

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

LAURENT GUILLOPÉ

## **Billards rationnels et espaces de Teichmüller**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 5 (1986-1987), p. 33-42

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1986-1987\\_\\_5\\_\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__33_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## BILLARDS RATIONNELS ET ESPACES DE TEICHMÜLLER

par *Laurent GUILLOPÉ*

Par billard rationnel, on entendra l'intérieur d'un polygone du plan euclidien dont les angles sont commensurables à  $\pi$ . Sur l'espace tangent (identifié au cotangent grâce à la métrique riemannienne), on a le système dynamique (singulier) d'hamiltonien  $p^2$ , avec réflexions sur le bord de  $Q$  obéissant à la loi *angle d'incidence = angle de réflexion*. L'hamiltonien d'énergie  $p^2$  étant une intégrale première, on réduit l'étude de ce système dynamique au fibré unitaire tangent  $S^1Q = Q \times S^1$ . Orientons le bord de  $Q$  positivement, notons par  $S = \{s_j\}$  l'ensemble des sommets de  $Q$ ,  $A = \{a_i\}$  l'ensemble de ses arêtes,  $\sigma_i$  la symétrie (de partie linéaire  $\tilde{\sigma}_i$ ) par rapport à  $a_i$ ,  $\Gamma$  le groupe diédral engendré par les  $\tilde{\sigma}_i$ . On étudiera le système dynamique (singulier) sur l'espace des phases  $P = (Q - S) \times S^1 / \sim$  où  $\sim$  est la relation d'identification de  $(x, \theta)$  avec  $(x, \tilde{\sigma}_i \theta)$ ,  $((x, \theta) \in a_i \times S^1)$ . On note par  $\pi_1$  ( $\pi_2$  resp.) l'application naturelle de  $P$  sur  $Q$  ( $S^1/\Gamma$  resp.).

Dans une série d'articles ([5,7,8]), Masur (*et alii*) étudie notamment les questions suivantes :

- ergodicité sur la surface  $\pi_2^{-1}(\pi_2(p_0))$ ,  $p_0 \in P$ ;
- existence de trajectoires périodiques, taille de la projection sur  $S^1/\Gamma$  de leur ensemble;
- fonction de comptage des classes d'homotopie de trajectoires périodiques primitives suivant leur longueur.

Dans le cas où  $Q$  est un rectangle (situation où on peut facilement désingulariser le système en un système intégrable au sens des systèmes hamiltoniens), le lecteur répondra lui-même à ces questions : les résultats de Masur donnent des réponses analogues dans le cas général (qualifié de pseudo-intégrable dans [2]):

- pour presque tout  $\bar{\theta}$  dans  $S^1/\Gamma$ , le système restreint à  $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$  est uniquement ergodique (*i.e.* il n'existe qu'une mesure de probabilité invariante sur  $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$ );
- il y a un ensemble dense de directions dans  $S^1/\Gamma$  qui correspondent à une

une trajectoire périodique;

- la fonction de comptage associée aux trajectoires périodiques est à croissance quadratique (on a l'existence, et la forme, d'un asymptotique seulement dans le cas du rectangle et les cas s'y ramenant).

On expose ici les différentes étapes de la preuve du résultat de densité de l'ensemble des directions à trajectoire périodique. On verra comment se ramener à un problème de différentielle quadratique sur une surface de Riemann et le rôle joué par l'espace de Teichmüller et son espace tangent muni de son flot canonique (dit géodésique ou de Teichmüller).

Pour les billards plans non rationnels, on renvoie à Katok ([4]).

### 1. Surfaces de Riemann et différentielles quadratiques

Soit  $S_\Gamma^1$  l'ensemble des points réguliers (i.e. dont la stabilisateur dans  $\Gamma$  est trivial) de  $S^1$  sous l'action de  $\Gamma$ .

La fibre  $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$  est une surface compacte (avec bord si  $\theta$  n'est pas régulier), à un ensemble de points fini près, se projetant via  $\pi_1$  sur l'ensemble des sommets de  $Q$ .

Pour  $\theta$  régulier, soit  $\Sigma_\theta$  la surface construite à partir de  $\#\Gamma$  exemplaires de  $Q$  (les faces de  $\Sigma_\theta$ ), où on a identifié  $\gamma Q$  et  $\sigma_i \gamma Q$  suivant l'arête  $a_i$ . La surface  $\Sigma_\theta$  est identifiable à la fibre  $\pi_2^{-1}(\bar{\theta})$ , complétée au-dessus des sommets de  $Q$ . Les projections  $\pi_1, \pi_2$  seront étendues naturellement à  $\Sigma_\theta$ .

Si  $\theta$  et  $\varphi$  sont dans la même composante connexe  $C$  de  $S_\Gamma^1$ ,  $\Sigma_\theta$  et  $\Sigma_\varphi$  sont isomorphes (car ceci est localement vrai dans  $C$ ). Par ailleurs,  $\Sigma_\theta$  et  $\Sigma_{\bar{\sigma}_i \theta}$  sont isomorphes : soit  $p = (m, \theta)$  tel que le point singulier (dans  $S^1 Q$ ) le plus proche de  $p$  sur la trajectoire  $T_p$  passant par  $p$  soit sur l'arête  $a_i$  et  $p'$  le point symétrique de  $p$  sur  $T_p$  par rapport à ce point singulier; on identifiera  $((\sigma_i Q)_{\Sigma_\theta}, p')$  et  $(Q_{\Sigma_{\bar{\sigma}_i \theta}}, p')$ . Au mot  $\underline{m}$  en les  $\sigma_i$ , trivial dans  $\Gamma$ , est associé un automorphisme de  $\Sigma_\theta$ , qui est l'identité. On identifiera par la suite les surfaces  $\Sigma_\theta$  à une même surface  $\Sigma(Q)$ . Au système dynamique sur  $\Sigma = \Sigma(Q)$  correspond un feuilletage  $\mathcal{F}_\theta$  de codimension 1 sur la surface  $\Sigma$ ; les orbites périodiques du système original correspondant aux feuilles fermées du feuilletage.

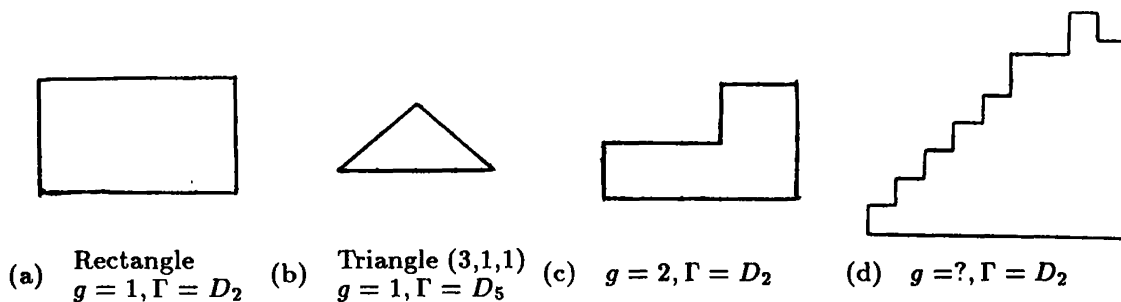


Fig. 1

Le calcul du genre  $g$  de  $\Sigma$  se fait suivant la formule d'Euler  $g = F - E + V$  ou bien avec Gauß-Bonnet singulier  $g = \sum_{p \in \pi_1^{-1}(S)} (1 - \alpha_p/2\pi)$  où  $\alpha_p$  est l'angle total au point  $p$  se projetant sur le sommet  $\pi(p)$  de  $S$ .

En annexe, on montre quelques figures illustrant la construction de la surface de Riemann, et d'un des ses feuilletages, pour le troisième cas de la figure 1.

LEMME 1.1. — *La surface  $\Sigma$  a une structure complexe, canoniquement induite par celle du polygone  $Q$ .*

On notera dans la suite par  $M$  la surface  $\Sigma$  munie de cette structure conforme.

*Preuve.* — En dehors de  $\pi_1^{-1}(S)$ , on met la structure complexe induite par la métrique euclidienne de  $Q$  : les identifications précédentes sont holomorphes, vu que les  $\sigma_i$  sont des transformations conformes. En un point  $p$  de  $\pi_1^{-1}(S)$ ,  $\pi_1$  est un revêtement ramifié de degré  $n_p = \alpha_p/2\pi$ , on prendra comme coordonnée locale holomorphe  $z = \zeta^{1/n_p}$  ( $\zeta \in Q$ ).  $\square$

Etant donnée une 1-forme holomorphe  $\omega$  sur une surface de Riemann  $M_0$ , on appelle feuilletage (vertical), avec singularités éventuellement, le feuilletage associé à la 1-forme réelle  $\Re(\omega)$ .

Soit  $q$  une différentielle quadratique holomorphe sur  $M_0$ . En un point régulier de  $M_0$  pour  $q$  (i.e. qui ne soit pas un zéro de  $q$ ), il existe une coordonnée holomorphe  $z$ , unique à l'antipodie près, telle que  $q = dz^2$ ; une telle carte sera dite rectangulaire. La différentielle quadratique détermine ainsi une structure euclidienne plate à singularités (les zéros de  $q$  : ce sont des points coniques pour cette métrique), les trajectoires, et leur longueur, de  $q$  sont les droites géodésiques pour cette structure riemannienne. Le feuilletage associé à  $q$  sera celui défini par les trajectoires verticales, i.e. celles le long desquelles  $q$  est réelle négative.

LEMME 1.2. — (a) *Il existe une 1-forme différentielle holomorphe  $\omega$  (une différentielle quadratique holomorphe  $q$  resp.) sur  $M(Q)$  telle que le feuilletage  $\mathcal{F}_{\pi/2}$  coïncide avec celui de  $\omega$  (celui de  $q$  resp.).*

(b) *Le feuilletage associé à la forme  $e^{i\theta}\omega$  sur  $M(Q)$  est  $\mathcal{F}_{\theta+\pi/2}$*

*Preuve.* — Soit  $\tilde{M}$  le revêtement universel de  $M \setminus \pi_1^{-1}(S)$ . On pointe  $\tilde{M}$  en un point  $\tilde{p}_0$  d'une face  $\tilde{Q}_0$  (copie de  $Q$ ). Soit  $\tilde{\gamma}$  un chemin dans  $\tilde{M}$ , transverse aux arêtes de  $\tilde{M}$ , d'origine  $\tilde{p}_0$  et d'extrémité dans l'intérieur d'une face (notée  $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}(1)}$ ) de  $\tilde{M}$ . Soit  $(\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n)$  la suite (de relevées) d'arêtes rencontrées par  $\tilde{\gamma}$ ,  $\sigma_{\tilde{\gamma}} = \sigma_{\tilde{a}_n} \dots \sigma_{\tilde{a}_1}$  et  $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}} = \sigma_{\tilde{\gamma}} \cdot Q$ . L'application  $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}(1)} \rightarrow Q_{\tilde{\gamma}} \subset \mathbb{C}$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\tilde{\gamma}$  dans  $\tilde{M}$ . On en déduit une isométrie de  $\tilde{M}$  dans  $\mathbb{C}$ .  $\tilde{M}$  est le revêtement d'holonomie de la variété euclidienne plate  $M \setminus \pi_1^{-1}(S)$  et l'isométrie précédente l'application développante, au sens de la théorie des variétés

affines.

Pour  $\gamma$  dans le groupe fondamental  $\pi_1(M \setminus \pi^{-1}(S), p_0)$ , on a une isométrie  $\sigma_\gamma$  de  $\tilde{Q}_{\tilde{\gamma}(1)}$  dans  $\mathbf{C}$  dont la partie linéaire est triviale, i.e.  $\sigma_\gamma$  est une translation. Si  $\zeta$  est la coordonnée complexe standard de  $\mathbf{C}$ , la forme  $d\zeta$  induit sur  $Q_0$  le feuilletage par les trajectoires verticales. La forme  $\pi^*d\zeta$  sur  $\tilde{M}$  passe au quotient sur  $M \setminus \pi^{-1}(S)$ , soit  $\omega$  cette forme. Au voisinage d'un point de la fibre  $\pi^{-1}(S)$  on a, avec la coordonnée locale  $z = \zeta^{1/\alpha_p}$ ,  $d\zeta = \alpha_p z^{\alpha_p-1} dz$  i.e.  $\omega$  a un zéro d'ordre  $\alpha_p - 1$  en  $p$ . On a ainsi démontré (a) (prendre  $q = \omega^2$ ), ce qui entraîne clairement (b): on a supposé implicitement que  $\pi/2$  était un point régulier de  $S^1$  sous l'action de  $\Gamma$ ; si ce n'est pas le cas, il suffit de prendre une autre direction de référence.  $\square$

On est donc ramené à démontrer le théorème suivant, qui implique la densité dans  $S^1$  des directions périodiques d'un billard rationnel :

**THÉORÈME 1.3.** — *Soit  $q$  une différentielle quadratique holomorphe sur une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$ . Il existe une partie dense  $F$  de  $S^1$  telle que  $e^{i\theta}q$  ( $\theta \in F$ ) ait une feuille fermée.*

## 2. Espace de Teichmüller

**DEFINITION 2.1[3].** — *Soit  $\Sigma_0$  une surface (topologique) de genre  $g$ . L'espace de Teichmüller de genre  $g$  est l'espace des homéomorphismes  $h$  d'une surface de Riemann (i.e. avec structure complexe)  $M$  sur  $\Sigma_0$ , modulo la relation d'équivalence :  $(M_1, h_1) \sim (M_2, h_2)$  si  $h_2^{-1}h_1$  est homotope à une application conforme de  $M_1$ .*

Avec le théorème d'uniformisation, on montre facilement que tout homéomorphisme conforme de  $M$ , homotope à l'identité, est en fait l'identité. On établit par ailleurs que le groupe  $Mod_g$  des classes d'isotopie de difféomorphismes de la surface  $\Sigma_0$ , dit groupe modulaire, opère discontinument sur  $T_g$ . On pose la définition :

**DEFINITION 2.2.** — *L'espace quotient  $R_g = T_g/Mod_g$  est appelé espace modulaire.*

Avant d'énoncer les résultats de Teichmüller qu'on utilisera ici, rappelons quelques définitions et notations. Si  $M$  est une surface de Riemann,  $Q(M)$  note l'espace (de dimension  $6g - 6$ ) des différentielles quadratiques holomorphes sur  $M$ . D'après le théorème d'uniformisation,  $M$  admet une unique structure riemannienne à courbure constante  $-1$ , dont la classe conforme induit la structure conforme de  $M$ . On en déduit des normes sur les fibrés géométriques naturels associés à  $M$ , on notera en particulier  $|q|$  la norme d'une différentielle quadratique définie par  $|q| = \int_M ||q(m)|| dv_M(m)$  et  $B_1(Q(M))$  la boule unité correspondante.

La dilatation conforme d'une application  $f$  de classe  $C^1$  (définie entre ouverts

de  $\mathbf{C}$ ) en un point  $x$  quantifie l'appplatissage par  $f$  des cercles infinitésimaux en  $x$  : si  $C$  est l'ellipse image d'un cercle par la différentielle de  $f$  en  $x$ ,  $K(f, x)$  est le rapport du grand axe de  $C$  par son petit axe. Si  $\mu = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial f}{\partial z}$ , on a  $K(f, x) = (1 + |\mu|)/(1 - |\mu|)$  et la dilatation globale de  $f$  est définie par  $K(f) = \sup_{x \in M} K(f, x)$ . En fait, la notion de dilatation conforme est une notion dans la catégorie des applications continues entre deux surfaces de Riemann, définie en termes de la variation du module des petits rectangles sous l'action de  $f$ ; on renvoie à Ahlfors [1] pour plus de précision.

**THÉORÈMES 2.3 (TEICHMÜLLER)[3].** — Soit  $M$  une surface de genre  $g$  au moins égal à 2.

(a)  $T_g$  est homéomorphe à une boule de dimension  $6g - 6$ .

(b) Soit  $M$  un point de  $T_g$ . On a une application, dite exponentielle et notée  $\text{Exp}_M$ , de  $B_1(Q(M))$  sur  $T_g$ , qui est un difféomorphisme global.

(c) Soient  $q \in B_1(Q(M))$  et  $t \in [0, 1[$  tels que  $\text{th } t = |q|$ . Il existe une différentielle quadratique  $q_t$  sur  $M_t$ , image de  $\text{th } t q$  par l'application exponentielle  $\text{Exp}_M$ , et un homéomorphisme  $f_t$  de  $M$  sur  $M_t$  (dit application extrémale) tel que, pour un point régulier  $m$  de  $q$ ,  $f_t(m)$  est régulier pour  $q_t$  et, dans les cartes rectangulaires de ces points réguliers,  $f_t$  s'exprime suivant  $f_t(\xi + i\eta) = e^t \xi + e^{-t} \eta$ .

L'homéomorphisme  $f_t$  est quasi-conforme, avec pour dilatation complexe  $\mu(f_t) = \text{th } t \bar{q}/|q|$  et extrémal (unique dans sa classe d'homotopie) au sens où il réalise le minimum  $e^{2t}$  de la dilatation conforme dans l'ensemble de tous les homéomorphismes de  $M$  sur  $M_t$  qui lui sont homotopes.

(d) Si on définit  $d_T(M, M') = 1/2 \log K(f)$  où  $f$  est l'unique application extrémale (qui existe!) de  $M$  sur  $M'$ , on munit  $T_g$  d'une distance.

La question naturelle de savoir si la métrique sur  $T_g$  provient d'une structure riemannienne (à courbure négative, si on pense à l'application exponentielle de  $Q(M)$  sur  $T_g$  et au théorème de Hadamard–Cartan en courbure négative) a une réponse négative pour  $g \geq 2$ , alors que  $T_1$  s'identifie au demi-plan de Poincaré ( $\text{Mod}_1$  à  $SL_2(\mathbf{Z})$ ,  $R_1$  à la surface modulaire). Néanmoins, on a une foule de plongements isométriques du disque de Poincaré avec sa métrique hyperbolique, comme l'explique la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.4.** — Soit  $M$  une surface de Riemann avec  $q$  une différentielle quadratique de norme 1. Soit  $D$  le disque de Poincaré avec sa métrique à courbure constante  $-1$ . L'application  $\text{th } t e^{i\theta} \in D \rightarrow g_t(M, e^{i\theta} q) = \text{Exp}_M(q, \text{th } t e^{i\theta} q) \in T_g$  est un plongement isométrique.

*Preuve.* — Soit  $M_{t,\theta}$  (avec sa différentielle quadratique  $q_{t,\theta}$  et l'application extrémale  $f_{t,\theta}$  de  $M$  sur  $M_{t,\theta}$ ) l'image dans  $T_g$  de  $(M, \text{th } t e^{i\theta} q)$  par l'application exponentielle  $\text{Exp}_M$ .

On vérifie que l'application Identité de  $(M, q)$  sur  $(M, e^{i\theta}q)$  coïncide dans les cartes rectangulaires associées à  $q$  et  $e^{i\theta}q$  à la rotation  $K_{-\theta/2}$  d'angle  $-\theta/2$ , alors que l'application extrémale de  $(M, q)$  sur  $(M_{t,0}, q_{t,0})$  s'écrit comme l'affinité  $A_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ . Si  $K_{\varphi/2}$  est une rotation de  $SO(2)$ , notons par  $K_\Phi$  ( $\Phi = \varphi$ ) sa projection dans  $SO(2)/\{\pm 1\}$  et l'élément correspondant dans  $PSL_2(\mathbf{R})$ .

Définissons l'élément  $B$  de  $PSL_2(\mathbf{R})$  par  $BA_{t_1}K_{-\Theta_1} = A_{t_2}K_{-\Theta_2}$ . Utilisant la décomposition  $KAK$  de  $PSL_2(\mathbf{R})$ , écrivons  $B = K_{\Psi_2}A_uK_{-\Psi_1}$ . On en déduit, d'après l'unicité des applications extrémales et leur écriture dans les cartes rectangulaires, que  $d_T(M_{t_1, \theta_1}, M_{t_2, \theta_2}) = u$ .

Le groupe  $PSL_2(\mathbf{R})$  opère transitivement sans point fixe sur le fibré unitaire tangent  $S^1D$  du disque de Poincaré et si on pointe  $S^1D$  en  $\mathbf{v}_0$ , vecteur tangent horizontal positif au centre  $O$  du disque, on a  $\text{th } t e^{i\theta} = p(K_\Theta A_t \mathbf{v}_0)$ , où  $p$  est la projection de  $S^1D$  sur  $D$ . En notant  $d_H$  la distance hyperbolique sur  $D$ , on a

$$\begin{aligned} d_H(\text{th } t_1 e^{i\theta_1}, \text{th } t_2 e^{i\theta_2}) &= d_H(p(K_{\Theta_1} A_{t_1} \mathbf{v}_0), p(K_{\Theta_2} A_{t_2} \mathbf{v}_0)) \\ &= d_H(p(A_{-t_2} K_{\Theta_1 - \Theta_2} A_{t_1} \mathbf{v}_0), O) \\ &= d_H(p(A_{t_2} K_{\Theta_1 - \Theta_2} A_{-t_1} \mathbf{v}_0), O) \quad (\text{via } A_t K_{\pi/2} = K_{\pi/2} A_{-t}) \\ &= d_H(p(K_{\Psi_2} A_u K_{\Psi_1} \mathbf{v}_0), O) \\ &= d_H(A_u p(\mathbf{v}_0), O) \\ &= u, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition. □

### 3. Densité des directions périodiques

LEMME 3.1. —  $(M, q)$  a une trajectoire fermée si et seulement si  $(M_t, q_t)$  en a une.

Preuve. — Si  $\gamma$  une trajectoire fermée de  $(M, q)$ ,  $f_t(\gamma)$ , où  $f_t$  est l'application extrémale de  $M$  sur  $M_t$ , en est aussi une. □

LEMME 3.2. — Supposons que  $g_{t_n}(M, qe^{i\theta_n})$  ( $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $\theta_n \in I$ ) a une trajectoire fermée  $\beta_n$  de longueur uniformément bornée. Alors il existe une suite  $(\theta'_n)$ , convergeant vers 0, telle que  $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$  soit une feuille fermée pour la différentielle quadratique  $e^{i(\theta'_n + \theta_n)}q$ .

Preuve. — L'application  $f_{t_n}$  contracte la partie horizontale d'une trajectoire, avec un facteur  $e^{-t_n}$ , ainsi la longueur de la partie horizontale de  $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$ , de longueur totale uniformément bornée, converge vers zéro. Pour  $n \gg 0$ , la trajectoire fermée  $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$  est quasiment verticale relativement à  $e^{i\theta_n}q$  : il existe  $\theta'_n$  ( $\theta'_n \rightarrow 0$ ) telle que  $f_{t_n}^{-1}(\beta_n)$  soit une trajectoire verticale fermée (i.e. une feuille) relativement à  $e^{i(\theta'_n + \theta_n)}q$ . □

**Preuve du théorème (indications).** — Soit  $D_I$  le secteur  $\{re^{i\theta}, e^{i\theta} \in I, r \in [0, 1[ ]\}$ , identifié à une partie du disque de centre  $(M, q)$  dans  $T_g$ , de projection  $\tilde{D}_I$  dans l'espace des modules  $R_g$ . On montre dans la proposition 3.3 que  $\tilde{D}_I$  n'est pas compact dans  $R_g$ . L'espace des modules admet une compactification  $\overline{R_g}$  où son bord stratifié  $\partial R_g$  s'identifie à une somme d'espaces de modules de surfaces non compactes d'aire finie (pour la métrique hyperbolique standard) de genre  $g'$  strictement inférieur à  $g$  : un point de  $\partial R_g$  est obtenu en pincant la surface  $\Sigma$  le long d'une famille finie de géodésiques simples.

Une telle surface est au voisinage d'un point de pincement conformément équivalente à l'union des disques pointés  $D_{r_i} = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq |z| \leq r_i\} (i = 1, 2)$ . Sur  $D_{r_i}$ , la différentielle quadratique  $d\zeta^2/\zeta^2$  a comme feuilles compactes les cercles. Dans [6], Masur montre, étant donnée une suite d'éléments de  $\tilde{D}_I$  s'accumulant vers  $M_\infty \in \partial R_g$ , qu'il existe une sous-suite telle que la forme quadratique associée converge vers ce modèle standard, en un sens convenable de telle sorte qu'on puisse utiliser un résultat de stabilité des feuilles compactes au voisinage de la différentielle quadratique limite. On applique alors le lemme 3.2 à une suite  $(g_{t_n}(M, qe^{i\theta_n}))$  convergeant vers un point du bord de  $R_g$ .  $\square$

**PROPOSITION 3.3.** —  $\tilde{D}_I$  est non compact.

*Preuve.* — Soit  $d$  la fonction  $Mod_g$ -invariante définie sur  $B_1(Q)$  par  $d(M, q) = \inf l(\gamma)$  où l'infimum porte sur les trajectoires non triviales  $\gamma$  joignant deux zéros (éventuellement égaux) de  $q$ . La fonction  $d$  n'est pas continue sur  $B_1(Q)$  : les suites des deux zéros distincts d'une suite  $q_n$ , où  $(M_n, q_n)$  converge vers  $(M_\infty, q_\infty)$ , peuvent converger vers un même zéro de  $q_\infty$ .

Soit  $E$  la fermeture de  $\tilde{D}_I$  dans  $R_g$  et  $E_{\min}$  la partie des éléments de  $E$  avec un nombre minimum de zéros (Une différentielle quadratique sur une surface de Riemann de  $T_g$  a exactement  $4g - 4$  zéros comptés avec multiplicité). On remarquera que  $d$  est continue sur  $E_{\min}$ .

**LEMME 3.4.** — Si  $E_{\min}$  a des points d'accumulation d'angle intérieur à  $I$  (au sens où il existe une suite  $g_{t_n}(M, e^{i\theta_n}q)$  d'éléments de  $E_{\min}$  avec  $(\theta_n)$  convergeant vers un point de  $\overset{\circ}{I}$ ), alors  $E_{\min}$  n'est pas compact dans  $R_g$ .

*Preuve.* — *Ab absurdo*, si  $E_{\min}$  était compact,  $d_0 = \inf_{E_{\min}} d$  serait non nul, vu la continuité de  $d$  sur  $E_{\min}$ . On va montrer que  $d_0$  est nul.

Soit  $(\widetilde{M_\infty, q_\infty}) = \lim (M_{t_n, \theta_n}, \widetilde{q_{t_n, \theta_n}})$  avec  $\theta_n \rightarrow \theta_\infty \in \overset{\circ}{I}$  et  $t_n \rightarrow +\infty$ . Soit  $d_\infty = d(M_\infty, q_\infty)$  et  $\gamma_\infty$  la trajectoire réalisant  $d_\infty$ .

Supposons d'abord que  $\gamma_\infty$  est une feuille de  $(M_\infty, q_\infty)$ .  $E_{\min}$  est stable par le flot de Teichmüller et toute trajectoire verticale a sa longueur contractée :  $l(g_s(\gamma)) = e^{-s}l(\gamma)$ , si  $g_s$  est l'application extrémale de  $(M, q)$  sur  $g_s(M, q)$ . Ainsi  $d(g_s(M_\infty, q_\infty)) \leq e^{-s}d(M_\infty, q_\infty)$ .



On a d'autre part

$$\begin{aligned} g_s(M_\infty, q_\infty) &= \lim g_s(g_{t_n}(M, e^{i\theta_n} q)) \\ &= \lim g_{s+t_n}(M, e^{i\theta_n} q_n) \end{aligned}$$

et  $g_{s+t_n}(M, e^{i\theta_n} q_n)$  est dans  $\tilde{D}_I \cap E_{\min}$  pour  $n$  assez grand. On en déduit la nullité de  $d_0$ .

Si  $\gamma_\infty$  n'est pas verticale, il existe  $\theta_\infty$  telle que  $\gamma_\infty$  le soit relativement à  $e^{i\theta_\infty} q_\infty$ . A  $s$  fixé, on a

$$g_s(M_\infty, e^{i\theta_\infty} q_\infty) = \lim g_s(M_{t_n, \theta_n}, e^{i\theta_\infty} q_{t_n, \theta_n}).$$

Dans  $PSL_2(\mathbf{R})$ , on a, suivant la décomposition  $KAK$ ,

$$A_s K_{\Theta_\infty} A_{t_n} K_{-\Theta_n} = K_{\Phi_n} A_{u_n} K_{-\Psi_n},$$

avec  $u_n \rightarrow +\infty$ ,  $\Psi_n - \Theta_n \rightarrow 0$ , comme on le vérifie en projetant l'égalité précédente sur le disque de Poincaré. On conclut comme précédemment la nullité de  $d_0$ , ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

## Références

- [1] L. AHLFORS. — *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, Princeton New Jersey, 1966.
- [2] M. V. BERRY, P. J. RICHENS. — *Pseudointegrable systems in classical and quantum mechanics*, Physica, 2D (1981), 495.
- [3] L. BERS. — *Quasiconformal mappings and Teichmüller theory*, Analytic functions, Princeton University Press, Princeton, 89-119, 1960.
- [4] A. KATOK. — *The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard*, Commun. Math. Phys, 111 (1987), 151-160.
- [5] S. KERCKHOFF, H. MAZUR, J. SMILLIE. — *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, Ann. of Math., 124 (1986), 293-311.
- [6] H. MAZUR. — *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. of Math., 115 (1982), 168-200.
- [7] H. MAZUR. — *Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards*, Duke Math. J., 53 (116), 307-314.
- [8] H. MAZUR. — *The growth rate of trajectories of a quadratic differentials*, à paraître dans Ergodic Theory Dyn. Syst., 1987.

## Annexe

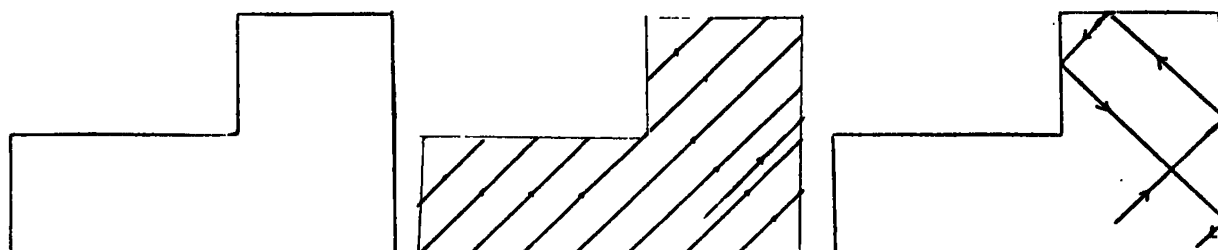


Fig. 1.c

Fig. 2.a

Fig. 2.b

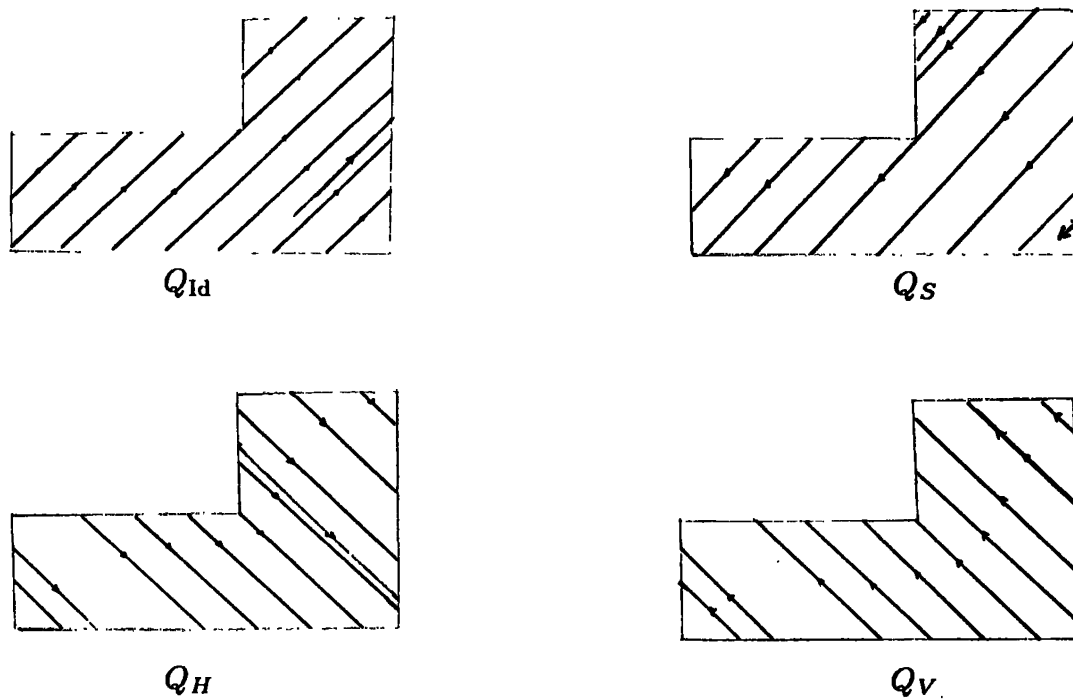
 $Q_{Id}$  $Q_S$  $Q_H$  $Q_V$ 

Fig. 3

Le groupe  $\Gamma$  associé au polygone  $Q$  (Fig. 1.c) est d'ordre 4 et contient comme éléments non triviaux la symétrie  $H$  (resp.  $V$ ) par rapport à l'horizontale (resp. la verticale) et la rotation  $S$  d'ordre 2. On choisit une direction  $\theta$  (Fig. 2.a), avec une esquisse de trajectoire  $C$  (Fig. 2.b). La surface  $\Sigma_{\bar{g}}$  est la réunion de 4 exemplaires  $(Q_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  de  $Q$  (Fig. 3).



Fig. 4.a  
 $Q_{Id}^a$

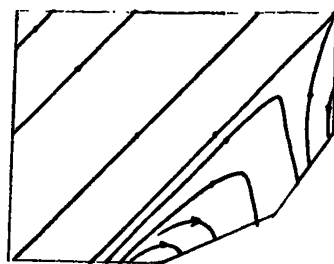


Fig. 4.b  
 $Q_{Id}^b$

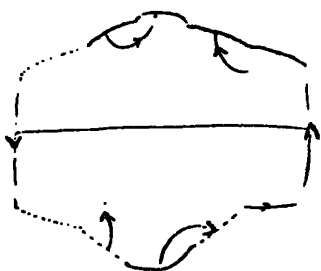


Fig. 6.a

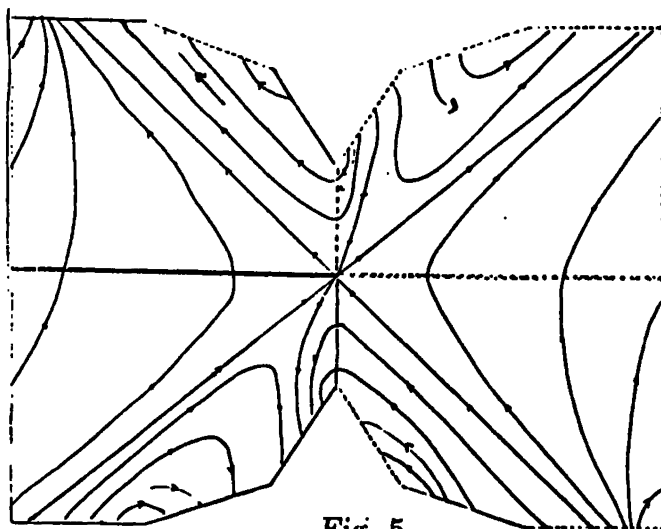


Fig. 5

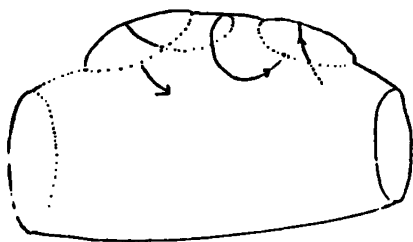


Fig. 6.b

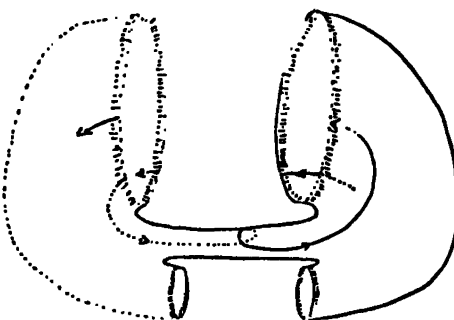


Fig. 6.c

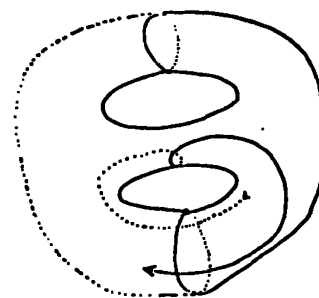


Fig. 6.d

Pour visualiser la surface  $\Sigma_{\bar{\theta}}$ , on déforme topologiquement le polygone feuilleté  $Q_{Id}$  en  $Q_{Id}^a$ ,  $Q_{Id}^b$  successivement (Fig. 4). On obtient un domaine fondamental de  $\Sigma_{\bar{\theta}}$  (Fig. 5) dont on identifie les côtés progressivement (Fig. 6). On a indiqué seulement l'esquisse de la trajectoire  $C$  sur cette dernière figure.