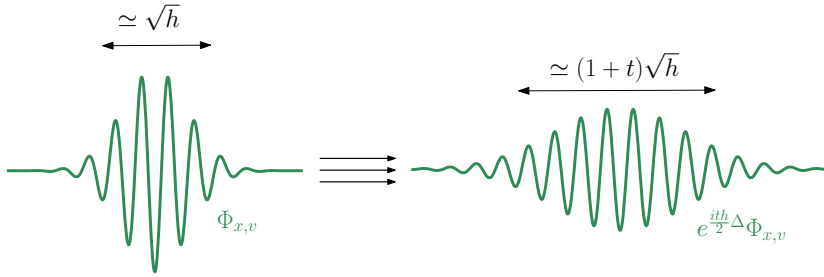


FIGURE 2.3. Évolution du paquet d'ondes $\Phi_{x,v}^h$.

Remarque 2.5. — La vitesse et la manière dont ces paquets d'ondes « bavent » caractérise le défaut de la dynamique de l'équation de Schrödinger à se comporter comme la dynamique classique. C'est dans ce phénomène de *dispersion* que réside tout le sel de l'étude de l'équation de Schrödinger, et ce qui fait que pour des temps très longs, l'évolution d'une fonction d'onde ne suit plus la dynamique classique !

L'image d'un h -paquet d'ondes n'est donc pas exactement un h -paquet d'ondes d'échelle h . Notons qu'il n'est pas important de considérer des paquets d'ondes explicites comme ceux définis ci-dessus. La propriété vraiment intéressante qu'ils nous proposent vient finalement du fait que, d'un point de vue dynamique, on peut y penser comme des points de l'espace des phases sur des échelles de temps pas trop longues.

Note pour le lecteur : Nous n'avons pas donné d'énoncé précis du théorème de propagation des paquets d'onde, car on veut insister sur le seul fait que le propagé en temps pas trop long d'un paquet d'ondes est presque encore un paquet d'ondes (peu importe, pour le moment le sens exact du mot « presque » dans cet énoncé). Sa démonstration est par ailleurs un peu technique et nous avons choisi de ne pas l'inclure ici pour nous permettre de nous concentrer sur ses conséquences.

Néanmoins, la lectrice rigoureuse trouvera un traitement complet et rigoureux (à l'échelle de ce document) de la propagation des paquets d'ondes dans l'annexe B.

2.6. Cas d'une variété riemannienne quelconque

On passe au cas d'une variété riemannienne arbitraire (M, g) . Un paquet d'ondes représentant un point $(x_0, v_0) \in TM$ dans ce contexte doit être une fonction :

- dont le support est un petit voisinage de x_0 ;
- telle que lorsqu'on zoome près de x_0 , elle ressemble à une onde plane dirigée par le vecteur v_0 .

On propose donc la définition suivante.

DÉFINITION 2.6. — *Un h -paquet d'ondes en (x_0, v_0) est la fonction*

$$\Phi_{x,v}^h := C_h x \longmapsto e^{-\frac{d(x,x_0)^2}{h}} e^{iv_0 \cdot \exp_{x_0}^{-1}(x)},$$

où $\exp_{x_0} : T_{x_0}M \longrightarrow M$ est la fonction exponentielle en x_0 .

Naturellement, comme on travaille sur une variété arbitraire il faudrait d'abord se placer dans un voisinage de carte de x_0 suffisamment grand et arrondir les angles en utilisant une fonction cut-off. Dès lors que h est suffisamment petit ça ne change pas grand-chose (le support « essentiel » de $e^{-\frac{d(x,x_0)^2}{h}}$ est une boule de rayon de l'ordre $\sqrt{h}$). Avec cette définition, le théorème de propagation des paquets d'ondes dans $\mathbb{R}^n$ se formule comme suit :

THEORÈME D'EGOROV 2.7 (Propagation des paquets d'onde sur une variété quelconque). — *Pour tout $t > 0$ pas trop grand, $e^{tih\Delta} \Phi_{x,v}^h$ est « presque » un paquet d'ondes centré en $g_t(x, v)$.*

2.7. Prenons un peu de hauteur

On définit le plongement

$$\mathcal{PO}^h : TM \longrightarrow L^2(M, \mathbb{C})$$

qui à tout point (x, v) associe $\Phi_{x,v}^h$. Pour tout h , l'image de $\mathcal{PO}_h$ définit une sous-variété de dimension finie de $L^2(M, \mathbb{C})$ difféomorphe à TM . Nous avons, au dessus de TM , deux champs de vecteurs.

- (1) Le premier est le champ de vecteur $\vec{X}_0$ définissant le flot géodésique.
- (2) Le second est le champ de vecteur $\vec{X}_h = ih\Delta$, qui n'est pas tout à fait tangent à (au plongement de) TM dans $L^2(M, \mathbb{C})$, mais presque. Cela traduit le fait que $\mathcal{PO}^h(TM)$ est « presque invariant » par le flot de Schrödinger.

Une manière de reformuler la discussion du paragraphe précédent est l'énoncé suivant.

THEORÈME D'EGOROV 2.8. — *Le champ de vecteurs $\vec{X}_h$ tend, quand h tend vers 0, vers $\vec{X}_0$.*

2.8. Temps d'Ehrenfest

Les trois énoncés du « théorème d'Egorov » qu'on vient de voir sont des énoncés qualitatifs qui nous disent en substance : pour un h fixé (qu'on pense très petit), le propagé d'un h -paquet d'ondes en (x_0, v_0) suit, à une petite erreur près, la trajectoire de la géodésique passant par (x_0, v_0) pendant un certain temps. Mais il existe un temps à partir duquel cette erreur devient insupportable !

Ce temps est communément appelé le *temps d'Ehrenfest*, et est noté $t_E(h)$. Notez bien que ce temps dépend de h !

Nous ne nous en servons pas, mais il peut être utile de quantifier la dépendance en h . Elle dépend essentiellement de la dynamique du flot géodésique. Grossièrement, c'est le temps que le flot va mettre à disperser un paquet d'ondes à l'échelle macroscopique : c'est le temps qu'il va mettre à l'étaler de telle sorte à ce que le diamètre de son image croisse de $\sqrt{h}$ à 1.

- (1) Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ (et par extension des variétés euclidiennes comme les tores plats $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$), $t_E(h) \sim \frac{1}{h}$.
- (2) Pour une variété riemannienne générique, on ne peut garantir mieux que $t_E(h) \sim \kappa |\log h|$, où κ est une constante géométrique⁽¹⁾.

Une fois de plus, nous ne donnons pas de démonstration de ce fait, croyez-nous juste sur parole :) Il faudrait pour ce faire introduire des outils qui nous permettent de calculer avec précision l'évolution des paquets d'ondes sur une variété riemannienne. Nous nous contenterons du dessin suivant.

⁽¹⁾ κ dépend directement de l'exposant de Lyapounoff maximal du flot géodésique, qui peut être contrôlé d'une manière plus ou moins satisfaisante par la courbure de M .

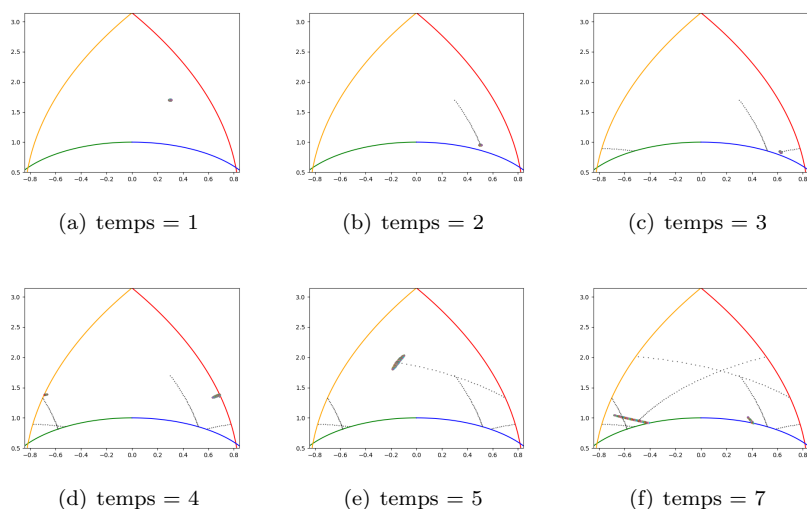


FIGURE 2.4. Le triangle à bords arrondis représente le domaine fondamental d'une surface hyperbolique à trois pointes. Les illustrations montrent la dispersion dans le temps du support d'un petit paquet d'ondes le long d'une géodésique de cette surface.

- *S* : Donc tes paquets d'ondes représentent vraiment des points de TM ! Et quand tu fais agir l'équation de Schrödinger dessus, ils se propagent presque comme si le point correspondant suivait le flot géodésique ?
- *JM* : Exactement. Y a un temps jusque auquel ce image marche, le temps d'Ehrenfest. Puis après ça part en vrille, et ils s'étalent partout de manière plus ou moins incontrôlée.
- *S* : Et l'erreur elle est petite en h ?
- *JM* : Oui, et le temps d'Ehrenfest aussi dépend de h : il tend vers l'infini quand h tend vers 0.
- *S* : Mais pourquoi les paquets d'ondes plutôt que d'autres fonctions ? Ils marchent mieux que les autres ?
- *JM* : oui et non. La forme précise des paquets d'onde a peu d'importance, ce qu'on veut c'est que quand h est petit ils se concentrent sur le point correspondant. Après ils sont assez symétriques en un sens, on en reparlera en annexe B, mais

ils sont localisés exactement autant en position et en vitesse. On passe chez le boucher en rentrant vite fait ? J'ai ma commande de joues de boeuf à aller chercher.

- *S : Oh tu fais des joues de boeuf ?*
- *JM : Ouais, c'est le beaujolais ce soir, on va fêter ça à la maison. Tu viens d'ailleurs ?*
- *S : Bah demande plutôt à une aveugle si elle veut voir ! Un peu mon con que je viens !*

3. Décomposition en paquet d'ondes.

Dans le paragraphe précédent, on a réussi à décrire la propagation par l'équation de Schrödinger d'une famille de fonctions, les paquets d'ondes. On va maintenant en déduire une description de la propagation de fonctions arbitraires.

3.1. Décomposition en paquet d'ondes

Avertissement. La décomposition qu'on présente dans ce paragraphe se base exclusivement sur l'analyse harmonique élémentaire. Elle semblera presque évidente à qui maîtrise le sujet, et probablement plus mystérieuse au lecteur moins familier avec la transformée en ondes planes (ce que certains appellent curieusement « transformée de Fourier »).

De manière informelle, le résultat qu'on va énoncer dit la chose suivante :

Toute fonction raisonnable s'écrit comme une combinaison linéaire de paquets d'ondes.

L'énoncé formel est le suivant

PROPOSITION 3.1. — *Fixons $h > 0$. On rappelle que $\Phi_{x,v}^h$ est le h -paquet d'ondes centré en $(x, v) \in TM$. Soit $\Psi \in L^2(M, \mathbb{C})$. Il existe une application $T_h(\Psi) : TM \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$\Psi = h^{-d/2} \int_{TM} T_h(\Psi)(x, v) \Phi_{x,v}^h dx dv,$$

où $d = \dim M$.

Cette écriture s'appelle une *décomposition en paquets d'ondes*. Il faut penser à $|T_h(\Psi)(x, v)|^2$ comme à la *quantité de position x et de vitesse v* contenue dans Ψ . On peut écrire ce nombre explicitement :

$$T_h(\Psi)(x, v) = h^{-d/2} \int_M \Phi_{x,v}^h(y) \overline{\Psi}(y) dy = h^{-d/2} \langle \Phi_{x,v}^h, \Psi \rangle.$$

Cette proposition n'est pas plus mystérieuse que le fait que la transformée en ondes est inversible. Remarquons que les ondes planes ne sont pas dans L^2 ce qui, de ce point de vue, ne les rend pas particulièrement naturelles. La proposition précédente nous dit que la famille engendrée par les paquets d'onde (qui sont dans L^2) est génératrice de L^2 . Le prix à payer est que la famille n'est pas libre, ce qui ne posera pas de problème pour ce qu'on veut en faire. La lectrice intéressée peut aller jeter un oeil avisé à l'annexe B, où elle constatera que cette famille est *h -libre*, au sens où les produits scalaires croisés tendent vers 0 avec h .

3.2. Propagation.

Voyons tout de suite ce que l'on peut en déduire du point de vue de la propagation d'une condition initiale générale de l'équation de Schrödinger. Repartons du flot géodésique et de l'équation de transport (2.2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = du(X)$$

qui doit se comprendre de la manière suivante : une masse de Dirac $\delta_{x,v}$ en un point $(x, v) \in TM$ est propagée par l'équation (2.2) en $\delta_{g^t(x,v)}$. Par linéarité de l'équation, et comme toute fonction s'écrit $u = \int_{TM} u(x, v) \delta_{(x,v)} dx dv$, on obtient que u_t , le propagé d'une fonction u_0 au temps t , est donné par la formule

$$u_t = \int_{TM} u_0(x, v) \delta_{g^t(x,v)} dx dv.$$

Dans le cas de l'équation de Schrödinger, on fait jouer le rôle des masses de Dirac aux paquets d'ondes. L'équation de Schrödinger étant linéaire on peut alors propager chacun des paquets d'onde pour obtenir

$$e^{it\frac{h}{2}\Delta} \Phi = h^{-d/2} \int_{TM} T_h(\Phi)(x, v) e^{it\frac{h}{2}\Delta}(\Phi_{x,v}^h) dx dv$$

Rappelons que $e^{it\frac{h}{2}\Delta}(\Phi_{x,v}^h)$ se microlocalise au voisinage de $g^t(x, v)$. En abusant un peu, on pourrait écrire

$$e^{ith\Delta}(\Phi_{x,v}^h) \sim \Phi_{g_t(x,v)}^h.$$

On voit alors, par un changement de variable (l'application g_t préservant la mesure $dx dv$) que la « densité de position et de vitesse » de $e^{it\frac{h}{2}\Delta}(\Phi)$ est donnée, au premier ordre en h , par $T_h(\Phi)(g_{-t}(x, v))$. Cela nous permet de donner un nouvel énoncé du théorème d'Egorov.

THEOREME D'EGOROV 3.2 (Évolution de la décomposition en paquets d'ondes). — *Pour tout $h > 0$ il existe un temps $T_E(h)$ telle que pour toute fonction Φ et pour tout $t \ll T_E(h)$ alors*

$$T_h(e^{it\frac{h}{2}\Delta}(\Phi)) = T_h(\Phi)(g_{-t}(x, v)) + O(h) .$$

3.3. Une fonction d'onde pensée comme une mesure sur TM

Le point de vue que nous adopterons bientôt sera de ne plus considérer des fonctions d'ondes Φ comme des éléments de $L^2(M, \mathbb{C})$, mais comme des mesures sur TM . Classiquement, on appelle *observable* une fonction $a : TM \rightarrow \mathbb{R}$. Rappelons qu'un paquet d'ondes peut être pensé comme une version ondulatoire d'un point matériel de l'espace des phases TM . Formellement, cela revient à remplacer l'espace des phases TM par l'espace de fonctions $L^2(M)$. Il paraît donc naturel d'associer à une observable classique a une observable quantique $A_h : L^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante.

- On décompose $\Psi \in L^2(M)$ en paquets d'ondes

$$\Psi = \int_{TM} T_h(\Psi)(x, v) \Phi_{(x,v)}^h dx dv ,$$

où $|T_h(\Psi)(x, v)|^2$ est la « quantité de position et de vitesse » de Ψ en (x, v) .

- Chacun de ces paquets d'onde peut-être vu comme un point de TM , et donc observé par a .
- On forme alors la moyenne pondérée pour obtenir la valeur moyenne de l'observation

$$A_h(\Psi) := \int_{TM} |T_h(\Psi)(x, v)|^2 a(x, v) dx dv .$$

L'idée sous-jacente de cette dernière étape peut être motivée en considérant l'observable $a = 1_E$, pour $E \subset TM$, et alors l'observable quantique associée donne la quantité moyenne de position et de vitesse de la fonction d'onde Ψ qui se trouve dans E .

Ceci définit une famille de mesures que l'on notera plutôt

$$\nu_h^\Psi(a) := A_h(\Psi) ,$$

afin de s'en rappeler. Faisons déjà une observation importante, qui permet de se familiariser un peu avec les objets que nous avons introduits :

Remarque 3.3. — Si la fonction d'onde Ψ est de norme L^2 égale à 1, alors ν_h^Ψ est une mesure de probabilité.

3.4. Microlocalisation

La décomposition d'une fonction d'onde Ψ en paquets d'onde permet de décrire comment cette fonction « se concentre » dans des régions de l'espace tangent, en regardant les coefficients $T_h(\Psi)(x, v)$ apparaissant dans cette décomposition. De manière équivalente, on peut considérer le support de la mesure ν_h^Ψ associée. On veut penser qu'une fonction *microlocalise* sur un ensemble $E \subset TM$ si les supports des mesures associées tendent vers E quand h tend vers 0.

Cette définition est très naturelle, mais on arrivera pas à lui faire dire quelque chose d'intéressant, en tout cas rien de plus que de regarder le support de la fonction Ψ elle-même dans M (vu comme la section nulle de TM), comme un petit calcul montrera au lecteur bien réveillé.

Ce que ce calcul dit formellement, c'est que les suites de mesures ν_h^Ψ ne sont intéressantes que si Ψ elle-même dépend du paramètre h . Intuitivement, c'est parce que la décomposition d'une fonction Ψ en h paquets d'ondes doit se faire pour Ψ oscillant à des vitesses comparables à celle des paquets d'onde (très vite quand h est très petit). Ce fait sera développé dans les grandes largeurs dans la section suivante, pour l'instant contentons nous de donner une définition correcte du concept de microlocalisation :

DÉFINITION 3.4. — Une suite de fonctions $(\Psi_h)_h$ microlocalise vers $E \subset TM$ si pour tout E_ϵ petit voisinage de E , $\nu_h^{\Psi_h}(E_\epsilon) \rightarrow 1$ quand h tend vers 0.

Un exemple nous vient immédiatement : les paquets d'onde. Ces fonctions d'onde particulières microlocalisent précisément au point (x, v) de l'espace tangent qu'elles représentent. En ce sens, le concept de microlocalisation rend précis l'intuition qu'on a voulu donner sur les paquets d'onde jusqu'ici.

On peut, en prime, donner une dernière reformulation du théorème d'Egorov avec cette notion de microlocalisation.

THEORÈME D'EGOROV 3.5 (Microlocalisation). — Soit (Ψ_h) une famille de fonctions qui microlocalisent en $(x, v) \in TM$ (qu'on pense comme des h -paquets d'ondes). Alors pour tout $t > 0$, $(e^{ith\Delta}(\Psi_h))$ microlocalise sur $g_t(x, v)$.

Note pour la lectrice. On résume encore les faits importants de ce paragraphe.

- Une fonction quelconque $u : M \rightarrow \mathbb{C}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de h -paquets d'ondes.
- Ces paquets d'onde sont les pièces élémentaires qui permettent de penser à un point de TM comme à une fonction d'onde dans $L^2(M)$. En particulier, le paquet d'ondes centré en (x, v) dans TM représente le point (x, v) .
- On choisit en général h pour que u oscille à la même échelle que des paquets d'ondes de vitesse de norme macroscopique (ie comparable à 1).
- Le propagé d'une telle fonction u par l'équation de Schrödinger au temps $t > 0$ s'obtient en superposant les paquets d'ondes de sa décomposition, en les permutant là où le flot géodésique a envoyé leurs points bases au temps t .
- La description ci-dessus reste valide jusqu'à un certain temps $t_E(h)$ (le temps d'Ehrenfest défini précédemment, qui tend vers l'infini quand h tend vers 0).

- *S : Ah, en fait ce qui est important, c'est que les paquets d'onde microlocalisent sur le point qu'il représentent.*
- *JM : Exactement ! Et ils donnent comme une base de l'espace des fonctions (d'onde). (Au Boucher) Salut Dédé, je viens pour chercher ma commande.*
- *DD : Salut Jean-Mi ! Les belles joues de boeuf, c'est ça ? Attends je vais les chercher...*
- *JM : ...et après quand tu décomposes ta fonction quelconque en paquets d'onde, tu peux voir comment elle se propage par l'équation de Schrödinger.*
- *DD : Ah je les trouvais pas, elles étaient mises au nom de PIPEAU. C'est quoi ce nom ?*

4. Les fonctions propres du laplacien

On consacre cette partie à une collection de remarques sur le laplacien et ses fonctions propres, et leur lien avec l'équation de Schrödinger.

Une fonction propre du laplacien est une fonction $\Psi \in L^2(M, \mathbb{C})$ satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Psi = \lambda \Psi$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une première remarque :

les fonctions propres du Laplacien sont exactement les orbites périodiques pour le flot de Schrödinger, le flot géodésique quantique.

On verra que considérer une fonction propre du laplacien associée à une grande valeur propre correspond en fait à faire tendre $h \rightarrow 0$, régime dans lequel on s'attend à voir ré-émerger les propriétés classiques. On peut de cette manière construire une suite de mesures $\nu_h^{\Psi_h}$, avec Ψ_h une fonction propre dont la valeur propre tend vers l'infini quand h tend vers 0, à une vitesse qu'on va expliciter dans un moment.

On verra alors que les limites quand $h \rightarrow 0$ d'une suite de mesures construites à partir de fonctions « Schrödinger périodiques » seront « flot géodésique invariantes ».

4.1. Rappels sur le laplacien

Si (M, g) est une variété riemannienne, le laplacien est un opérateur linéaire

$$\Delta : C^\infty(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

C'est un opérateur *auto-adjoint* pour le produit hermitien L^2 . On rappelle le résultat d'analyse fonctionnelle suivant.

THÉORÈME 4.1. — *Si M est compacte, il existe une base hermitienne de $L^2(M, \mathbb{C})$ de fonctions $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que*

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}$, Ψ_n est de classe C^∞ et est à valeurs réelles. On peut prendre (et on prendra toujours) $\|\Psi_n\|_{L^2} = 1$.
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta \Psi_n = \lambda_n \Psi_n$ pour une constante $\lambda_n > 0$.
- (3) La suite (λ_n) est croissante et tend vers l'infini.

La distribution des valeurs propres λ_n , quand n tend vers l'infini, est décrite par la loi de Weyl. Nous en dirons un mot en Section 6.

Note pour le lecteur. Dans la suite de cette section, on va s'intéresser à la décomposition en paquets d'onde de fonctions propres du laplacien. Il est possible que les motivations pour une telle étude ne soit pas encore complètement claires. Si tel est le cas, on invite la lectrice se sentant un petit coup de mou à aller regarder la section 5, dans laquelle les questions précises sur le laplacien qui nous motivent sont exposées de façon informelle. On pourra alors revenir à la lecture des paragraphes suivants plus sereinement.

4.2. Le jeu entre la fréquence, la vitesse et la constante de Planck h

Dans tous les problèmes que nous allons regarder par la suite ; il y a trois paramètres importants : la fréquence $\|\xi\|$ des ondes/paquets d'ondes qu'on regarde, la constante de Planck $h > 0$ et la vitesse de propagation $v \in \mathbb{R}^d$. Ces trois paramètres sont liés, et une grosse partie de ce qu'on fait est de regarder ce qui se passe à la limite

- (1) $h \rightarrow 0$
- (2) $\|\xi\| \rightarrow +\infty$
- (3) $\|v\| = 1$.

Vecteur d'onde ξ et fréquence spatiale. Lorsqu'on joue avec des ondes ou des paquets d'ondes comme on le fait ici, il y a un paramètre naturel qu'on appelle traditionnellement *vecteur d'onde*. Pour éviter toute ambiguïté, c'est le paramètre $\xi \in \mathbb{R}^d$ dans le terme $e^{i\xi \cdot x}$. Dans tous les cas, ξ est un paramètre *spatial*, qui concerne des fonctions qui *n'évoluent pas*. On appellera *fréquence (spatiale)* sa norme $\|\xi\|$.

La constante de Planck h . Quand on regarde l'équation de Schrödinger (et beaucoup d'autres choses qui vont venir après, comme les fonctions propres du laplacien, les mesures semi-classiques, etc) il y a un paramètre (*qui est souvent implicite!*) qui est le paramètre h . C'est un petit paramètre qui permet d'ajuster les *longueurs d'ondes* qu'on veut observer ! On s'explique.

Rappelons que si l'on considère une onde plane de vecteur d'onde ξ , elle se propage à vitesse $h\xi$:

Plus h est petit, plus il faut que la fréquence de l'onde/paquet d'ondes soit grande pour que l'onde se propage à vitesse macroscopique (disons $\|v\| = 1$).

De manière équivalente, si on se donne une onde de très grande fréquence, il faut prendre h très petit pour qu'elle ne se propage pas trop vite !

C'est la vitesse qu'on veut fixer ! On a l'équation

$$(4.1) \quad \boxed{v = h \xi}$$

Dans les problèmes qu'on va rencontrer, ce qui va se passer en pratique c'est qu'on partira de fonctions (comme des paquets d'ondes par exemple) qui auront des vecteurs d'onde caractéristiques ξ . Ce qu'on fera (souvent de manière implicite), c'est *choisir* h de l'ordre de $\frac{1}{\|\xi\|}$ de telle sorte à ce que la norme de la vitesse de propagation soit toujours de l'ordre de 1.

Tout ça explique pourquoi, depuis le début, on a écrit les ondes planes et la partie oscillante des paquets d'onde sous la forme

$$e^{i\frac{v}{h}x} \text{ au lieu de } e^{i\xi x} !$$

L'exemple le plus important sera donné par les fonctions propres du laplacien, *i.e.* les fonctions satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Psi = \lambda \Psi.$$

Une telle fonction correspond à des fréquences de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$ car prendre le laplacien correspond à dériver deux fois (on reviendra sur ce fait plus précisément à l'aide des paquets d'ondes dans le paragraphe suivant). Ainsi, lorsqu'on regarde une telle fonction, on fixera implicitement

$$h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

C'est une importante gymnastique à laquelle est bon de s'habituer !

4.3. Fonctions propres, fréquence et paquets d'ondes

On dispose d'une famille de fonctions d'ondes Ψ_n qui sont les fonctions propres pour les valeurs propres λ_n sous l'action du laplacien. On discute ici des propriétés de microlocalisation de telles fonctions.

Pour cela, on commence par regarder comment le laplacien agit sur les paquets d'onde. Un calcul explicite donne

$$(4.2) \quad \Delta \Phi_{x,v}^h = \frac{\|v\|^2}{h^2} \Phi_{x,v}^h + o(h^{-2}).$$

Par ailleurs, bien sûr,

$$(4.3) \quad \Delta \Psi_n = \lambda_n \Psi_n.$$

On écrit alors la décomposition de Ψ_n en paquet d'onde, cela donne

$$\Psi_n = h^{-d/2} \int_{TM} T_h(\Psi_n)(x, v) \Phi_{x,v}^h dx dv.$$

En faisant agir le laplacien sur cette equation, et en utilisant (4.2) et (4.3), on voit (en pipeautant un peu) que les coefficients $T_h(\Psi_n)(x, v)$ doivent être des $O(h)$, quand $\|v\|^2$ est « loin » de $h^2\lambda_n$. Ce n'est rien d'autre qu'une version 'à h -près' de l'énoncé qui garantit que deux fonctions propres (de valeurs propres différentes) d'un opérateur auto-adjoint (le laplacien chez nous) sont orthogonales. Ceci a deux implications majeures :

- (1) Pour bien visualiser cette décomposition quand h tend vers 0, il vaut mieux considérer des suites de fonctions propres Ψ_n telles que $h^2\lambda_n$ converge vers un réel $c > 0$.
- (2) Dans cette situation, les coefficients $T_h(\Psi_n)$ qui contribuent pour des h petits, sont localisés autour de $S^{\sqrt{c}}M = \{(x, v) \in TM \mid \|v\|^2 = c\}$.

En particulier quand $h^2\lambda_n$ tend vers 1, les fonctions propres du laplacien *microlocalisent sur le fibré unitaire tangent* SM . On fait donc la normalisation suivante

$$h = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Motivés par ces observations, par la suite nous considérerons uniquement les mesures $\nu_h^{\Psi_n}$ associées à des fonctions propres du laplacien.

4.4. Mesures associées aux fonctions propres et mesures semi-classiques

On termine cette section sur un paragraphe pipeaumontant un résultat structurel non-trivial sur les valeurs d'adhérence de la suite $\nu_h^{\Psi_n}$.

PROPOSITION 4.2. — *Avec la normalisation $h^2\lambda_n = 1$, les valeurs d'adhérence des mesures $\nu_h^{\Psi_n}$ associées aux fonctions propres Ψ_n sont des mesures de probabilité sur SM invariantes par le flot géodésique.*

On a déjà vu que le support de $\nu_h^{\Psi_n}$ micro-localise sur SM .

Un théorème classique d'analyse fonctionnelle (Banach–Alaoglu) dit que l'ensemble des mesures de probabilités sur un compact est faiblement compact. En pipeautant un peu, on déduit que les suites $\nu_h^{\Psi_n}$ ont des valeurs d'adhérences, qui sont donc des mesures de probabilité sur SM .

Montrons que ces limites sont invariantes par le flot géodésique g^t , en effet on a :

$$\begin{aligned}\nu_h^{\Psi_n}(a \circ g^t) &= h^{-d} \int_{TM} a \circ g^t(x, v) |T_h(\Psi_n)(x, v)|^2 dx dv \\ &= h^{-d} \int_{TM} a(x, v) |T_h(\Psi_n)(g_{-t}(x, v))|^2 dx dv\end{aligned}$$

On rappelle maintenant le résultat sur la propagation des paquets d'onde étudiée en § 2.5 : la quantité de vitesse et de position $|T_h(\Psi_n)(g_t(x, v))|^2$ est « presque » (à $O(h)$ près) la quantité de position est de vitesse de la solution au temps t de l'équation de Schrödinger de condition initiale Ψ_n .

Comme le propagateur de Schrödinger $e^{it\frac{h}{2}\Delta}$ est un opérateur unitaire, et que Ψ_n est une fonction propre aussi pour cet opérateur, on en déduit que

$$|T_h(\Psi_n)(g_t(x, v))|^2 = |T_h(\Psi_n)(x, v)|^2 + O(h) .$$

En particulier on a montré que les mesures $\nu_h^{\Psi_n}$ sont « presque » (à $O(h)$ près) invariantes par le flot géodésique.

DÉFINITION 4.3. — *Les mesures semi-classiques sont les mesures limites obtenues en considérant les valeurs d'adhérence des $\nu_h^{\Psi_n}$, quand $h^2\lambda_n$ tend vers 1. Ces mesures sont invariantes par le flot géodésique.*

Note pour le lecteur. On résume encore les faits importants de ce paragraphe.

- Les fonctions propres du laplacien (vérifiant l'équation $\Delta\Psi = \lambda\Psi$) sont, de par l'équation différentielle qu'elles satisfont, des fonctions qui oscillent à une fréquence $\sqrt{\lambda}$.
- Si on veut les décomposer en paquets d'ondes, on fait la normalisation pratique $h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, de telle sorte qu'un paquet d'ondes de vitesse v avec $\|v\| \sim 1$ oscille à la même fréquence que Ψ .
- Si λ est très grand, Ψ micro-localise sur le fibré *unitaire* tangent de M (grâce à la normalisation $h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$).
- Enfin, les mesures associées à Ψ via la décomposition en paquet d'ondes (supportées sur un petit voisinage du fibré unitaire tangent) sont presque invariantes par le flot géodésique.

— *S : Du coup, une fois que t'as décomposé ta fonction en paquets d'onde, tu peux lui associer une mesure, qui permet « d'observer » ton système quantique. Elle mesure combien ta fonction*

est concentrée en position et en vitesse, dans la base des paquets d'onde.

- *JM : voilà. Et si tu prends des fonctions d'onde spéciales, qui sont des fonctions propres pour le laplacien tu obtiens une suite de mesures, dont les limites ont la propriété magique qu'elles sont invariantes par le flot géodésique. Ce sont ce qu'on appelle les limites semi-classiques.*

Donc tu vois là, t'as bien fait revenir les joues, et maintenant tu les déglaces, tu les mets dans la grande cocotte avec oignons, carottes, vin rouge, et tu laisses mijoter doucement toute l'après-midi.

- *S : Ah on est pas prêts de bouffer...On s'en jette un pour patienter ?*

5. Des bonnes questions

Il nous semble être arrivé à un moment opportun pour clarifier les raisons pour lesquelles on s'intéresse à l'équation de Schrödinger. Il y a deux points de vue qu'on peut adopter.

- L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles importante en soit, car c'est l'équation de base de la mécanique quantique. Cela en fait donc un objet d'étude mathématique important. Il n'est cependant pas clair que cette justification convainque grand-monde, car nous ne savons pas quelles sont les questions mathématiques à poser à l'équation de Schrödinger qui nous renseignent sur la physique. On ne prétend pas que ces questions n'existent pas, nous admettons juste ne pas les connaître !
- L'étude de l'équation de Schrödinger est un outil d'étude pour analyser des objets plus « simples » (ou plus naturels d'un point de vue géométrique), dont l'étude est déjà bien motivée. Ces objets existent et sont les *fonctions propres du laplacien*.

On adopte le temps d'une petite digression le second point de vue. On demande donc à notre lecteur d'oublier l'espace de quelques paragraphes qu'on a déjà parlé d'équation de Schrodinger.

5.1. Fonctions propres du laplacien à haute fréquence

On partira donc de l'axiome (qu'on ne cherchera pas à justifier) que la question suivante est intéressante.

À quoi ressemble une fonction propre du laplacien (c'est à dire une fonction Ψ_λ vérifiant $\Delta\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sur une variété riemannienne/un domaine à bord de $\mathbb{R}^d$, pour des valeurs propres λ très grandes ?

La question « à quoi ressemble une fonction propre du laplacien ? » est elle-même assez vague et admet un certain nombre de spécifications complémentaires. On peut par exemple se demander à quoi ressemble son module, ou alors étudier le lieu où elle s'annule. Une première possibilité est l'étude, pour Ψ_λ une fonction propre du laplacien sur une variété riemannienne (M, g) , de la mesure

$$|\Psi_\lambda|^2 d\mu_g(x)$$

où μ_g est la mesure riemannienne (on normalise Ψ_λ dans $L^2(M, \mu_g)$ de telle sorte à ce que $|\Psi_\lambda|^2 d\mu_g(x)$ soit une mesure de probabilité). Une première manière de décrire les fonctions propres du laplacien dans la limite pour des grandes valeurs propres est donc de répondre à la question suivante :

Quelles sont les mesures de probabilité sur M qui apparaissent comme limites faibles de mesures de la forme

$$|\Psi_\lambda(x)|^2 d\mu_g(x)$$

quand $\lambda \rightarrow +\infty$?

L'approche qui va s'avérer fructueuse (en cela qu'elle va permettre de faire le lien entre cette question et le flot géodésique) est de considérer la mesure provenant de la décomposition en paquets d'onde d'une fonction propre $\Psi_\lambda = \Psi$ (au lieu de regarder directement la mesure « visuelle » $|\Psi_\lambda(x)|^2 d\mu_g(x)$ qui est celle qui nous intéresse). Si Ψ est une fonction propre du laplacien, on regarde ν_h^Ψ la mesure de probabilité sur TM définie en section 3.3, pour h de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$. Comme le poussé en avant de ν_h^Ψ est à peu près égal à $|\Psi_\lambda|^2 d\mu_g$, comprendre cette mesure ν_h^Ψ (à priori plus compliquée) nous permettra de comprendre $|\Psi_\lambda|^2 d\mu_g$. On pose donc la question suivante :

Quelles sont les mesures de probabilité sur TM qui apparaissent comme limites de mesures associées aux valeurs propres du laplacien ?

L'intérêt d'une telle reformulation vient de la discussion de la section précédente, qui nous aura convaincu que de telles mesures sont invariantes par le flot géodésique, ce qui nous permet déjà de découvrir des restrictions.

Petite pause. On illustre la puissance de ce point de vue par le petit exemple suivant. On peut se demander la chose suivante : *est-ce qu'une fonction propre du laplacien de grande valeur propre peut être très concentrée dans une petite boule ?*

La réponse est non, car il est facile de vérifier qu'il n'y a pas de mesure invariante par le flot géodésique qui se projette sur une petite boule dans M . C'est un micro-résultat non-trivial qu'on aurait eu du mal à démontrer sans la profonde connexion qu'on a établie entre la dynamique du flot géodésique et l'équation de Schrödinger.

5.2. Mesures semi-classiques

Si de plus on a fait la bonne normalisation $h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme on l'a vu précédemment, les mesures semi-classiques introduites en section précédente ont pour support le fibré *unitaire* tangent SM . On peut donc prendre toutes ces questions dans l'autre sens.

Soit μ une mesure de probabilité sur SM invariante par le flot géodésique. Est-ce que μ a une chance d'apparaître comme mesure « semi-classique » ?

Dans le cas d'une variété riemannienne arbitraire, il vient au géomètre deux exemples « évidents » de mesures invariantes par le flot géodésique :

- la mesure dite de Liouville, qui se construit simplement comme le produit de la mesure riemannienne sur la base avec la mesure de la sphère ronde dans les fibres (et qui joue le rôle d'une mesure de Lebesgue) ;
- les mesures supportées par des géodésiques fermées (induites par les paramétrisations par longueurs d'arc).

Il existe, en fonction de la variété riemannienne, d'autres mesures invariantes qui peuvent s'avérer assez compliquées (de nature fractale par exemple pour les variétés à courbure strictement négative). On laisse ces mesures de côté pour l'instant, et on se pose les questions « de base » suivantes :

- (1) Soit γ une géodésique fermée sur M . Existe-t-il une suite de fonctions propres du laplacien Ψ_i tel que les mesures $|\Psi_i|^2 d\mu_g$ convergent faiblement vers une mesure supportée par γ ?
- (2) Au contraire, existe-t-il une suite de fonctions propres du laplacien Ψ_i tel que les mesures $|\Psi_i|^2 d\mu_g$ convergent faiblement vers μ_g la mesure riemannienne ?
- (3) (version fibré tangent de la question précédente) existe-t-il une suite de fonctions propres du laplacien Ψ_i tel que les mesures $\nu_h^{\Psi_i}$ (qui sont maintenant des mesures de probabilités sur le fibré tangent) convergent faiblement vers la mesure de Liouville ?
- (4) Existe-t-il une suite de fonction propres du laplacien Ψ_i tel que les mesures $|\Psi_i|^2 d\mu_g$ (respectivement $\nu_h^{\Psi_i}$) convergent faiblement vers une mesure qui n'est ni supportée par des orbites périodiques, ni la mesure riemannienne (respectivement Liouville) ?

Il existe très peu de variétés pour lesquelles on peut calculer explicitement les fonctions propres du laplacien et pour lesquelles on peut tenter de répondre à ces questions « à la main ». Il y a cependant deux exemples algébriques pour lesquelles on peut partiellement répondre à un certain nombre de questions, qui sont le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et la sphère ronde $\mathbb{S}^2$. On les regarde maintenant d'un peu plus près.

5.3. Le tore plat

Par définition, le tore plat de dimension 2 est le quotient $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, muni de la métrique plate.

Fonctions propres du laplacien. Dans ce cas, on connaît des exemples explicites de fonctions propres du laplacien. Si on prend $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$u_{\vec{n}}: \vec{x} \longmapsto e^{i\vec{n} \cdot \vec{x}}$$

qui est une *fonction propre du laplacien de valeur propre $\|\vec{n}\|^2$* . Cette famille forme en fait une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^2, \mu_g)$. En particulier, on peut reconstruire toute fonction propre comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de $u_{\vec{n}}$.

Le flot géodésique. On rappelle quelques faits sur le flot géodésique du tore plat, qui sont importants pour la compréhension de cet exemple.

- Le fibré tangent de $\mathbb{T}^2$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.
- Chaque ensemble de la forme $\mathbb{T}^2 \times \{\vec{v}\}$ est invariant par le flot géodésique.

- La restriction du flot géodésique à $\mathbb{T}^2 \times \{\vec{v}\}$ est égale au flot linéaire du champ de vecteur constant $\vec{v}$.
- Si les composantes du vecteur $\vec{v}$ sont irrationnelles, le flot géodésique restreint à la sous-variété invariante $\mathbb{T}^2 \times \{\vec{v}\}$ est *minimal*⁽²⁾ et *uniquement ergodique*⁽³⁾

Des limites semi-classiques. On fait maintenant quelques remarques qui répondent à certaines des questions posées à la fin du paragraphe 5.1.

- Pour tout $\vec{n}$, $|u_{\vec{n}}| \equiv 1$, la suite $|u_{\vec{n}}|^2 d\mu_g$ est donc constante égale à μ_g et en particulier la mesure riemannienne est une limite de fonctions propres du laplacien.
- Pour un $\vec{n}$ donné et $h = \frac{1}{\|\vec{n}\|}$, le produit scalaire

$$\langle u_{\vec{n}}, \Phi_{x,v}^h \rangle$$

est non-négligeable si et seulement si $\vec{v} \sim \frac{-\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, où $\Phi_{x,v}^h$ est un h -paquet d'ondes en $\vec{x}$ de vitesse $\vec{v}$. Les mesures $\nu_h^{u_{\vec{n}}}$ tendent donc à se localiser sur les tores invariants

$$\mathbb{T}^2 \times \left\{ \frac{-\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\} \subset S\mathbb{T}^2$$

qui sont bien invariants par le flot géodésiques.

- Il ne semble pas évident de construire des suites de fonctions propres qui se concentrent sur des orbites périodiques !

5.4. La sphère ronde $\mathbb{S}^2$

On passe maintenant à notre deuxième exemple explicite, la sphère ronde $\mathbb{S}^2$ définie par

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

munie de la métrique induite par $\mathbb{R}^3$.

Il est possible de complètement décrire les fonctions propres du laplacien de $\mathbb{S}^2$ de manière explicite : c'est la théorie des harmoniques sphériques. Cela consiste à écrire l'équation

$$\Delta u = \lambda u$$

(2) Un flot est minimal si toute trajectoire est dense. Les flots minimaux sont assez rares en général car ils n'ont pas d'orbites périodiques.

(3) Un flot est uniquement ergodique si il n'a qu'une seule mesure de probabilité invariante.

en coordonnées sphériques (θ, φ) et à réduire l'équation aux valeurs propres en un certain nombre d'équations différentielles ordinaires qu'on sait résoudre. On ne va pas refaire tous ces calculs, mais on en donne une conséquence : il existe des fonctions propres de la forme

$$u(\theta, \varphi) = f(\theta)e^{in\varphi}$$

pour tout $n \geq 0$. Il est de plus possible de choisir f très proche d'une masse de Dirac en 0, de telle sorte que $|u(\theta, \varphi)|^2$ n'est grande que lorsque $\theta = 0$. Le lieu

$$\{(\theta, \varphi) \in \mathbb{S}^2 \mid \theta = 0\}$$

est une géodésique fermée simple. Cela nous permet donc, en faisant tendre n vers l'infini et f vers une masse de Dirac, d'établir le résultat suivant

Il existe une suite de fonctions propres (Ψ_i) du laplacien pour $\mathbb{S}^2$ telle que la limite faible des mesures

$$|\Psi_i|^2 d\mu_g$$

est supportée par une orbite périodique !

On peut montrer à l'aide des harmoniques sphériques (on ne fait pas le calcul ici mais c'est assez direct) qu'il existe aussi des suites (Ψ_i) pour lesquelles $|\Psi_i|^2 d\mu_g$ converge faiblement vers la mesure riemannienne.

5.5. Surfaces hyperboliques

On termine par un dernier petit paragraphe sur les surfaces hyperboliques, qui forment une importante classe d'exemples, et qui peuvent être explicites (il est possible d'écrire la métrique de certains exemples explicitement en terme de fonctions usuelles, et théoriquement possible de trouver des exemples explicites de fonctions propres du laplacien comme on l'a fait pour $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^2$). Il n'est pas clair qu'on puisse cependant en déduire des limites de mesures associées aux fonctions propres du laplacien de manière à répondre à aucune des questions posées à la fin du paragraphe 5.1.

Le premier résultat profond de l'approche développée dans ce texte (l'utilisation de l'équation de Schrödinger et du lien avec la dynamique classique pour étudier le laplacien) sera de décrire certaines limites des mesures associées aux fonctions propres dans le cas des surfaces hyperboliques, sans passer par aucune description explicite. C'est le théorème 7.4, appelé *théorème d'ergodicité quantique*.

- *S : Donc avec tes conneries là, tu peux retrouver des résultats sur la distribution des fonctions propres du laplacien sur des surfaces hyperboliques ? Mais c'est hyper stylé en fait !*
- *JM : Ben ouais, pourquoi tu crois que je m'emmerde avec ça ? C'est pas juste pour faire plaisir à Fréduche hein. L'autre fois je lui ai dit que je pensais avoir compris un nouveau truc sur les mesures semi-classiques exceptionnelles pour l'application du chat, tu sais ce qu'il m'a répondu ?*
- *S : Hmm, un truc du genre : « Ah oui, d'accord !?! »*
- *JM : Hahaha exactement !*

6. Localisation des fonctions propres en moyenne : lois de Weyl.

Dans ce paragraphe nous allons expliquer, dans le degré de rigueur propre à l'ensemble de ce texte, obtenir des énoncés sur la répartition des fonctions propres *prises dans leur ensemble*, et de leurs mesures semi-classiques associées : les lois de Weyl.

Précisément

- la loi de Weyl « classique » donne l'asymptotique du nombre de fonctions propres du laplacien de valeurs propres plus petites qu'une certaine constante ;
- la loi de Weyl « locale » dit en substance que la moyenne des mesures micro-locales des fonctions propres du laplacien est à peu près égale à la mesure de Liouville sur TM .

Un autre point important à propos des lois de Weyl : ce sont des énoncés *statiques*, ils ne s'appuient pas sur la dynamique de l'équation de Schrödinger mais juste sur des considérations géométriques.

6.1. Loi de Weyl classique

étant donnés deux réel $0 \leq a \leq b$ on note

$$N_{a,b}(h) := \#(\sigma(h^2\Delta) \cap [a, b])$$

le nombre de valeurs propres de l'opérateur $h^2\Delta$ dans la fenêtre $[a, b]$, c'est-à-dire qu'on compte les valeurs propres du laplacien dans la fenêtre $[a/h^2, b/h^2]$. Comme la notation le suggère, on pense à $N_{a,b}(h)$ comme à une fonction de la variable h , a et b étant fixés.

On notera par $\mathcal{L}$ la mesure de Liouville, c'est la mesure lisse naturelle que l'on peut mettre sur le fibré unitaire tangent d'une variété, celle que l'on note $dx dv$ dans toutes les intégrales depuis le début de ce texte.

THÉORÈME 6.1 (Loi de Weyl). — *Si M est une variété riemannienne compacte de dimension d , alors*

$$(6.1) \quad N_{a,b}(h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} h^{-d} \cdot \mathcal{L} \left(\{ (x, v) \in TM, a \leq \|v\|^2 \leq b \} \right).$$

L'énoncé plus standard de la loi de Weyl est le suivant. On prend $a = 0$, $b = 1$ et en posant $E = h^{-2}$ on obtient

$$\#(\sigma(\Delta) \cap [0, E]) \underset{E \rightarrow \infty}{\sim} E^{d/2} \cdot \omega_d \cdot \text{vol}(M)$$

où $\sigma(\Delta)$ est le spectre du laplacien, ω_d est le volume d'une boule euclidienne de dimension d , qui correspond à la partie fibre de l'espace tangent, et où $\text{vol}(M)$ est le volume de la variété M , qui correspond à la base.

On laissera le lecteur se convaincre *a priori* de cette asymptotique en examinant le cas du cercle.

Afin de pipeaumontrer cet énoncé, reprenons le point de vue des paquets d'ondes. Rappelons qu'un paquet d'ondes $\Phi_{x,v}^h$ est l'analogue quantique du point (x, v) de l'espace des phases classique TM . Une première différence notable est que le paquet d'ondes n'est pas exactement localisé au voisinage de (x, v) mais qu'il occupe, en gros, un $h^{1/2}$ -voisinage de (x, v) . On va faire les deux approximations suivantes

- (1) deux paquets d'ondes basés en deux points de TM à distance $h^{1/2}$ sont orthogonaux ;
- (2) Si $\mathcal{D}_h$ est un ensemble $h^{1/2}$ -dense du fibré unitaire tangent, c'est-à-dire que tout point de TM est $h^{1/2}$ proche d'un point de $\mathcal{D}_h$, alors la famille des paquets d'ondes centrée en $\mathcal{D}_h$ est génératrice.

Pour estimer $N_{a,b}(h)$ on va, de manière équivalente, estimer la dimension de l'espace vectoriel de fonctions propres suivant

$$\mathcal{FP}_h := \text{Vect} \{ \Psi_\lambda, a \leq h^2 \lambda \leq b \}.$$

Et pour ce faire, on va utiliser la famille des paquets d'ondes centrés au point de la discrétisation $\mathcal{D}_h$ de TM . On note

$$\mathcal{PO}_h := \text{Vect} \{ \Phi_{x,v}^h, (x, v) \in \mathcal{D}_h \text{ et } a \leq \|v\|^2 \leq b \}$$

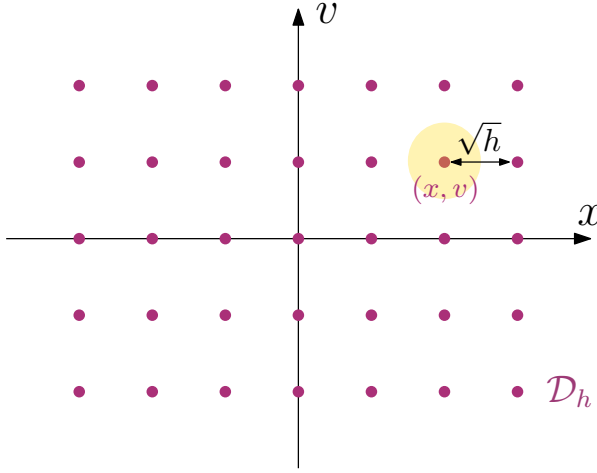


FIGURE 6.1. Le fibré tangent discrétisé

l'espace engendré par les paquets d'ondes centrés en des points de $\mathcal{D}_h$ dans la couche $a \leq \|v\|^2 \leq b$. Notons que

$$\dim(\mathcal{PO}_h) = \#(\mathcal{D}_h \cap \{a \leq \|v\|^2 \leq b\}) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} h^d \cdot \mathcal{L}(\{(x, v) \in TM, a \leq \|v\|^2 \leq b\}),$$

qui correspond au membre de gauche de l'égalité (6.1) apparaissant dans la conclusion du Théorème 6.1. On se retrouve alors avec deux espaces vectoriels de dimension finies, $\mathcal{FP}_h$ et $\mathcal{PO}_h$, le premier qui a la dimension du membre de gauche de l'équation (6.1) alors que le deuxième a, par définition, la dimension du membre de droite. On voudrait donc conclure en montrant que ces deux espaces vectoriels sont en fait assez proches pour avoir même dimension.

La clef pour le montrer est (4.2), que l'on rappelle ici :

$$h^2 \Delta \Phi_{x,v}^h = \|v\|^2 \Phi_{x,v}^h + o(1).$$

Cette identité implique que les paquets d'ondes sont presque des fonctions propres et donc presque orthogonaux aux fonctions propres correspondant à une autre valeur propre. En particulier les paquets d'ondes

- (1) dont les centres ne sont pas dans la couche $\{(x, v) \in TM \mid a \leq \|v\|^2 \leq b\}$ sont (quasiment) orthogonaux à $\mathcal{FP}_h$.
- (2) dont les centres sont dans la couche $\{(x, v) \in TM \mid a \leq \|v\|^2 \leq b\}$ sont (quasiment) dans $\mathcal{FP}_h$ car on a fait l'hypothèse que l'ensemble

des paquets d'onde centrés en des points de $\mathcal{D}_h$ forment une partie génératrice.

On en déduit que les deux espaces vectoriels $\mathcal{FP}_h$ et $\mathcal{PO}_h$ sont presque de même dimension, pour h très petit.

6.2. Loi de Weyl locale

La loi de Weyl locale est un énoncé qui décrit très partiellement les mesures $\nu_h^{\Psi_i}$. On rappelle que $\nu_h^{\Psi_i}$ est la mesure microlocale définie via la décomposition en paquets d'onde de Ψ_i (voir le paragraphe 3.3). Très grossièrement, la loi de Weyl locale dit la chose suivante (voir le théorème 6.2 pour un énoncé rigoureux)

$$h^d \sum_i \nu_h^{\Psi_i} = \mathcal{L}$$

en d'autres termes la moyenne des mesures microlocales des fonctions propres du laplacien est égale à la mesure de Liouville de TM .

L'idée derrière la loi de Weyl locale. Le principe général est le mécanisme suivant : si $f_1, \dots, f_m$ et $g_1, \dots, g_m$ sont deux familles orthonormées de fonctions de $L^2(M, \mathbb{C})$ engendrant le même espace vectoriel, alors les moyennes respectives de leurs mesures microlocales sont égales

$$\frac{1}{m} \sum_i \nu_h^{f_i} = \frac{1}{m} \sum_i \nu_h^{g_i}.$$

Ce principe général, appliqué aux fonctions propres du laplacien d'un côté et aux paquets d'onde de l'autre, est le cœur de la loi de Weyl locale. Il se pipeaumontre en fait assez facilement, de la façon suivante. On a toujours :

$$(6.2) \quad h^d \sum_{\lambda_j} \nu_h^{\Psi_j}(a) = \int_{TM} a \, d\mathcal{L}.$$

En effet, par définition

$$h^d \sum_{\lambda_j} \nu_h^{\Psi_j}(a) = \int_{TM} a(x, v) \sum_{\lambda_j} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 \, d\mathcal{L}$$

mais comme $(\Psi_n)_n$ est une base Hilbertienne, $\sum_{\lambda_j} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 = \|\Phi_{x,v}^h\|^2 = 1$. La loi de Weyl locale n'est rien d'autre qu'une version « coupée en fréquence » de la remarque ci-dessus.

THÉORÈME 6.2 (Loi de Weyl locale). — Soient $(\Psi_n)_n$ une base de fonctions propres du laplacien, $a : TM \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on a

$$h^d \sum_{\lambda_j \leq 1/h^2} \nu_h^{\Psi_j}(a) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{B^1 M} a \, d\mathcal{L}$$

où $B^1 M = \{(x, v) \in TM \mid \|v\| \leq 1\}$ et $\mathcal{L}$ est la mesure de Liouville

On pourrait pipeaumontre ce théorème à la manière dont on l'a fait pour la loi de Weyl (non locale) mais on ne le fera pas. Il nous semble intéressant de comparer l'argument un peu plus rigoureux qui suit à la pipeaumonstration proposée plus haut.

Commençons par se convaincre que cet énoncé est plus fort que celui de la loi de Weyl. On peut en effet déduire la loi de Weyl en partant de la loi de Weyl locale : en prenant $a = 1$ on obtient que

- le membre de droite de la loi de Weyl locale s'identifie alors avec le membre de droite de celui de la loi de Weyl. En effet, le volume pour la mesure de Liouville du fibré en boule vaut bien le volume riemannien de la base fois le volume de la fibre, c'est à dire le volume d'une boule euclidienne de rayon 1.
- Pour les membres de gauche, on doit se rappeler que pour toute fonction $\Psi \in L^2(M)$ de norme unité et pour tout h , ν_h^Ψ est une mesure de probabilité : on ne somme alors que des 1, et cela autant de fois qu'on voit une valeur propre du laplacien dans l'intervalle $[0, h^{-2}]$.

Revenons à la loi de Weyl locale. En pratique, on va justifier que pour restreindre l'intégrale qui apparaît dans le membre de droite de (6.2) au sous ensemble $\{a \leq \|v\|^2 \leq b\}$ de TM , il suffit de ne considérer que les valeurs propres qui correspondent à des fréquences/vitesse dans l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire

$$\frac{a}{h^2} \leq \lambda_j \leq \frac{b}{h^2} ,$$

le lecteur dépassé pourra se retourner vers la section 4.2.

Venons en au fait, par définition :

$$h^d \sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} \nu_h^{\Psi_j}(a) = \int_{TM} a(x, v) \sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 d\mathcal{L} .$$

On va alors scinder l'intégrale en deux, l'une portant sur $\{a \leq \|v\|^2 \leq b\}$ et l'autre sur son complémentaire noté $\{a \leq \|v\|^2 \leq b\}^c$.

$$\begin{aligned}
 (6.3) \quad & h^d \sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} \nu_h^{\Psi_j}(a) \\
 &= \int_{\{a \leq \|v\|^2 \leq b\}} a(x, v) \sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 d\mathcal{L} \\
 &\quad + \int_{\{a \leq \|v\|^2 \leq b\}^c} a(x, v) \sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 d\mathcal{L} .
 \end{aligned}$$

Rappelons, une fois encore, que les paquets d'ondes sont quasiment des fonctions propres pour le laplacien de valeur propre $\|v\|^2/h^2$. En particulier la décomposition d'une telle fonction (quasi) propre sur une famille de vecteurs propres de valeurs propres différentes doit être (quasi) nulle. En pratique si

$$\|v\|^2 \notin \{a \leq \|v\|^2 \leq b\}$$

alors la somme

$$(6.4) \quad \sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 ,$$

ce qui montre que la deuxième intégrale dans (6.3) tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$. Pour conclure, il nous faut encore montrer que si $a \leq \|v\|^2 \leq b$ alors

$$\sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 .$$

C'est le même argument que celui utilisé pour (6.4). En effet, rappelons que $(\Psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne et donc

$$1 = \sum_{\lambda_j} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 = \sum_{a/h^2 \leq \lambda_j \leq b/h^2} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 + O(h) ,$$

le $O(h)$ correspondant au fait que si $a \leq \|v\|^2 \leq b$ alors

$$\sum_{\lambda_j \notin [a/h^2, b/h^2]} |\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi_j \rangle|^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 .$$

- *S : Trop bien ce pipeau sur la loi de Weyl! En fait c'est juste écrire deux bases différentes du même espace vectoriel, et passer à la limite.*
- *JM : Attends, je te fais le pipeau final sur l'ergodicité quantique.*
- *S : Trop cool! (Biiiiip) Attends ça sonne ?*

- *JM : Ouais merde ça y est ils arrivent pour bouffer. Bon en deux mots alors : l'ergodicité quantique se prouve en deux minutes avec un argument de convexité et Weyl locale.*
- *S : Je vois pas là.*
- *JM : va ouvrir je vais vérifier si c'est cuit, en je te raconte la preuve en cuisine.*

7. Le théorème d'ergodicité quantique

Dans le dernier chapitre de ce texte on démontre un premier résultat important montrant la puissance de l'approche développée dans ce texte. En combinant les deux ingrédients suivants

- la *loi de Weyl locale*,
- l'*invariance des mesures semi-classiques par le flot géodésique*, obtenue grâce à notre analyse de l'équation de Schrödinger ;

on va pipeaumontre le résultat suivant sur les valeurs propres du laplacien des variétés de courbure négative.

THEOREME D'ERGODICITE QUANTIQUE. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative et soit $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de fonctions propres de son laplacien. Il existe alors une sous-suite $(\Psi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de densité 1 de fonctions propres du laplacien telles que les mesures*

$$|\Psi_{n_k}|^2 d\mu_g$$

convergent faiblement vers la mesure riemannienne μ_g .

En fait, et comme nous allons le voir dans la pipeaumonstration, la bonne hypothèse pour ce théorème n'est pas que M soit à courbure strictement négative mais que son flot géodésique soit *ergodique* pour sa mesure de Liouville (ce qui est le cas pour les variétés négativement courbées). On a tout de même préféré énoncer le théorème avec une hypothèse géométrique pour qu'on voie de suite qu'il s'applique à des cas importants, comme les surfaces hyperboliques.

Avertissement. L'essentiel de ce chapitre demande une connaissance raisonnable de la notion d'ergodicité en systèmes dynamiques.

7.1. Des rappels de dynamique et théorie ergodique

On rappelle rapidement quelques notions, plus pour fixer les notations qu'autre chose.

Soit (M, g) une variété riemannienne, on note $(g_t)_{t \in \mathbb{R}} : TM \longrightarrow TM$ son flot géodésique. Le flot géodésique laisse invariant le fibré unitaire tangent de $SM \subset TM$. Finalement, la mesure dite de *Liouville* sur SM (qu'on a déjà croisée) qui est le produit de la mesure riemannienne dans la base avec la mesure naturelle dans les fibres qui sont des sphères rondes, est *invariante* par le flot géodésique⁽⁴⁾.

Soit μ une mesure de probabilité sur SM , invariante par le flot géodésique. On dit que μ est *ergodique* (pour le flot géodésique) si pour tout ensemble mesurable A invariant par g_t pour tout t , on a forcément

$$\mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1.$$

L'ergodicité est une forme d'*irréductibilité* d'un système dynamique, au sens de la théorie de la mesure. On rappelle le résultat structural de théorie ergodique suivant.

PROPOSITION 7.1. — *L'ensemble des mesures de probabilités invariantes par le flot géodésique est compact et convexe.*

Pour E un espace vectoriel et $\mathcal{C} \subset E$ un sous-ensemble convexe de E , on rappelle la notion suivante.

DÉFINITION 7.2. — *Un point $e \in \mathcal{C}$ est dit extrémal si il ne peut s'écrire comme une combinaison convexe non-triviale d'éléments de $\mathcal{C}$. Précisément, si*

$$e = \sum t_i \vec{c}_i \quad \text{avec} \quad \vec{c}_i \in \mathcal{C} \text{ et } \sum t_i = 1$$

alors tous sauf un des t_i sont nuls et pour le j tel que $t_j = 1$, $\vec{c}_j = e$.

La géométrie du convexe des mesures invariantes pour le flot géodésique et la notion d'ergodicité pour le flot géodésique sont liés par l'importante proposition suivante

PROPOSITION 7.3. — *Les mesures de probabilité ergodiques pour le flot géodésique sont exactement les points extrémaux du convexe des mesures de probabilités invariantes.*

⁽⁴⁾ Ce fait n'est pas complètement trivial, on fait ici appel à la connaissance supposée du lecteur de la dynamique du flot géodésique.

7.2. Une pipeaumonstration du théorème d'ergodicité quantique

On peut maintenant pipeaumonter un théorème décrivant les mesures semi-classiques pour la classe des variétés riemanniennes compactes *dont le flot géodésique est ergodique pour la mesure de Liouville*.

Note pour la lectrice. Démontrer que le flot géodésique d'une variété riemannienne est ergodique pour la mesure de Liouville est une tâche en règle générale ardue. En pratique, la seule classe raisonnable pour laquelle on sache le démontrer sont les variétés à courbure strictement négative. Il existe aussi plein de variétés pour lesquelles on sait que le flot géodésique n'est PAS ergodique pour la mesure de Liouville (comme le tore plat ou la sphère ronde). Le lecteur curieux est invité à consulter l'annexe C.

L'énoncé qu'on va donc pipeaumonter est le suivant.

THÉORÈME 7.4. — *Soit M une variété riemannienne compacte dont le flot géodésique est ergodique pour la mesure de Liouville. Alors il existe une sous-suite $(\Psi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de densité 1 de fonctions propres du laplacien dont les mesures semiclassiques associées convergent faiblement vers la mesure de Liouville.*

Rappelons qu'une sous suite est de densité 1 si le sous ensemble $E := (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ formé par ses indices est de densité 1, c'est à dire si

$$\frac{\#(E \cap [1, N])}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

Note pour le lecteur. On peut voir que l'énoncé du théorème 7.4 se déduit de celui-ci en utilisant le fait que la mesure de Liouville se projette sur la mesure riemannienne de M via $\pi : TM \rightarrow M$.

La démonstration est maintenant relativement simple. Dans ce qui suit, on fait les deux approximations suivantes pour bien voir la structure de la démonstration sans s'embêter avec les détails techniques.

(1) Dans la loi de Weyl locale, on a l'égalité

$$\frac{1}{h^d} \sum_{\lambda_i \leq h^{-2}} \nu_h^{\Psi_i} = \mathcal{L}$$

avec $\mathcal{L}$ la mesure de Liouville (au lieu d'avoir juste un résultat asymptotique).

- (2) Les mesures $\nu_h^{\Psi_i}$ sont exactement invariantes par le flot géodésique au lieu d'être « presque invariantes ».

Modulo ces approximations, on a écrit grâce à loi de Weyl locale la mesure de Liouville comme une combinaison convexe de mesures invariantes. Mais comme, par hypothèse, la mesure de Liouville est ergodique, c'est un point extrémal du convexe des mesures invariantes. Il s'en suit alors que pour tout i , $\nu_h^{\Psi_i}$ doit être égale à Liouville.

Note pour la lectrice. Le théorème d'ergodicité quantique est ce qu'on obtient de cette idée de preuve appliquée avec les vrais énoncés asymptotiques.

Quand on regarde, ce qui se passe à la limite $h \rightarrow 0$, la somme de la loi de Weyl locale contient de plus en plus de termes, de plus en plus invariants. Ils doivent alors, par l'argument de points extrémaux, être presque tous égaux à la mesure de Liouville.

Cependant, si seulement une proportion très faible (tendant vers 0 quand h tend vers 0) d'entre eux choisissait de ne pas être égaux à la mesure de Liouville, ça n'affecterait pas le résultat. D'où la possibilité d'exclure une suite de densité 0 du résultat.

Le lecteur aura peut-être remarqué que la loi de Weyl locale donne, non pas que la mesure de Liouville restreinte à SM s'écrit comme une moyenne de mesures invariantes, mais qu'elle s'écrit comme telle restreinte à $B^1(M)$ (le fibré en boules sur M), sous-ensemble sur laquelle elle n'est plus ergodique (les ensembles de la formes $\{a \leq \|v\| \leq b\}$ étant invariants et de mesure non-nulle). Nous clarifions ce point dans l'annexe E, dans lequel nous donnerons une démonstration au théorème d'ergodicité quantique.

- *JM : Donc je disais : Weyl locale te dit que la mesure de Liouville s'écrit comme une moyenne des mesures qu'on a construit tout-à-l'heure en décomposant les fonctions propres du laplacien dans la base des paquets d'onde. Ces mesures sont presque invariantes par le flot géodésique, et dans l'ensemble des mesures invariants, la mesure de Liouville est un point extrémal. Ensemble, ça dit que presque toutes les limites de ces mesures sont la mesure de Liouville elle-même.*
- *S : Incroyable ! Parbleu ça a l'air trop bon aussi. Bon on va picoler, mais ça m'a l'air d'avancer pas si mal ton affaire ?*

- *JM : Ouais faudrait que j'écrive ça proprement maintenant. Ou plutôt que de l'écrire proprement, je vais écrire un gros pipeau, pour qu'on comprenne un peu les idées sans trop se faire mal avec les détails techniques.*
- *S : Ouais et puis y a les annexes pour celles et ceux qui ont envie de se faire du mal :)*

Annexe A. Formulaire de Fourier

La transformée de Fourier usuelle s'écrit

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot v} f(x) dx.$$

On utilise la transformée de Fourier semi-classique, qui s'écrit :

$$\mathcal{F}_h f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i \frac{x \cdot v}{h}} f(x) dx.$$

Elle est reliée à la transformée de Fourier usuelle par un simple changement de variables

$$\mathcal{F}_h f(v) = \frac{1}{\sqrt{h}} \widehat{f}\left(\frac{v}{h}\right).$$

La transformée de Fourier peut être inversée de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{x \cdot v}{h}} \mathcal{F}_h f(v) dv.$$

Une formule particulièrement utile est celle de la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne à paramètre complexe : si α est un nombre complexe de partie réelle strictement positive et $G_\alpha(x) := e^{-\alpha x^2/(2h)}$, on a

$$\widehat{G}_\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{\alpha/h}} e^{-4h \frac{v^2}{\alpha}}$$

$$(A.1) \quad \mathcal{F}_h G_\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{v^2}{2h\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} G_{\alpha^{-1}}(v).$$

On en profite pour rappeler que si α est un réel strictement positif, la norme L^2 de la gaussienne G_α satisfait

$$\|G_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sqrt{\frac{2\pi h}{\alpha}},$$

ce qui se déduit de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, par un changement de variable.

Annexe B. Paquets d'ondes dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette annexe, nous revenons sur la notion de paquet d'ondes, puis nous introduisons la *décomposition en paquets d'ondes* d'une fonction d'onde générale. Cette décomposition peut-être comprise comme une description dans l'espace des phases des phases de n'importe quelle fonction L^2 .

Pour motiver l'introduction des paquets d'ondes, revenons une seconde sur l'exemple des ondes planes : on a vu que pour $v_0 \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$f_t(x) = e^{i \frac{v_0(x - tv_0/2)}{h}},$$

est solution de l'équation de Schrödinger. On remarque que cette fonction satisfait $f_t(x) = f_0(x + tv_0/2)$, elle se « déplace » donc dans l'espace avec une vitesse $v_0/2$. Ce v_0 apparaît également dans la transformée de Fourier semi-classique de f_t :

$$\mathcal{F}_h f_t(v) = \frac{1}{(2\pi h)^{1/2}} \int e^{i \frac{v_0 x}{h}} e^{-i \frac{v x}{h}} e^{-i \frac{tv_0^2}{2h}} dx = (2\pi h)^{1/2} e^{-i \frac{tv_0^2}{2h}} \delta_{v_0}(v),$$

où δ_{v_0} est la distribution de Dirac centrée en v_0 . Ceci laisse penser que la transformée de Fourier d'une fonction et la vitesse de sa propagation par l'équation de Schrödinger sont liées, ce qui est corroboré par le « passage en Fourier » de l'équation elle-même. Si $u_t(x)$ est une solution de l'équation de Schrödinger, comme la transformée de Fourier commute avec la dérivée en temps, on a :

$$\partial_t \mathcal{F}_h(u_t)(v) = i \frac{h}{2} \mathcal{F}_h(\Delta u_t)(v) = -i \left(\frac{v^2}{2h} \right) \mathcal{F}_h(u_t)(v),$$

où l'on a utilisé le fait que $\mathcal{F}_h(\partial_x g)(v) = (-iv/h) \mathcal{F}_h(g)(v)$. À v fixé, on peut intégrer en temps et on obtient :

$$(B.1) \quad \mathcal{F}_h(u_t)(v) = e^{-i \frac{tv^2}{2h}} \mathcal{F}_h(u_0)(v).$$

Ainsi, la « composante de Fourier » associée à v d'une solution de l'équation de Schrödinger évolue comme une onde plane de paramètre v . Si la fonction $|u_t|^2$ peut être vue comme une densité de probabilité de présence d'une particule en espace, la fonction $|\mathcal{F}_h(u)|^2$ peut être vue comme une densité de probabilité en vitesse. L'onde plane f_t représenterait une particule se déplaçant à vitesse v constante complètement délocalisée en position : sa « densité de probabilité » de présence $|f_t|^2$ est constante (avec un abus considérable ici, puisque $|f_t|^2$ ne peut pas être la densité d'une mesure finie). Inversement, une particule complètement localisée en un point serait représentée par une masse Dirac en position, dont la transformée de Fourier

est une onde plane (en vitesse), et serait donc complètement délocalisée en vitesse.

Dans les deux cas, il est difficile de faire le lien avec un quelconque comportement classique. Les deux exemples précédents sont en fait des cas extrêmes d'un phénomène général : une particule ne peut pas être à la fois localisée en position et en vitesse, c'est ce que l'on appelle le « principe d'incertitude ». En termes analytiques, ce principe peut-être démontré de la façon suivante. Si u est une fonction sur $\mathbb{R}$ avec $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, on peut écrire par une habile intégration par parties :

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx = [x |u(x)|^2]_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{\mathbb{R}} x u(x) u'(x) dx$$

de sorte que si u décroît assez vite à l'infini, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \left| \int_{\mathbb{R}} x u(x) u'(x) dx \right| \\ &\leq 2 \|x u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2 \|x u\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \left(-\frac{iv}{h} \right) \mathcal{F}_h(u) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

où on utilise le fait que la transformée de Fourier semi-classique est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Le principe d'incertitude semi-classique s'écrit :

$$(B.2) \quad \|x u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v \mathcal{F}_h(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{h}{2}.$$

On voit dans l'expression que si la fonction u décroît très vite à l'infini (par exemple, est à support compact), sa transformée de Fourier ne peut pas décroître trop vite, sous peine de violer l'inégalité.

Maintenant que l'on s'est convaincu.e que les fonctions d'ondes ne peuvent pas être trop localisées en position et en vitesse, on peut chercher des fonctions qui sont le plus localisées possibles et s'en servir pour décrire notre système. Prenons une paire $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$ et cherchons une fonction L^2 qui soit localisée en position et en vitesse autour de x_0 et v_0 respectivement. On pense naturellement à une fonction gaussienne centrée en x_0 , en effet, la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est une gaussienne, et les fonctions gaussiennes saturant le principe d'incertitude. Cela dit, si l'on prend juste une gaussienne centrée en x_0 , la transformée de Fourier nous donnera une Gaussienne centrée en 0. Pour v_0 non nul, on a donc envie de mélanger l'information en position de la gaussienne avec l'information en vitesse d'une onde plane en multipliant les deux fonctions : cela ne change

pas l'information sur la position, puisqu'on multiplie la gaussienne par une fonction complexe de module 1. C'est précisément ce que l'on va faire :

DÉFINITION B.1. — *Étant donné $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$ et $h > 0$, le paquet d'ondes associé à (x_0, v_0) et h est la fonction $\Phi_{x_0, v_0}^h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$(B.3) \quad \Phi_{x_0, v_0}^h(x) := \frac{1}{(\pi h)^{1/4}} e^{i \frac{x \cdot v_0}{h}} e^{-\frac{|x - x_0|^2}{2h}},$$

où la constante multiplicative est choisie pour que $\|\Phi_{x_0, v_0}^h\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

Une propriété fondamentale du paquet d'ondes est que sa transformée de Fourier est un paquet d'ondes également. En effet, pour tout $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} (B.4) \quad \mathcal{F}_h(\Phi_{x_0, v_0}^h)(v) &= \frac{1}{(\pi h)^{1/4} \sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i \frac{x \cdot (v - v_0)}{h}} e^{-\frac{|x - x_0|^2}{2h}} dx \\ &= \frac{1}{(\pi h)^{1/4} \sqrt{2\pi h}} e^{-i \frac{x_0 \cdot (v - v_0)}{h}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i \frac{(x - x_0) \cdot (v - v_0)}{h}} e^{-\frac{|x - x_0|^2}{2h}} dx \\ &= \frac{1}{(\pi h)^{1/4}} e^{-i \frac{x_0 \cdot (v - v_0)}{h}} e^{-\frac{|v - v_0|^2}{2h}} = e^{i \frac{x_0 \cdot v_0}{h}} \Phi_{v_0, -x_0}^h(v). \end{aligned}$$

Ainsi, les localisations en position et en vitesse sont les mêmes, et, comme on le disait plus haut, optimales pour le principe d'incertitude. Pour vérifier ce dernier point, on utilisera le fait que la largeur de la gaussienne donnée par le module au carré d'un paquet d'ondes est précisément $h/2$.

Intéressons-nous maintenant à l'évolution d'un paquet d'ondes par l'équation de Schrödinger. On aimerait bien, comme dans le cas des ondes planes, qu'il s'agisse d'une simple translation à vitesse constante. Toutefois, le paquet d'ondes n'est pas complètement localisé en vitesse, il sera donc *dispersé* par l'évolution. On peut utiliser l'expression en Fourier du propagateur de Schrödinger (B.1) pour déterminer l'évolution d'un paquet d'ondes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h \left(e^{ith\Delta/2} \Phi_{x_0, v_0}^h \right) (v) &= e^{-\frac{itv^2}{2h}} \mathcal{F}_h(\Phi_{x_0, v_0}^h)(v) \\ &= \frac{1}{(\pi h)^{1/4}} e^{-\frac{itv^2}{2h}} e^{-i \frac{x_0 \cdot (v - v_0)}{h}} e^{-\frac{|v - v_0|^2}{2h}}. \end{aligned}$$

La transformée de Fourier inverse donne

$$\begin{aligned}
& e^{ith\Delta/2}\Phi_{x_0,v_0}^h(x) \\
&= (\pi h)^{-1/4}(2\pi h)^{-1/2} \int e^{\frac{ix\cdot v}{h}} e^{-i\frac{x_0\cdot(v-v_0)}{h}} e^{-i\frac{tv^2}{2h}} e^{-\frac{|v-v_0|^2}{2h}} dv \\
&= (\pi h)^{-1/4}(2\pi h)^{-1/2} \int e^{\frac{ix\cdot v}{h}} e^{-i\frac{x_0\cdot(v-v_0)}{h}} e^{-i\frac{t|v-v_0|^2}{2h}} e^{-i\frac{tv\cdot v_0}{h} + i\frac{tv_0^2}{2h}} e^{-\frac{|v-v_0|^2}{2h}} dv \\
&= (\pi h)^{-1/4}(2\pi h)^{-1/2} \int e^{\frac{ix\cdot v}{h}} e^{-i\frac{x_0\cdot(v-v_0)}{h}} e^{-i\frac{tv\cdot v_0}{h} + i\frac{tv_0^2}{2h}} e^{-\frac{(1+it)|v-v_0|^2}{2h}} dv.
\end{aligned}$$

On a regroupé les termes d'ordre 2 en v et v_0 , on va maintenant regrouper les termes mixtes pour faire apparaître la différence de positions $x - (x_0 + tv_0)$:

$$\begin{aligned}
& e^{ith\Delta/2}\Phi_{x_0,v_0}^h(x) \\
&= (\pi h)^{-1/4}(2\pi h)^{-1/2} \int e^{i\frac{(x-(x_0+tv_0))\cdot(v-v_0)}{h}} e^{i\frac{x\cdot v_0}{h}} e^{-i\frac{tv_0^2}{2h}} e^{-\frac{(1+it)|v-v_0|^2}{2h}} dv \\
&= (\pi h)^{-1/4}(2\pi h)^{-1/2} e^{i\frac{x\cdot v_0}{h}} e^{-i\frac{tv_0^2}{2h}} \int e^{i\frac{(x-(x_0+tv_0))\cdot(v-v_0)}{h}} e^{-\frac{(1+it)|v-v_0|^2}{2h}} dv \\
&= (\pi h)^{-1/4}(2\pi h)^{-1/2} e^{i\frac{x\cdot v_0}{h}} e^{-i\frac{tv_0^2}{2h}} (1+it)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x-(x_0+tv_0)|^2}{(1+it)2h}} \\
&= \frac{1}{(\pi h)^{1/4}\sqrt{1+it}} e^{-i\frac{tv_0^2}{2h}} e^{i\frac{x\cdot v_0}{h}} e^{-\frac{|x-(x_0+tv_0)|^2}{(1+it)2h}}.
\end{aligned}$$

Où l'on a utilisé la formule (A.1). Pour que l'expression soit plus claire on peut encore multiplier le facteur $(1+it)^{-1}$ dans l'exponentielle par son conjugué pour obtenir :

$$e^{ith\Delta/2}\Phi_{x_0,v_0}^h(x) = \frac{1}{(\pi h)^{1/4}\sqrt{1+it}} e^{i\frac{v_0\cdot(x-v_0t/2)}{h}} e^{-\frac{(1-it)|x-(x_0+tv_0)|^2}{(1+t^2)2h}}.$$

En évoluant, le paquet d'ondes se déplace donc à vitesse v_0 , par contre, la partie « onde plane » dans l'expression ci-dessus, se déplace à vitesse $v_0/2^{(5)}$. Par ailleurs, le paquet d'ondes s'étale : son enveloppe au temps t est une gaussienne de variance $h(1+t^2)$, contre seulement h à l'instant initial. Cela permet dire que le paquet d'ondes ne s'étale pas trop vite en temps court. On peut comparer cet étalement à l'évolution par l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$, pour laquelle une gaussienne de forme $e^{-|x|^2/4}$ au temps 0 devient à $t > 0$ une gaussienne de forme $e^{-|x|^2/(4+4t)}$.

Étant donnée une fonction d'onde quelconque, il est pratique de décomposer cette fonction en paquets d'ondes, comme si ceux-ci formaient une

(5) On a brièvement discuté dans le texte principal déjà ce fameux facteur $\frac{1}{2}$.

base de $L^2(\mathbb{R})$. Cela permet d'identifier les lieux de localisation en position et en vitesse de cette fonction. Voici une manière précise de faire cela :

DÉFINITION B.2. — *La décomposition en paquets d'ondes est l'application linéaire*

$$(B.5) \quad T^h : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(T\mathbb{R})$$

définie pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ et $(x, v) \in T\mathbb{R}$ par

$$(B.6) \quad T^h(\psi)(x, v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \langle \psi, \Phi_{x,v}^h \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ajoutons ici que la décomposition en paquets d'onde est un plongement isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(T\mathbb{R})$, en particulier, on ne perd pas d'information par cette opération.

Une suite de fonctions u_h indexée par des h tendant vers 0 est une bonne approximation semi-classique d'un point $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$ de l'espace des phases si leurs décomposition en paquets d'ondes se concentrent autour de (x_0, v_0) lorsque h tend vers 0. La lectrice ayant déjà lu la section 3.4 interprétera cette terminologie comme il se doit. La proposition suivante confirme ce comportement attendu dans le cas des paquets d'ondes eux même.

PROPOSITION B.3. — *Soit $\Phi_{x_0, v_0}^h \in L^2(\mathbb{R})$ le paquet d'ondes associé au point $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$ de l'espace des phases. Sa décomposition en paquet d'ondes est donnée pour tout $(x, v) \in T\mathbb{R}$ par*

$$(B.7) \quad T^h(\Phi_{x_0, v_0}^h)(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{i \frac{(x+x_0) \cdot (v-v_0)}{2h}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4h}} e^{-\frac{|v-v_0|^2}{4h}}.$$

En particulier, on a $\|T^h(\Phi_{x_0, v_0}^h)\|_{L^2(T\mathbb{R})} = 1$.

Cette proposition nous dit que les paquets d'ondes se concentrent en une gaussienne de largeur $\sqrt{4h}$ autour du point $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$ dans l'espace des phases. On peut tout de suite noter que cette interprétation est strictement plus précise que celle donnée par le graphe de la fonction d'onde $\Phi_{x_0, v_0}^h \in L^2(\mathbb{R})$ dans l'espace de configuration $\mathbb{R}$, qui exhibe clairement une concentration autour de sa position $x_0 \in \mathbb{R}$, mais où la concentration autour de sa vitesse $v_0 \in T_{x_0}\mathbb{R}$ n'est pas manifeste. On voit ici que la vitesse d'une fonction d'onde, *a priori* encodée par sa phase, se lit clairement dans sa décomposition en paquets d'ondes. Avant d'aller plus loin, démontrons ce résultat.

Démonstration. — La proposition découle du calcul suivant, qu'il vaut la peine de faire une fois dans sa vie : si (x_0, v_0) et (x, v) sont deux points de $T\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{x_0, v_0}^h, \phi_{x, v}^h \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{y \cdot v_0}{h}} e^{-i \frac{y \cdot v}{h}} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{2h}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2h}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{y \cdot (v_0 - v)}{h}} e^{-\frac{2y^2 - 2y \cdot (x+x_0) + x_0^2 + x^2}{2h}} dy.
\end{aligned}$$

On fait apparaître dans le terme exponentiel réel la distance au point $(x_0 + x)/2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
& - \frac{2y^2 - 2y \cdot (x+x_0) + x_0^2 + x^2}{2h} \\
&= - \frac{2|y - (x_0 + x)/2|^2}{2h} + \frac{|x+x_0|^2/2 - x_0^2 - x^2}{2h} \\
&= - \frac{|y - (x_0 + x)/2|^2}{h} - \frac{|x-x_0|^2}{4h}
\end{aligned}$$

On simplifie encore, avant d'utiliser la formule de la transformée en ondes planes d'une fonction cloche

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{x_0, v_0}^h, \phi_{x, v}^h \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi h}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4h}} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{y \cdot (v_0 - v)}{h}} e^{-\frac{|y - (x_0 + x)/2|^2}{h}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi h}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4h}} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{(y + (x_0 + x)/2) \cdot (v_0 - v)}{h}} e^{-\frac{y^2}{h}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi h}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4h}} e^{i \frac{(x_0 + x) \cdot (v_0 - v)}{2h}} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{y \cdot (v_0 - v)}{h}} e^{-\frac{y^2}{h}} dy \\
&= e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4h}} e^{i \frac{(v-v_0)/2 \cdot (x+x_0)/2}{h}} e^{-\frac{|v-v_0|^2}{4h}},
\end{aligned}$$

comme annoncé. $\square$

Cet atout de la décomposition en paquets d'ondes qui permet d'exhiber explicitement la concentration de la propagation des paquets d'ondes au temps $t \in \mathbb{R}$ autour du point $(x + tv, v) \in T_v \mathbb{R}$, et non seulement autour de la position $x + tv \in \mathbb{R}$. Cela fait l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION B.4. — *La décomposition en paquets d'ondes de la propagation au temps $t \geq 0$ du paquet d'ondes associé à $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$ en temps $t \geq 0$ satisfait*

$$\begin{aligned}
\text{(B.8)} \quad T^h \left(e^{ti \frac{h}{2} \Delta / 2} \Phi_{x_0, v_0}^h \right) (x, v) \\
= c_{h, t} e^{\frac{i}{h} \Psi(t, x, v)} e^{-\frac{|x - (x_0 + t(v_0 + v)/2)|^2}{4(1+t^2)h}} e^{-\frac{|v - v_0|^2}{4h}},
\end{aligned}$$

pour tout $(x, v) \in T\mathbb{R}$, où $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times T\mathbb{R})$ est une fonction explicite ne dépendant que de $(x_0, v_0) \in T\mathbb{R}$, et la constante $c_{h,t} > 0$ est l'unique telle que $\|T^h(e^{tih\Delta/2}\Phi_{x_0,v_0}^h)\|_{L^2(T\mathbb{R})} = 1$.

Ce résultat nous donne de plus une estimation précise sur la dispersion de la concentration du paquet d'ondes autour de $(x_0 + tv_0, v_0) \in T\mathbb{R}$, et non seulement autour de $x_0 + tv_0 \in \mathbb{R}$ comme on le voit en regardant son graphe. Par ailleurs, on remarque que la propagation n'induit aucune dispersion en vitesse, comme l'on s'y attend d'après la conservation de la quantité de mouvement par l'équation de Schrödinger.

Annexe C. Sur la dynamique du flot géodésique

Dans ce texte on a discuté de manière assez abstraite de ce qu'il peut arriver aux mesures semi-classiques, et dans le cas du théorème d'ergodicité quantique on fait l'hypothèse que la mesure de Liouville est ergodique pour le flot géodésique. Dans cet annexe on tente de donner un panorama de ce qu'il peut arriver en pratique, pour des variétés riemmanienne bien « concrètes ».

La sphère ronde et le tore plat, deux exemples non-chaotiques.

Le tore plat $\mathbb{T}^d$ et la sphère ronde $\mathbb{S}^d$ sont des exemples remarquable d'un point de vue dynamique.

- La flot géodésique du tore plat se décompose en *tores invariants* sur lesquels la dynamique est juste un gentil flot linéaire, qui sont très bien compris d'un point de vue dynamique.
- Pour la sphère ronde, c'est encore plus simple : toutes les trajectoires sont périodiques ! Il ne se passe donc pas grand-chose d'intéressant d'un point de vue purement dynamique.

Ces deux exemples ont en commun les propriétés suivantes qui sont typiques des dynamiques non-chaotiques :

- (1) L'évolution de la dynamique est *peu sensible au choix de la condition initiale*. Si je prends deux points très proches sur les fibrés tangents respectifs de la sphère ou du tore, leur trajectoires s'écartent l'une de l'autre à une vitesse au plus linéaire (dans le cas de la sphère, elles restent proche l'une de l'autre pour toujours!).
- (2) Les mesures invariantes autres que la mesure de Liouville sont simples à décrire. Dans le cas du tore, il y a les mesures portées par les tores invariants, les mesures portées par les orbites périodiques

et leurs combinaisons linéaires. Pour la sphère, juste les combinaisons linéaires de mesures portées par les orbites périodiques.

- (3) La dynamique sur les ensembles invariants est « *simple* », elle est soit périodique, soit quasi-périodique (comme les flots linéaires sur le tore).

Qu'est-ce qu'un système dynamique chaotique ? Au contraire, les systèmes dynamiques chaotiques sont caractérisés par les propriétés suivantes qui sont d'une certaine manière les doubles maléfiques des propriétés énoncées ci-dessus pour les dynamiques non-chaotiques.

- (1) L'évolution de la dynamique est *très sensible au choix de la condition initiale*. Si je prends deux points très proches pour une dynamique chaotiques, ils s'écartent à vitesse exponentielle. Ce taux de dispersion exponentielle est souvent appelé *exposant de Lyapounoff*.
- (2) Il y'a une myriade de mesures invariantes, dont la géométrie peut être arbitrairement compliquée : elles peuvent être supportées par des ensembles de Cantor, sur des ensembles finis, dénombrables, avoir support total et dimension de Hausdorff arbitraire. C'est le far-west statistique.
- (3) La dynamique sur les ensembles invariants tend à ressembler à un processus aléatoire : si on choisit deux points au hasard, leur position dans un futur très lointain sont des variables aléatoires presque indépendantes !

Le problème de déterminer si un système dynamique est chaotique ou non est un problème fondamental de la théorie des systèmes dynamiques. Il nous semble juste de dire que c'est un problème qui reste à ce jour ouvert dans sa plus grande généralité. Il n'est cependant pas difficile de trouver des exemples explicites.

Variétés à courbure négative. On a le théorème suivant.

THÉORÈME C.1. — *Soit M une variété riemannienne à courbure sectionnelle strictement négative. Son flot géodésique (restreint à son fibré unitaire tangent) est chaotique.*

C'est un théorème remarquable, car la propriété d'avoir courbure sectionnelle strictement négative est ouverte dans l'espace des métriques riemannienne suffisamment régulières.

	<i>Non chaotique</i>	<i>Chaotique</i>
Sensibilité aux conditions initiales	linéaire en temps	exponentielle en temps
Ensembles invariants	<i>peu nombreux</i> , tores invariants $\mathbb{T}^k$	<i>très nombreux</i> , ensembles fractals variés
Mesures invariantes	mesures à densité sur des tores	mesures fractales <i>très nombreuses</i>
Comportement statistique	quasi-périodique	aymptotiquement aléatoire
Mesure de Liouville/Lebesgue	Pas ergodique (se décompose selon les tores invariants)	ergodique

Quid d'une variété riemannienne générique ? Récapitulons dans le petit tableau suivant les différences entre dynamiques chaotiques et non-chaotiques.

Il est naturel de se demander sur lequel de ces deux comportements va tomber le flot géodésique d'une variété riemannienne donnée. La réponse n'est pas complètement évidente, mais se résume de la façon suivante.

- (1) Les flots « *complètement chaotique* » (comme pour les variétés riemannienne à courbure strictement négative) forment un ouvert de l'espace des métriques riemanniennes. En ce sens, c'est un cas qui arrive avec une probabilité non-nulle !
- (2) Au contraire, les flots « *complètement non-chaotique* » (comme le flot géodésique de la sphère ronde ou du tore plat) sont extrêmement rares (même si ce n'est pas très rigoureux, il faut penser à l'ensemble des métriques dont le flot est complètement non-chaotique comme à une sous-variété de codimension strictement positive).
- (3) Le reste (qui est non-négligeable et contient des ouverts !) sont des métriques dont le flot géodésique a un comportement mixte : l'espace tangent peut être décomposé en deux parties invariantes par le flot, l'une où la dynamique est chaotique et l'autre où la dynamique est non-chaotique.

Sur l'hypothèse d'ergodicité dans le théorème d'ergodicité quantique. On conclut cet appendice par le commentaire suivant : les

métriques riemanniennes complètement chaotique, dont la mesure de Liouville est ergodique, forment un sous-ensemble non-trivial des métriques riemanniennes. Cet ensemble contient en particulier toutes les métriques à courbures strictement négative, dont un cas emblématiques sont les quotients de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$, un exemple central en géométrie s'il en est.

Annexe D. Onde ou particule ?

Dans ce paragraphe⁽⁶⁾, on discute de la théorie physique qui a historiquement motivé l'étude de l'équation de Schrödinger, et plus particulièrement des aspects expérimentaux qui en justifient la pertinence.

Jusqu'au début du vingtième siècle, la physique se reposait exclusivement sur la mécanique classique de Newton pour décrire le mouvement de la matière. Et d'un point de vue pratique, c'était parfaitement satisfaisant car les échelles de distances auxquels on avait à l'époque accès expérimentalement sont très bien décrites par cette théorie. Les progrès remarquables du début vingtième siècle amenèrent les physiciens à s'intéresser à la composition des atomes. Il apparut qu'à cette échelle (extrêmement petite), la mécanique dite classique (la théorie de Newton) ne permettait plus d'expliquer les phénomènes qu'on observait. Ce qu'on observait c'est qu'à cette échelle, les objets (des particules comme les électrons, protons et autres composants des atomes) ne se comportent plus comme des *points matériels* comme dans la mécanique classique mais comme des *ondes*. Mais en fait, qu'entend-on par le mot « onde » ? On essaie d'expliquer.

D.1. Un phénomène typiquement ondulatoire : les interférences

Il n'est pas évident de définir abstraitement une onde, mais on peut en donner grossièrement quelques caractéristiques : une onde n'est pas ponctuelle, elle se propage en transportant de l'énergie ou de la matière, et deux ondes peuvent *interférer*. C'est ce phénomène qui nous intéresse particulièrement, car c'est la meilleure justification pour l'introduction de la phase.

⁽⁶⁾ Pour écrire ce paragraphe, Jean-Michel a quand même pas mal pompé les pages Wikipédia sur la dualité onde-corpuscule et les interférences. C'est de là que viennent la plupart des figures.

Commençons par illustrer le phénomène dans le cas probablement le plus proche de l'intuition, le cas des ondes vagulatoires, c'est à dire le cas des vagues. Le lecteur intéressé est par ailleurs invité à reproduire l'expérience suivante dans son lavabo ou dans sa baignoire. On remplit donc le lavabo de flotte, flotte dans lequel on jette, plus ou moins simultanément, deux billes à jouer à des endroits différents. La surface du liquide va alors se déformer pour faire apparaître des vagues (des ondes), vagues qui vont finir par se rencontrer après un certain temps, c'est le premier temps où elles interfèrent. Pour être précis mathématiquement, c'est la hauteur de la flotte par rapport au fond du lavabo qui est modélisée par une onde ici. La figure suivante nous montre le schéma d'interférence : plus c'est clair plus la flotte est haute. Les deux points desquels sont issues les cercles concentriques sont les points d'impacts des billes.

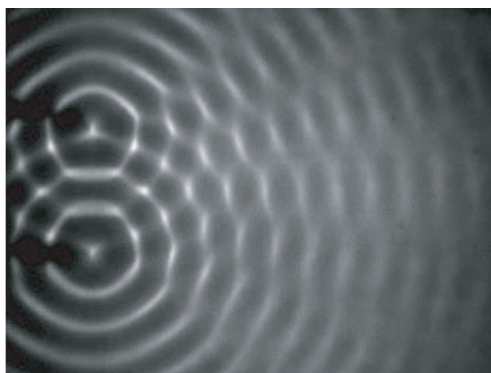


FIGURE D.1.

Une mise en évidence expérimentale de la nature ondulatoire de la lumière a été faite par Thomas Young en 1801 avec un faisceau lumineux. C'est l'expérience dite des fentes d'Young. L'idée est simple : si la lumière se comporte comme une onde, il devrait y avoir des interférences. Attardons nous quelques minutes sur cette expérience, on verra ensuite qu'on peut la reproduire avec d'autres types d'ondes. On cherche une quantité physique observable qui joue le rôle de la hauteur de la vague. On peut penser à l'intensité lumineuse.

On part d'une source lumineuse qu'on va diviser en deux faisceaux passant par deux fentes étroites et proches découpées dans une plaque opaque. On observe ensuite la lumière projetée à travers ces fentes sur un écran. Si le faisceau lumineux était un simple jet de particules classiques, on verrait simplement sur l'écran la superposition des deux parties du faisceau

(soit une tache lumineuse). Toutefois, on observe une alternance de bandes lumineuses et de bandes sombres.

Cela montre que l'intensité lumineuse n'est pas additive. Une façon de comprendre le phénomène est de dire qu'il y a une autre quantité additive sous-jacente, ce que l'on modélise par une amplitude réelle et une phase complexe : $Ae^{i\theta}$, la phase variant le long du parcours (comme pour les ondes planes de début du texte). Pour les vagues, dont la hauteur est réelle, on sommerait deux termes $A(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = A \cos \theta$.

L'intensité lumineuse est le carré du module de cette quantité. Le signal lumineux qui arrive sur l'écran est de la forme $A(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})$, avec θ_1 et θ_2 qui dépendent linéairement de la distance entre le point d'arrivée et la fente 1 ou 2 par laquelle le faisceau est passé. Comme ces deux distances varient différemment quand on se déplace sur l'écran, il y aura des points où les deux termes s'annulent et des points où ils s'additionnent, on parle d'interférences destructives et constructives correspondant aux bandes sombres et lumineuses respectivement.

Pour l'instant, on n'a parlé que des vagues et de la lumière. Il faut noter que la question de la nature, corpusculaire ou ondulatoire, de la lumière date au moins du XVII^e siècle (avec entre autres Newton et Huygens) et que le point de vue ondulatoire s'est imposé jusqu'à l'introduction des quantas par Albert Einstein qui propose l'existence de photons, particules de lumière, en 1905. Ensuite, en 1924, Louis De Broglie proposera de réconcilier tout le monde en disant que toute particule (ou corpuscule) est décrite par une onde.

D.2. Des interférences quantiques

De la même manière que Thomas Young le faisait pour la lumière, si toute particule peut être décrite par une onde, on doit pouvoir le mettre en évidence avec des interférences. Des interférences d'électrons furent observées dès les années trente, confirmant la thèse de De Broglie, toutefois, il s'agissait à chaque fois de beaucoup d'électrons. Dans les années soixante, Feynman proposa de refaire l'expérience des fentes d'Young avec des électrons, mais en faisant passer les électrons un par un, pour vérifier que les interférences pouvaient se produire *avec une seule particule*. Cette expérience fut réalisée de manière concluante dans les années soixante-dix, et quatre vingt.

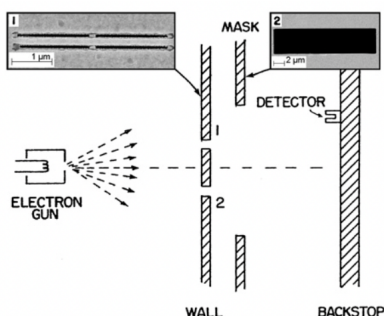


FIGURE D.2. Schéma de l'expérience

On envoie des électrons par un canon (à gauche sur la figure D.2) à travers deux fentes dans un mur (vertical, au milieu), et on place un détecteur (à droite) qui permet de déterminer la zone d'impact des électrons qui ont traversé les fentes sur le mur de droite.

On commence par obstruer successivement chaque fente pour vérifier l'image obtenue si les électrons passent par une fente sans ambiguïté.

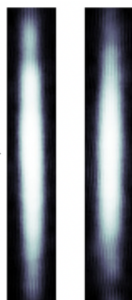


FIGURE D.3. Chacune des deux images représente l'intensité des impacts sur l'écran en face de la fente non obstruée.

Le résultat frappant de l'expérience concerne la distribution des impacts de ces électrons sur l'écran d'observation lorsque aucune des deux fentes n'est obstruée. En l'absence d'interférences, l'image obtenue devrait ressembler à une superposition des deux images de la figure D.3. Voyons maintenant ce qui a été observé à travers les figures D.4 et D.5.

On voit clairement apparaître des franges d'interférences, mais comme une superposition d'un grand nombre de points sur l'écran. C'est remarquable : bien que la particule, comme dans le cas classique, arrive

indépendamment des autres électrons en un point de l'écran, la distribution des lieux d'arrivée reproduit un motif d'interférence typique de la mécanique des ondes. On a sous nos yeux toute la richesse de la dualité onde-particule. On aurait du mal à expliquer la forme de ces franges sans supposer que l'électron unique, est passé par les deux fentes à la fois, comme les faisceaux lumineux de l'expérience d'Young.

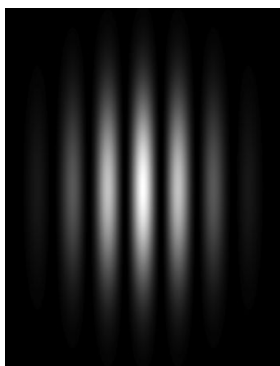


FIGURE D.4. Interférences !

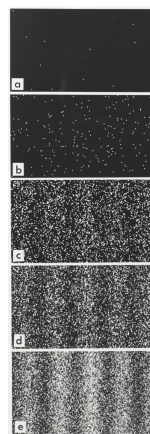


FIGURE D.5. L'évolution de la distribution par nombre croissant de tirs.

Une question vient naturellement à la lectrice à ce point : si les particules sont représentées par des fonctions, des ondes, comment se fait-il que lorsqu'on envoie un unique électron on constate un impact bien localisé sur l'écran et non pas une distribution type interférence ? C'est peut-être ce point le plus déroutant de la théorie : l'électron se comporte comme une onde de probabilité (d'être à tel endroit, d'avoir telle vitesse...) *tant qu'il n'est pas observé*. À l'observation, son état se détermine et il redevient quelque part une particule ponctuelle. On parle parfois d'effondrement de la fonction d'onde (à l'observation). C'est un fait majeur de la théorie que l'on a pas du tout abordé ici : nous nous contentons de faire les mathématiques de ce qu'il se passe avant l'observation, c'est à dire les mathématiques des fonctions d'ondes.

— *S : Mais attends, tu dis que toute la matière c'est des ondes, mais c'est encore tout petit un électron, moi j'en ai jamais vu, ça sent le pipeau ton histoire.*

- JM : Ouais, mais rassure-toi, la même expérience a été faite avec des molécules gigantesques, entre un million et 10^{13} fois le diamètre de l'électron, du footballène ça s'appelle.
- S : Super sérieux comme truc. Et ça fait quelle taille ça ?
- JM : Bah... 1 nanomètre.
- S : ...mouais... Ah et j'y pense, comment tu mesure le diamètre d'un électron si c'est une onde ?
- JM : Ouh là, tu sens pas la joue de boeuf qui crame ?

Annexe E. Une démonstration du théorème d'ergodicité quantique

La démonstration du théorème d'ergodicité quantique est en fait relativement simple et suit l'heuristique proposée en section 7 :

- les mesures semi-classiques des Ψ_n sont *presque* invariantes par le flot géodésique ;
- par la loi de Weyl locale, la moyenne des mesures semi-classiques des Ψ_n est *presque* égale à la mesure de Liouville.

On a alors *presque* écrit la mesure de Liouville comme une combinaison convexe de mesures invariantes par le flot géodésique. Si la mesure de Liouville est ergodique, c'est un point *extrémal* du convexe des mesures invariantes : toute écriture comme combinaison convexe d'autres mesures invariantes est donc triviale ! Les mesures micro-locales des Ψ_n sont donc *presque toutes* égales à la mesure de Liouville.

Commençons par préciser : la mesure qui apparaît dans Weyl locale est une mesure sur $B^1M = \{(x, v) \in TM \mid \|v^2\| \leq 1\}$. C'est un produit $\mathcal{L}_r \otimes dr$, $r \in [0, 1]$, où $\mathcal{L}_r$ est la mesure de Liouville sur la sphère tangente de rayon r , notée $S^rM = \{(x, v) \mid \|v\| = r\}$. La mesure $\mathcal{L}_r$ est ergodique, donc un point extrémal du compact convexe $\mathcal{C}_r$ des probabilités invariantes sur S^rM .

L'application $r: S^1M \rightarrow S^tM$ donnée par l'homothétie dans les fibres $(x, v) \rightarrow (x, rv)$ induit par « poussé en avant » une bijection $t_*: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_r$ qui identifie chacun des convexes $\mathcal{C}_r$ à $\mathcal{C}_1$. Dans la suite, on notera $\mathcal{C}$ ce convexe. Le produit $\mathcal{C} \times [0, 1]$ est également convexe, et la mesure produit $\mathcal{L}$ peut y être représentée comme un intervalle extrémal, voir figure 6.1.

Observons que les mesures ν_h^Ψ sont également des mesures produit $\nu_h^\Psi(r) \otimes dr$ (en notant $\nu_h^\Psi(r)$ la mesure de densité $|\langle \Phi_{x,v}^h, \Psi \rangle|^2$ sur S^rM).

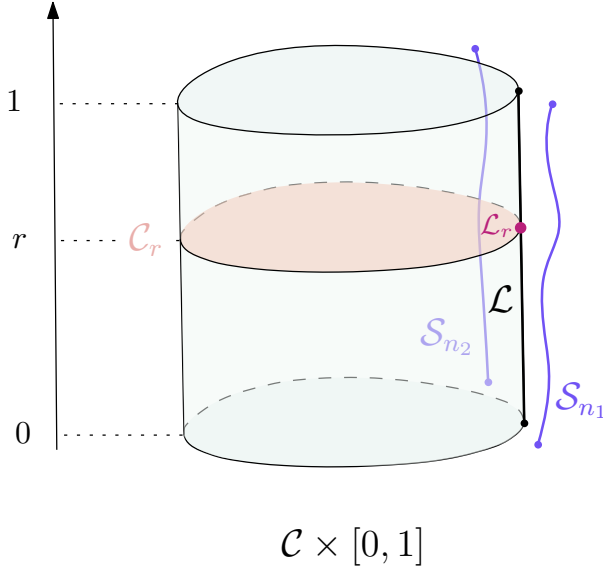


FIGURE E.1. La mesure de Liouville $\mathcal{L} = \mathcal{L}_r \otimes dr$ est approchée par les sommes $\mathcal{S}_n$. Ces mesures produits sont presque invariantes, donc proche d'être portées par des intervalles dans le convexe $\mathcal{C} \times [0, 1]$.

La loi de Weyl locale implique alors qu'on peut écrire la mesure de Liouville $\mathcal{L}$ portée par l'intervalle vertical extrémal comme une moyenne de mesures qui sont proche d'être portées par des intervalles verticaux, voir figure 6.1.

On considère la suite décroissante $h_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$, où λ_n est valeur propre de Δ pour la fonction propre Ψ_n .

On note les sommes partielles de mesures dans la loi de Weyl locale (théorème 6.2) par

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{\lambda_j \leq \frac{1}{h_n^2}} \nu_h^{\Psi_j}.$$

On va raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe un ensemble $F \subset \mathbb{N}$ de densité $d > 0$ tel que toute suite convergente $(\nu_{h_k}^{\Psi_k})_{k \in F}$ reste loin de la mesure de Liouville $\mathcal{L}_1$ sur SM .

Pour $N \gg 1$ donné, on définit $r_k^N \in (0, 1]$ tel que

$$r_k^N h_k = h_N$$

pour tout $k \leq N$. Maintenant, on écrit

$$(E.1) \quad \mathcal{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{j \leq N} \nu_{h_N}^{\Psi_j} = \frac{1}{N} \left(\sum_{j \in F_\varepsilon \cap [1, N]} \nu_{h_N}^{\Psi_j} + \sum_{j \leq N, j \notin F_\varepsilon} \nu_{h_N}^{\Psi_j} \right)$$

On veut que le premier terme dans la somme de droite soit une somme de mesures de la forme $\nu_h^{\Psi_1/h^2}$. Pour cela, on fait l'observation suivante :

$$(E.2) \quad \nu_{h_N}^{\Psi_k} = \nu_{r_k^N h_k}^{\Psi_k} = (r_k^N)_* \nu_{h_k}^{\Psi_k} + O(h)$$

où $r_k^N : TM \setminus M \rightarrow TM \setminus M$ est l'homothétie qui envoie (x, v) sur $(x, r_k^N v)$. La relation (E.2) se montre en écrivant explicitement la mesure : un changement de variables en v montre que la mesure $\nu_{h_N}^{\Psi_k}$ s'écrit comme la mesure $(r_k^N)_* \nu_{h_k}^{\Psi_k}$, mais dans une base de paquets d'onde « recalibrés » de largeur r_k^N . Un fait, que la lectrice résistante ayant survécu jusqu'ici achètera sans peine, est que limite semi-classique ne dépend pas de la largeur des paquets d'onde.

On peut alors injecter (E.2) dans (E.1) :

$$(E.3) \quad \mathcal{S}_N = \frac{1}{N} \left(\sum_{j \in F_\varepsilon \cap [1, N]} (r_k^N)_* \nu_{h_j}^{\Psi_j} + \sum_{j \leq N, j \notin F_\varepsilon} \nu_{h_N}^{\Psi_j} \right) + O(h) = \mu_1^N + \mu_2^N$$

Notons que $\mathcal{S}_N$ converge vers la mesure extrême $\mathcal{L}$. Par l'unicité de la décomposition ergodique $\mathcal{L} = \mathcal{L}_r \otimes dr$, la mesure $\mu_1 = \lim \mu_1^N$ s'écrit aussi

$$\mu_1 = \mathcal{L}_r \otimes dr, \quad r \in E$$

pour E un ensemble de mesure de Lebesgue égale à d .

D'un autre côté, par hypothèse, les $\nu_{h_k}^{\Psi_k}$ sont loin de $\mathcal{L}_1$ donc les $(r_k^N)_* \nu_{h_k}^{\Psi_k}$ sont également loin de $\mathcal{L}_{r_k^N}$. On a donc montré que la mesure $\mu_1 = \mathcal{L}_r \otimes dr, r \in E$ est une moyenne de mesures qui sont toutes loin de $\mathcal{L}_r$. En particulier μ_1^N reste portée loin de l'ensemble qui porte μ_1 dans le convexe $\mathcal{C} \times [0, 1]$, car cet ensemble est extrême, mais $\lim \mu_1^N = \mu_1$. C'est une contradiction, et cela prouve le théorème d'ergodicité quantique.

Conseils de lecture du soir

Ce qui suit a été rédigé sous la contrainte.

Comme leur nom l'indique, les conseils de lecture qui suivent ne sont pas une bibliographie et encore moins un recueil exhaustif de références sur le sujet. Tous les textes cités ont joué à un moment un rôle important

dans ce travail. Parmi ces textes, certains ont été le sujet principal de mes visites à Auffargis. Par exemple, mon séjour à Auffargis, consacré à [4] a été l'occasion d'un premier contact avec la loi de Weyl. D'autres références, comme [2, 3] et [1], m'ont aidé à comprendre les paquets d'ondes, le temps d'Ehrenfest et leur lien avec la conjecture d'unique ergodicité quantique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. FAURE, « Long time semi-classical evolution of wave packets in quantum chaos. Examples of non quantum unique ergodicity with hyperbolic maps », 2005, Notes de cours, Université Joseph-Fourier – Grenoble I, lire ici.
- [2] ———, « Introduction au chaos quantique », 2007, École d'été de Peyresq, lire ici.
- [3] ———, « Introduction au chaos classique et au chaos quantique », in *Chaos en mécanique quantique*, Journées mathématiques X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, 2014, p. 1-58.
- [4] Y. COLIN DE VERDIÈRE, « Spectrum of the Laplace Operator and periodic geodesics: thirty years after », *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), n° 7, p. 2427-2463.

Jean-Michel PIPEAU
Institut International
du Pipeau Mathématique,
Auffargis (France)