Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Jean-Marc Schlenker

Des immersions isométriques de surfaces aux variétés hyperboliques à bord convexe

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 165-216

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__165_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 165–216

DES IMMERSIONS ISOMÉTRIQUES DE SURFACES AUX VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES À BORD CONVEXE

Jean-Marc SCHLENKER

Résumé

Aleksandrov [Ale58b] et Pogorelov [Pog73] ont montré que les métriques induites sur les surface régulières strictement convexes dans H^3 sont exactement les métriques à courbure $K > -1$. Cet énoncé a plusieurs avatars concernant les polyèdres compacts, idéaux ou hyperidéaux. Des résultats duaux déterminent les troisièmes formes fondamentales du bord, et s'énoncent dans certains cas polyèdraux en termes d'angles dièdres.

On détaille ici certaines extension de ces résultats quand on remplace les sphères convexes de H^3 — qu'on peut voir comme le bord de boules — par les bords, convexes, de variétés hyperboliques de dimension 3. On indique des éléments de preuve de certains résultats récents. On énonce aussi d'autres résultats partiels et des questions ouvertes concernant les variétés hyperboliques, et les variétés anti-de Sitter, à bord convexe.

Abstract

Aleksandrov [Ale58b] et Pogorelov [Pog73] showed that the induced metrics on the smooth, strictly convex surfaces in H^3 are exactly the metrics with curvature $K > -1$. Analogous statements concern compact, ideal or hyperideal polyhedra. Dual results determine the possible third fundamental forms of the boundary, and can be stated in some polyhedral cases in terms of dihedral angles.

We survey here some extensions of those results when the convex spheres in H^3 — which can be considered as boundaries of balls — are replaced by the convex boundaries of hyperbolic 3-manifolds. We also state some other partial results, and some open questions, concerning hyperbolic and anti-de Sitter manifolds with convex boundaries.

2000 Mathematics Subject Classification: 53C25, 53C24, 53C45, 53C50.

Table des matières

1. Motivations et principaux énoncés

La théorie classique des surfaces dans $\mathbf{R}^3$, puis dans H^3, a produit des résultats remarquables concernant les immersions isométriques d'image convexe de surfaces dans H^3 : d'après un résultat d'Aleksandrov et Pogorelov, chaque métrique régulière h sur S^2 à courbure $K > -1$ admet une unique immersion isométrique régulière dans H^3, et son image est une surface strictement convexe.

Cet énoncé admet plusieurs variantes polyèdrales, détaillées dans la section 2. Il existe aussi un énoncé dual [Sch96] : les troisièmes formes fondamentales possibles de ces surfaces sont exactement les métriques à courbure $K < 1$ dont les géodésiques fermées sont de longueur $L > 2\pi$, et chacune est atteinte exactement une fois. Les versions polyèdrales de cet énoncé sont frappantes ; pour les polyèdres compacts c'est un résultat de Andreev [And70], Rivin et Hodgson [RH93], et pour les polyèdres idéaux c'est dû à Andreev [And71]. On pourra consulter la section 2 pour plus de détails.

Il semble que certains de ces résultats au moins peuvent s'étendre au cas où on remplace la surface convexe considérée dans H^3 — qui borde une boule — par le bord d'une variété hyperbolique de dimension 3, lorsque le bord est convexe.

Une manière alternative de formuler la question est la suivante. On considère une variété de dimension 3 compacte à bord, soit M. On souhaite savoir si, étant donné une telle variété – satisfaisant certaines conditions topologiques – elle admet des métriques hyperboliques pour lesquelles le bord est convexe, et, si oui, de quelle manière on peut paramétrer ces métriques par des quantités qu'on peut "lire" sur le bord.

Nos résultats concernent le cas des variétés qui admettent une métrique hyperbolique complète convexe co-compacte. Il s'agit là d'une condition topologique (voir [Thu97]). On va considérer plusieurs types de bord distincts, pour lesquels les résultats connus sont différents, et sont obtenus par des méthodes très nettement différentes. On mettra en avant les cas topologiquement les plus simples, quand la variété à bord considérée est soit une boule – là les résultats, classiques, sont rappelés dans la section 2 – soit le produit d'une surface de genre $g \geqslant 2$ par un intervalle, avec une condition de symétrie sur les métriques construites – les questions peuvent alors se traduire en terme de surfaces équivariantes "fuchsiennes".

Les variétés à bord régulier. — Les énoncés les plus simples, et actuellement les plus satisfaisants, concernent les variétés dont le bord est régulier – un terme que nous entendrons ici dans le sens C^∞ – et strictement convexe. Certains aspects des preuves sont par contre plus élaborées que dans les cas polyèdraux.

On considère une variété $(M,\partial M)$ compacte à bord, qui admet une métrique hyperbolique convexe co-compacte. On dispose de deux résultats, qui paramétrent les métriques hyperboliques sur M, pour lesquelles le bord est convexe, d'une part par les métriques induites sur le bord, et d'autre part par les troisièmes formes fondamentales du bord.

THÉORÈME 1.1 ([Sch02a]). — *Soit g une métrique hyperbolique sur M, pour laquelle le bord est régulier et strictement convexe. Alors la métrique induite sur le bord est à courbure $K > -1$. Réciproquement, chaque métrique h sur ∂M à courbure $K > -1$ est induite par un unique choix de g.*

Notons que la première partie de l'énoncé est immédiate, puisque la métrique induite sur une surfaces strictement convexe de H^3 est à courbure $K > -1$ d'après la formule de Gauss. La partie existence de ce résultat a été montrée par Labourie [Lab92].

Avant d'énoncer le résultat concernant la troisième forme fondamentale du bord, on va rappeler la définition de cette métrique, qui est certainement moins bien connue aujourd'hui qu'au début du XXe siècle. Etant donné une surface $S \subset H^3$ orientable et régulière, on choisit un champ de vecteurs normal unitaire à S, soit N, et on définit l'opérateur de Weingarten de S comme un morphisme de fibré :

$$\begin{array}{cccc} B: & TS & \rightarrow & TS \\ & X & \mapsto & -D_X N\,, \end{array}$$

où D est la connexion de Levi-Civitá de H^3. B est symétrique pour la métrique induite sur S, qu'on notera partout I (elle est classiquement appelée première forme fondamentale de S). On définit alors la troisième forme fondamentale de S comme une forme quadratique sur TS :

$$\forall s \in S, \forall X,Y \in T_sS, I\!I\!I(X,Y) := I(BX,BY)\,.$$

D'après cette définition, si γ est un chemin tracé sur Σ, la longueur de γ pour $I\!I\!I$ mesure de combien le vecteur N "tourne" lorsque on parcourt γ. Lorsque S est strictement convexe, $I\!I\!I$ est une métrique à courbure $K < 1$.

THÉORÈME 1.2 ([Sch02a]). — *Soit g une métrique hyperbolique sur M, pour laquelle le bord est régulier et strictement convexe. Alors la troisième forme fondamentale du bord est à courbure $K < 1$, et ses géodésiques fermées contractiles sont de longueur $L > 2\pi$. Réciproquement, chaque métrique h sur ∂M satisfaisant ces propriétés est la troisième forme fondamentale de ∂M pour un unique choix de g.*

La condition sur les longueurs des géodésiques peut s'exprimer comme demandant que le revêtement universel de ∂M, muni de la métrique relevée de h, est globalement "strictement" $CAT(1)$: sa courbure est inférieure strictement à 1, et ses géodésiques fermées sont de longueur strictement supérieure à 2π.

On détaillera certains aspects des preuves des théorèmes 1.1 et 1.2 dans la section 4. D'autres résultats concernent les variétés dont le bord contient des surfaces régulières complètes mais non compactes, on les évoquera dans la section 5.

Les variétés à bord polyèdral. — On souhaite considérer trois types de variétés à bord polyèdral, dont les bords ressemblent localement à un polyèdre hyperbolique compact, idéal et hyperidéal respectivement. Pour les définir convenablement, on considère une métrique hyperbolique g sur M telle que le bord est convexe. On note d'abord qu'il existe une unique variété hyperbolique complète, convexe co-compacte, dans laquelle (M,g) se plonge isométriquement par une application qui induit un morphisme surjectif sur $\pi_1(M)$. On appellera cette variété l'*extension* de M, et on la notera $E(M)$.

Le revêtement universel de $E(M)$ est évidemment H^3, et le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M, muni de la métrique relevée de g, se plonge isométriquement dans H^3, avec pour image un domaine convexe, qu'on appellera $\widetilde{M}$ par abus de notation. On dira que (M,g) est un variété à bord polyèdral si deux conditions sont satisfaites :

- pour tout domaine convexe Ω de H^3 tel que la restriction à Ω de la projection canonique de H^3 sur $E(M)$ est injective, l'intersection de Ω avec $\widetilde{M}$ est l'intersection de Ω avec un polyèdre $P \subset H^3$.
- le bord de M ne contient pas de courbe fermée qui est une géodésique de (M,g).

La première condition exprime que ∂M "ressemble localement à un polyèdre". La seconde interdit que ∂M rencontre le cœur convexe de M, c'est une condition nécessaire pour les énoncés de rigidité infinitésimale qu'on expliquera plus bas.

Le polyèdre P qui apparaît dans la définition peut être de différents types ; on dira que (M,g) est :

- une *variété à bord polyèdral compact* si P est un polyèdre compact. M est alors l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $E(M)$.

- une *variété à bord idéal*, ou une *variété hyperbolique idéale*, si P est un polyèdre idéal, c'est à dire si tous ses sommets sont sur le bord à l'infini de H^3. Dans ce cas, M est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du bord à l'infini de $E(M)$, on appellera ces points les *sommets* de M.
- une *variété à bord hyperidéal*, ou une *variété hyperbolique hyperidéale*, si P est un polyèdre hyperidéal, c'est-à-dire l'intersection avec le modèle projectif de H^3 (vu comme l'intérieur de la boule unité ouverte B_0 de $\mathbf{R}^3$) d'un polyèdre de $\mathbf{R}^3$ dont tous les sommets sont hors de B_0, mais dont toutes les arêtes rencontrent B_0.

On pourra aussi parler de *variété à bord semi-idéal* si P est un polyèdre semi-idéal, c'est-à-dire dont certains sommets sont "dans" H^3 et d'autres sont idéaux. Notons que, comme la définition des variétés à bord hyperidéal autorise les sommets idéaux, les variétés à bord idéal sont des cas particuliers de variétés à bord hyperidéal.

Un point important est que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $E(M)$, ou de son bord à l'infini, n'est pas necessairement une variété à bord polyèdral. En effet, il se pourrait que le bord de cette enveloppe convexe rencontre le bord du cœur convexe de $E(M)$, et dans ce cas l'une des conditions de la définition des variétés à bord polyèdral n'est pas satisfaite.

Variétés à bord polyèdral compact. — Considérons d'abord le cas où (M,g) est une variété à bord polyèdral compact. La métrique induite sur le bord est une métrique hyperbolique à singularités coniques, et la courbure singulière en chaque point singulier est positive – en d'autre terme, l'angle total autour de chaque singularité est inférieur à 2π. De manière duale, la troisième forme fondamentale du bord est une métrique sphérique à singularités coniques, avec une courbure singulière négative en chaque point singulier, avec des géodésiques fermées contractiles de longueur $L > 2\pi$. On pourrait penser que les théorèmes 1.1 et 1.2 s'étendent à ce cadre ; dans ce cas, chaque métrique à singularités coniques satisfaisant les conditions qu'on a énoncé serait la métrique induite sur le bord (resp. la troisième forme fondamentale du bord) pour un unique choix de g.

Variétés à bord idéal. — Voyons ensuite le cas où (M,g) est une variété à bord idéal. La métrique induite sur ∂M est maintenant hyperbolique, avec un nombre fini de cusps qui correspondent aux sommets de M. On pourrait croire que, comme dans le théorème 1.1, chacune de ces métriques est obtenue pour un unique choix de g. Ceci n'est probablement pas vrai, il est probablement nécessaire de considérer la notion plus générale de variété à bord convexe qui est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans une variété hyperbolique complète convexe co-compacte. Dans ce cadre on devrait pouvoir obtenir un résultat d'existence, mais on ne sait pas si l'unicité s'applique.

Question 1.3. — *Soit h une métrique hyperbolique complète sur ∂M privée d'un nombre fini de points. Existe-t-il un couple (N,E), où N est une variété hyperbolique complète convexe co-compacte difféomorphe à M, et E est un ensemble fini de points dans*

$\partial_\infty N$, tel que la métrique induite sur le bord de l'enveloppe convexe de E dans N est h ? Est-il unique?

On expliquera dans la section 5 pourquoi on peut espérer obtenir un résultat d'existence (voir [Sch03]). La section 5 contient aussi des remarques sur une extension de cette question aux métriques qui sont non pas hyperbolique; mais à courbure constante $K \in]-1,0[$, et sur des questions analogues pour la troisième forme fondamentale du bord.

Pour des raisons qu'on détaillera dans la section 5, l'analogue de la troisième forme fondamentale pour les variétés à bord hyperidéal ne dépend que des angles dièdres, et la condition sur les longueurs des géodésiques de la métrique $I\!I\!I$ se traduisent en termes des sommes, sur les chemins tracés sur le graphe dual de la combinatoire du bord de M, des angles dièdres extérieurs. Ainsi, on a l'analogue suivant du théorème 1.2.

THÉORÈME 1.4. — *On suppose que M est à bord incompressible. Soit Γ un graphe plongé dans ∂M, qui est le 1-squelette d'une cellulation de ∂M. Soit w une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $(0,\pi)$. Il existe une métrique g sur M, telle que (M,g) est une variété à bord idéal, avec une combinatoire du bord donnée par Γ et des angles dièdres extérieurs donnés par w, si et seulement si, pour chaque chemin fermé γ, tracé sur le graphe Γ^* dual de Γ, la somme des valeurs de w sur les arêtes empruntées γ est supérieure à 2π, avec égalité exactement lorsque γ borde une face de Γ^*. Dans ce cas, g est unique.*

L'hypothèse que M est à bord incompressible n'est peut-être pas nécessaire, elle intervient de manière "technique" dans la preuve, comme on le verra dans la section 5.

Variétés à bord hyperidéal. — Supposons maintenant que g est telle que (M,g) est une variété à bord hyperidéal. Le bord de (M,g) contient maintenant deux types de points très différents : d'une part, des points "à l'infini", qui sont dans le bord à l'infini de $E(M)$; et d'autre part des points du bord de M qui sont dans $E(M)$, et au voisinage desquels ∂M ressemble à un polyèdre hyperidéal. L'ensemble des points "finis" de ∂M est homéomorphe à ∂M privé d'un ensemble fini de disques – un pour chaque sommet hyperidéal de M. Cet ensemble est muni d'une métrique, induite par la métrique g, qui est hyperbolique, complète, mais d'aire infinie (sauf si tous les sommets de M sont idéaux, c'est-à-dire si M est une variété à bord idéal).

THÉORÈME 1.5. — *Supposons que M est à bord incompressible. Soit Γ le 1-squelette d'une cellulation de ∂M, et soit $w : \Gamma_1 \to (0,\pi)$ une fonction définie sur l'ensemble des arêtes de Γ. Il existe une structure hyperbolique hyperidéale sur M, avec une combinatoire du bord donnée par Γ et des angles dièdres extérieurs donnés par w, si et seulement si :*

- *la somme des valeurs de w sur chaque chemin fermé de Γ^* est au moins 2π, et strictement supérieure sauf si ce chemin borde une face;*
- *la somme des valeurs de w sur chaque chemin ouvert de Γ^* qui part d'une face et y revient, en étant homotope dans M à un chemin tracé dans f, est strictement supérieure à π.*

Cette structure hyperidéale est alors unique.

Les cœurs convexes de variétés hyperboliques. — Etant donné une variété hyperbolique complète convexe co-compacte N, son *cœur convexe* est le plus petit sous-ensemble Ω de N qui est globalement convexe, c'est-à-dire que, si γ est un segment géodésique de N dont les extrémités sont dans Ω, alors $\gamma \subset \Omega$. Alternativement, on peut le définir comme le plus petit sous-ensemble de N à bord localement convexe, et dont l'injection canonique dans N induit un morphisme surjectif sur les π_1.

Une remarque fondamentale, due à Thurston [Thu97], est que ∂M est une surface (dans $E(M)$) qui est convexe et réglée, et donc developpable. Sa métrique induite est donc hyperbolique. Par contre, ∂M est "plissée" le long d'une lamination géodésique, qui est munie d'une mesure transverse mesurant le "plissage", c'est-à-dire la rotation du vecteur normal lorsqu'on parcourt une courbe tracée sur la surface (on peut consulter [Bon01] pour de subtiles considérations sur les laminations mesurées sur les surfaces). La lamination mesurée de plissage est donc un analogue de la troisième forme fondamentale du bord dans le cas régulier. On dispose d'énoncés qui sont analogues aux parties "existence" des théorèmes 1.1 et 1.2.

THÉORÈME 1.6 (Folklore??). — *Soit h une métrique hyperbolique sur ∂M. Il existe une métrique hyperbolique g sur M, telle que (M,g) soit le cœur convexe d'une variété convexe co-compacte, pour laquelle la métrique induite sur le bord est h.*

THÉORÈME 1.7 (Bonahon, Otal [BO01]). — *Soit M une variété hyperbolique à bord incompressible dont l'intérieur admet une métrique hyperbolique convexe co-compacte. Soit α une lamination mesurée sur son bord. Il existe une métrique géométriquement finie sur M dont α est la lamination de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées:*

- *chaque feuille fermée de α a un poids au plus π ;*
- *si M n'est pas un fibré en intervalle sur une surface compacte sans bord, alors $i(\alpha,\partial A) > 0$ pour tout anneau ou ruban de Möbius essentiel A dans M;*
- *si M est un fibré en intervalle sur une surface compacte sans bord S, alors, pour toute lamination mesurée non-triviale α' sur S, l'intersection entre α' et la projection naturelle de α sur S est non-nulle.*

Le second théorème a été étendu au cas où le bord de M n'est pas incompressible par Lecuire [Lec02]. Ces énoncés seront détaillés dans la section 9.

Empilements de cercles dans le bord de M. — On verra dans la section 8 comment les résultats qu'on vient de mentionner, sur les angles dièdres des variétés à bord idéal ou hyperidéal, conduisent à des résultats sur les empilements de cercles sur le bord de M.

Un *empilement de cercles* dans le plan est un ensemble de cercles orientés bordant des disques ouverts disjoints. Etant donné un empilement de cercle, on définit son *graphes d'incidence*: c'est le graphe ayant un sommet pour chaque cercle, et une arête entre deux sommets si et seulement si les cercles correspondants son tangents. La notion de graphes d'incidence est donc topologique. Les *interstice* d'un empilement de cercle sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des disques ouverts bordés par les cercles, ils correspondent donc aux faces du graphe d'incidence.

Ces notions s'étendent naturellement du plan à la sphère, puisqu'on dispose sur S^2 d'une notion de cercle (les bords des boules géodésiques). Un théorème classique de Koebe [Koe36] affirme que les empilements de cercles sont uniquement déterminés par leur combinatoire : étant donné un graphe Γ sur S^2 qui est le 1-squelette d'une triangulation, il existe un unique empilement de cercles sur S^2 (unique aux transformations de Möbius près) dont ce graphes est le graphe d'incidence. Comme ces cercles sont invariants par les transformation de Möbius, les empilements de cercles vivent en réalité sur $\mathbf{C}P^1$, et on peut même parler d'empilement de cercle sur n'importe quelle surface munie d'une $\mathbf{C}P^1$-structure.

Soit N une variété hyperbolique complète convexe co-compacte. Alors $N = H^3/G$, où G est un groupe agissant par isométries sur H^3, et donc par transformations projectives complexes sur $S^2 = \partial_\infty H^3$. Ainsi, le ∂N est muni canoniquement d'une $\mathbf{C}P^1$-structure. Il faut noter que, parmi les $\mathbf{C}P^1$-structures sur le bord de N, peu proviennent d'une métrique hyperbolique convexe co-compacte ! Par exemple, si N est de la forme $\Sigma \times (0,1)$, où Σ est une surface de genre $g \geqslant 2$, l'espace des $\mathbf{C}P^1$-structures sur le bord de N est de dimension $24g - 24$, alors que l'espace des métriques hyperboliques convexe co-compactes sur N est seulement de dimension $12g - 12$ (car il est paramétré par deux copies de l'espace de Teichmüller de Σ).

THÉORÈME 1.8. — *Soit Γ un graphe plongé dans ∂M, qui est le 1-squelette d'une triangulation de ∂M. Il existe un unique couple (σ, C), où :*

- *σ est une $\mathbf{C}P^1$-structure sur ∂M qui provient d'une métrique hyperbolique convexe co-compacte sur M.*
- *C est un empilement de cercles, dans ∂M, pour σ, dont le graphe d'incidence est Γ.*

On peut voir ce résultat comme un analogue discret de la "version hyperbolique" du théorème d'Ahlfors-Bers, qui affirme que les métriques hyperboliques convexe co-compactes sur M sont paramétrées par l'espace de Teichmüller de ∂M – dans la mesure où les empilements de cercles forment des analogues discrets des structures conformes.

Les variétés anti-de Sitter. — G. Mess [Mes90] a étudié les variétés modelées sur l'espace anti-de Sitter, noté H^3_1, qui est une espace lorentzien de dimension 3 à courbure constante -1. Il s'est intéressé en particulier aux variétés qu'on appelle maintenant GHMC, pour "Globally Hyperbolic Compact Maximal". Il s'agit d'un terme issu de la physique relativiste, et qui exige pour les mathématiciens une traduction : ce sont des variétés M qui admettent une surface plongée S de type espace compacte (qui sera de genre $g \geqslant 2$) telle que chaque point de M est joint à S par une géodésique de type temps, et qu'aucun segment géodésique de type temps n'a ses deux extrémités sur S. Enfin le terme "maximal" signifie que M n'admet pas de plongement isométrique dans une variété anti-de Sitter $N \neq M$. Ces variétés sont toujours difféomorphe au produit avec $\mathbf{R}$ d'une surface de genre au moins 2.

Ces variétés anti-de Sitter GHMC ont la propriété de contenir beaucoup de surfaces convexes de type espace, et même beaucoup de sous-variétés de dimension 3 à bord convexe. On peut donc se poser les deux questions suivantes.

QUESTION 1.9. — *Soit S une surface de genre $g \geqslant 2$, et soient h_1,h_2 deux métriques sur S à courbure $K < -1$. Existe-t-il une unique métrique anti-de Sitter g sur $S \times \mathbf{R}$ telle que les métriques induites sur les deux composantes connexes du bord soient h_1 et h_2 ?*

QUESTION 1.10. — *Soit S une surface de genre $g \geqslant 2$, et soient h_1,h_2 deux métriques sur S à courbure $K < -1$. Existe-t-il une unique métrique anti-de Sitter g sur $S \times \mathbf{R}$ telle que les troisièmes formes fondamentales du des deux composantes connexes du bord soient h_1 et h_2 ?*

Un argument assez simple, utilisant la dualité entre les points et les plans de H^3_1, montre que ces deux questions sont équivalentes.

Les cas modèles. — Les énoncés mentionnés plus haut sont plus abordables dans deux cas particuliers, d'une part lorsque M est une boule, et d'autre part dans le cas qu'on appellera "fuchsien", c'est-à-dire quand M est le produit d'une surface de genre au moins 2 par un intervalle, et admet une involution isométrique qui fixe une surface fermée. Dans le premier cas, on retrouve des résultats en partie classique de la théorie des surfaces ou des polyèdres convexes, qu'on va rappeler dans la section 2. Dans le second cas, on peut se ramener à des questions d'immersions isométriques équivariantes de surfaces, pour lesquelles des outils spécifiques sont disponibles.

Commençons par détailler le cas où M est une boule. On ne peut pas parler du cas anti-de Sitter, le seul cadre possible est donc hyperbolique. Le théorème 1.1 est connu depuis les travaux d'Aleksandrov [Ale58b] et de Pogorelov [Pog73], et le théorème 1.2 est contenu dans [Sch96]. La description des métriques sur les polyèdres hyperboliques compacts a été donnée par Aleksandrov [Ale58b], et le résultat correspondant pour la métrique duale est dû à Andreev [And70] et à Rivin et Hodgson [Riv86, RH93]. Pour la métrique induite sur les polyèdres idéaux il s'agit d'un résultat de Rivin [Riv92], et, pour les angles dièdres de ces polyèdres, de Rivin [Riv96] et Andreev [And71]. Pour les polyèdres hyperidéaux, le résultat sur les métriques induites est dans [Sch98a], alors que la caractérisation des angles dièdres est dûe à Bao et Bonahon [BB02] (certains résultats de [Sch98a] décrivent une version de la métrique duale de ces polyèdres, ce qui n'est pas sans rapport). Le théorème de base concernant les empilements de cercles vient de Koebe [Koe36].

Le cas fuchsien est un peu moins bien compris. La partie existence du théorème 1.1 a été montrée par Gromov [Gro86]. L'analogue du théorème 1.2 dans ce cadre se trouve dans [LS00]. Pour les variétés à bord polyèdral "compact", on ne dispose pas encore d'analogue du théorème 1.1 (c'est l'un des objets du travail de François Fillastre [Fil], en cours de rédaction), mais l'analogue du théorème 1.2 est démontré dans [Sch01c], qui contient aussi un résultat d'existence pour les angles dièdres lorsque le bord est "idéal". Enfin, ce qui concerne hyperidéal est traité par Mathias Rousset [Rou02]. On mentionnera plus bas ce qu'on peut espérer pour les métriques anti-de Sitter.

D'ailleurs, pour certains résultats polyèdraux au moins, l'étude du cas fuchsien est une étape incontournable dans la démonstration de résultats "généraux", pour des raisons qu'on développera plus loin.

2. Rappels sur les surfaces convexes dans H^3

On va rappeler d'abord pourquoi les résultats qu'on a énoncés plus haut sur les variétés hyperboliques à bord convexe se traduisent, quand la variété considérée est une boule, en des résultats classiques sur les surfaces ou les polyèdres convexes.

Surfaces convexe régulières dans H^3. — Soit g une métrique hyperbolique sur la boule B pour laquelle le bord est convexe. Alors (B,g) admet un plongement isométrique dans H^3 (unique aux isométrie hyperboliques près), et son bord ∂B peut donc se voir comme une surface convexe plongée dans H^3. Ainsi, les questions concernant les métriques hyperboliques à bord convexe sur la boule peuvent se traduire en termes – plus classiques – de surfaces convexes plongées dans H^3.

Pour commencer, le théorème 1.1 est équivalent à un résultat classique sur les immersions isométriques de surfaces dans H^3.

THÉORÈME 2.1 (Aleksandrov [Ale58b], Pogorelov [Pog73]). — *Soit h une métrique régulière à courbure $K > -1$ sur S^2. Il existe un unique plongement isométrique régulier de (S^2,h) dans H^3.*

Quant au théorème 1.2, on peut le aussi le traduire en termes de surfaces convexes dans H^3.

THÉORÈME 2.2 ([Sch96]). — *Soit h une métrique régulière à courbure $K < 1$ sur S^2. Il existe une surface régulière dans H^3 dont la troisième forme fondamentale est h si et seulement si les géodésiques fermées de h sont de longueur $L > 2\pi$. Dans ce cas, cette surface est unique (aux isométries de H^3 près).*

La dualité hyperbolique-de Sitter. — C'est un outil important pour passer des questions concernant la troisième forme fondamentale dans H^3 à la métrique induite dans un espace dual, l'espace de Sitter. On trouvera diverses descriptions de cette dualité dans [Thu97, Riv86, RH93, Sch98a, Sch01a], etc.

Comme H^3, l'espace de Sitter de dimension 3, qu'on note S^3_1, peut se voir comme une quadrique dans l'espace de Minkowski de dimension 4, $\mathbf{R}^4_1$:

$$H^3 = \{x \in \mathbf{R}^4_1 \mid \langle x,x\rangle = -1 \wedge x_0 > 0\} ,$$

$$S^3_1 = \{x \in \mathbf{R}^4_1 \mid \langle x,x\rangle = 1\} .$$

Ainsi S^3_1 admet une action isométrique de $SO(3,1)$ qui est transitive sur les repères orthonormés ; c'est un espace lorentzien à courbure constante égale à 1.

La dualité associe à chaque point de H^3 un plan totalement géodésique de type espace de S^3_1, de la manière suivante. Etant donné $x \in S^3$, on considère la droite de $\mathbf{R}^4_1$ passant par 0 et par x, qui est donc de type temps. Son orthogonal $\delta^\perp$ est un plan de dimension 3 passant par 0, de type espace, dont l'intersection avec S^3_1 est le plan dual de x, qu'on note x^*. De la même manière, on associe à chaque point de S^3_1 un plan totalement géodésique orienté de H^3.

La propriété cruciale de cette dualité, qu'on retrouvera sous différentes formes, est que, étant donné deux plans hyperboliques P_1 et P_2 qui se rencontrent, l'angle qu'ils forment est égal à la distance, dans S^3_1, entre les points qui leurs sont duaux.

Soit $S \subset H^3$ une surface régulière strictement convexe. Pour chaque point $x \in S$, on peut considérer le plan orienté tangent à S en x, et le point de S^3_1 qui lui est dual. Lorsque x parcourt S, l'ensemble de ces points duaux parcourt une surface S^*, qui est régulière, strictement convexe et de type espace dans S^3_1. La métrique induite sur S^* est égale à la troisième forme fondamentale de S — l'identification étant réalisée par l'application de dualité — alors que la troisième forme fondamentale de S^* est la métrique induite sur S.

Surfaces convexes dans S^3_1. — En utilisant la dualité, on peut réduire les questions concernant la troisième forme fondamentale des surfaces dans H^3 à des questions d'immersion isométrique de surfaces dans l'espace de Sitter. Ainsi, le théorème 1.2, dans le cas particulier où M est une boule, peut se formuler sous la forme suivante, proche des énoncés de Pogorelov [Pog73] pour les immersions isométriques dans H^3 :

THÉORÈME 2.3 ([Sch96]). — *Soit h une métrique régulière sur S^2, à courbure $K < 1$. Il existe une unique immersion isométrique de (S^2,h) dans S^3_1.*

Polyèdres hyperboliques compacts. — Dans le cas où M est une boule, les questions concernant les variétés à bord polyèdral compact sont résolues, et correspondent à des résultats connus. D'une part, pour la métrique induite sur le bord, on a un résultat d'Aleksandrov.

THÉORÈME 2.4 ([Ale58b]). — *Soit h une métrique hyperbolique à singularités coniques sur S^2, avec des courbures singulières positives en chaque singularité. Il existe un unique polyèdre hyperbolique compact dont la métrique induite est h.*

Etant donné un polyèdre compact P dans H^3 (ou bien dans $\mathbf{R}^3$ ou dans S^3, ça ne change rien pour l'instant) on peut définir sa *métrique duale* de la manière suivante. Soit v un sommet de P, on considère d'abord le *link* de P en v, noté $L(v)$; c'est un polygone sphérique, défini comme l'intersection de P avec une petite sphère centrée en v. On prend ensuite le dual de ce polygone, au sens de la dualité "projective", c'est un autre polygone sphérique, $L^*(v)$, dont les arêtes ont pour longueur les angles de $L(v)$. Ainsi, lorsque deux sommets de P, soient v_1 et v_2, sont adjacents, $L^*(v_1)$ et $L^*(v_2)$ ont des arêtes de même longueur. Ceci permet de "recoller" les intérieures des polygones $L^*(v)$, où v parcourt les sommets de P. On obtient ainsi une métrique sphérique à singularités coniques sur S^2, c'est la métrique duale de P.

La métrique duale doit être considéré comme l'analogue polyèdral de la troisième forme fondamentale. En particulier, étant donné un polyèdre hyperbolique compact P, on peut utiliser la dualité entre les points de H^3 et les plans de S^3_1 — et entre les plans de H^3 et les points de S^3_1 — pour définir le *polyèdre dual* P^* dans S^3_1 : c'est le polyèdre convexe dont les sommets sont les points duaux des faces de P. Ses faces sont de type espace, et sont contenue dans les plans duaux des sommets de P. Combinatoirement, P^* est le polyèdre dual de P, si bien qu'à chacune de ses arêtes correspond une arête de P.

Proposition 2.5. — *La métrique induite sur P^* est la métrique duale de P. La longueur de chaque arête de P^* est égale à l'angle dièdre extérieur de l'arête correspondante de P.*

L'analogue du théorème 1.2 lorsque M est une boule peut se formuler de la manière suivante:

Théorème 2.6 (Rivin, Hodgson [Riv86, RH93]). — *Soit h une métrique sphérique à singularités coniques sur S^2, telle que la courbure singulière en chaque point singulier est négative. Supposons que toutes les géodésiques fermées de h sont de longueur $L > 2\pi$. Il existe alors un unique polyèdre hyperbolique compact dont la métrique duale est h.*

Polyèdres hyperboliques idéaux. — On dans l'espace hyperbolique une notion classique de polyèdre "idéal" : ce sont les polyèdres dont l'image dans le modèle projectif a tous ses sommets sur la sphère à l'infini. La métrique induite sur ces polyèdres est toujours hyperbolique et d'aire finie, mais avec des cusps correspondant aux sommets.

On a aussi une notion bien définie d'angles dièdres extérieurs pour les arêtes de ces polyèdres. Il faut noter que le link des sommets peut encore être défini, en remplaçant la petite sphère autour des sommets (quand ce sont des points de H^3) par une horosphère (pour les sommets idéaux). Comme la métrique induite sur une horosphère est plate, le link d'un sommet est maintenant un polygone euclidien. Le choix de l'horosphère n'est pas unique — on a une famille à un paramètre de choix possibles, correspondant à des horosphères "parallèles" — et le link est donc défini aux homothéties près. Comme la somme des angles extérieurs d'un polygone euclidien est égale à 2π, on voit que la somme des angles extérieurs des arêtes arrivant en un sommet est égale à 2π.

Les polyèdres idéaux ont aussi une métrique duale, on peut le constater par exemple en approchant un polyèdre idéal par une famille de polyèdres compacts et en constatant que leurs métriques duales converge. On peut procéder plus simplement comme suit. Soit P un polyèdre idéal, et soit Γ le graphe dual du 1-squelette de P. Associons à chaque arête de Γ une longueur, égale à l'angle dièdre extérieur de l'arête correspondante de P. La longueur de chaque face de Γ — correspondant à un sommet de P — est égale à 2π, d'après ce qu'on a dit plus haut sur les links des sommets. On peut donc, d'une manière unique, y "coller" un hémisphère. En opérant ainsi pour chaque face de Γ — *i.e.* pour chaque sommet de P — on obtient une métrique sphérique à singularités coniques sur S^2, qu'on appelle la métrique duale de P.

Un point important est que, connaissant la métrique duale de P, il est facile de retrouver sa combinatoire et ses angles dièdres. Ceci contraste fortement avec la situation concernant les polyèdres compacts, pour lesquels la même question n'a pas de réponse explicite (c'est d'ailleurs lié a plusieurs questions intéressantes, voir par exemple [Sch00]). En conséquence, les énoncés analogues au théorème 1.2 pour les polyèdres idéaux ne font intervenir que les angles dièdres.

THÉORÈME 2.7 (Andreev [And71], Rivin [Riv96]). — *Soit Γ un graphe plongé dans S^2, qui est le 1-squelette d'une cellulation. Soit w une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $(0,\pi)$. Il existe un polyèdre hyperbolique idéal P dont la combinatoire est donnée par Γ et les angles dièdres extérieurs par w si et seulement si, pour chaque chemin fermé γ, tracé sur le graphe Γ^* dual de Γ, la somme des valeurs de w sur les arêtes empruntées par γ est supérieure à 2π, avec égalité exactement lorsque γ borde une face de Γ^*. Dans ce cas, P est unique.*

On a aussi un résultat concernant les métriques induites sur les polyèdres idéaux.

THÉORÈME 2.8 (Rivin [Riv92]). — *Soit h une métrique hyperbolique complète, de volume fini, sur S^2 privée de N points. Il existe un unique polyèdre hyperbolique idéal dont la métrique induite est h.*

Il y a bien entendu des polyèdres dont certains sommets sont idéaux, alors que d'autres sont des points "normaux" de H^3, on les appelle polyèdres *semi-idéaux*. Le théorème 2.4 s'étend à ce cas, mais il faut admettre des métriques sur la sphère qui ont des cusps. Le théorème 2.6 s'étend aussi, c'est un résultat de [Rou02] (en particulier pour l'énoncé d'unicité, car l'existence est un conséquence assez facile du théorème 2.6).

Polyèdres hyperidéaux. — Ce qu'on vient de dire pour les polyèdres idéaux s'étend aux polyèdres hyperidéaux — et en sont des conséquences — mais les preuves sont plus délicates.

On peut définir les polyèdres hyperidéaux dans le modèle projectif de H^3, ce sont les intersections avec H^3 (identifié à la boule ouverte B_0 de rayon 1 de $\mathbf{R}^3$) des polyèdres euclidiens dont tous les sommets sont en-dehors de B_0, mais dont toutes les arêtes rencontrent B_0. On dit qu'un sommet est strictement hyperidéal lorsque son image dans le modèle projectif n'est pas sur la sphère unité, sinon c'est un sommet idéal.

On peut aussi en donner une définition purement hyperbolique, bien entendu équivalente : ce sont les surfaces polyèdrales complètes, convexes, sans sommet, telle que, pour chaque bout dont l'aire est infinie, il existe un plan orthogonal à toutes les faces adjacentes à ce bout. L'équivalence entre les deux définitions se voit en remarquant que ce plan n'est autre que le plan dual du sommet strictement hyperidéal correspondant.

On a un résultat concernant la métrique induite sur les polyèdres hyperidéaux, c'est un cas très particulier d'un énoncé de [Sch98a] :

THÉORÈME 2.9. — *Soit h une métrique hyperbolique complète sur S^2 privée de N points. Il existe un unique polyèdre hyperidéal dont la métrique induite est h.*

Il existe aussi un énoncé concernant les angles dièdres :

THÉORÈME 2.10 (Bao et Bonahon [BB02]). — *Soit Γ un graphe plongé dans S^2, qui est le 1-squelette d'une cellulation. Soit w une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $(0,\pi)$. Il existe un polyèdre hyperbolique hyperidéal P dont la combinatoire est donnée par Γ et les angles dièdres extérieurs par w si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- *pour chaque chemin fermé γ, tracé sur le graphe Γ^* dual de Γ, la somme des valeurs de w sur les arêtes empruntées γ est supérieure à 2π ;*
- *pour chaque chemin γ tracé sur Γ^*, qui commence et finit sur une même face, la somme des valeurs de w sur les arêtes empruntées par γ est strictement supérieure à π.*

Dans ce cas, P est unique.

Etant donné un polyèdre hyperidéal P, on peut définir suivant [BB02] le polyèdre tronqué associé ; c'est un polyèdre semi-idéal, obtenu en remplaçant chaque bout de P d'aire infinie par l'intérieur de son intersection avec le plan qui est orthogonal à chacune des faces qui y sont adjacentes, on le notera P_t.

Ces polyèdres tronqués sont très particuliers ; ils ont deux sortes de faces, des faces "noires" correspondant aux faces de P, et des faces "rouges" suivant lesquelles la troncature s'est produite. On note en particulier que :

- chaque sommet est adjacent à exactement une face "rouge" ;
- deux faces "rouges" ne sont jamais adjacentes ;
- l'angle dièdral entre une face "rouge" et une face "noire" est toujours égal à $\pi/2$.

On peut définir la métrique duale d'un polyèdre strictement hyperidéal comme la métrique duale du polyèdre tronqué correspondant. Les métriques qu'on obtient sont alors, elles aussi, très particulières : elles sont obtenues par recollement d'"hémisphères singuliers", chacun étant le quotient par une rotation d'angle au moins 2π du relevé universel d'un hémisphère privé de son "centre". Une remarque importante de [Rou02] est que, étant donné la métrique duale d'un polyèdre hyperidéal, il est facile de reconstruire sa combinatoire et ses angles dièdres. En suivant cette idée, on peut retrouver le théorème 2.10 comme une conséquence du théorème 2.6, appliqué aux polyèdres tronqués — c'est fait par M. Rousset dans [Rou02].

3. Le principe général des preuves

Espaces de métriques et de variétés à bord. — Le principe général de la preuve est le même pour les différentes situations qu'on a esquissées dans les sections précédentes. On définit d'une part un espace de métriques sur ∂M, qu'on notera dans tous les cas $\mathcal{H}$. Pour la preuve du théorème 1.1, $\mathcal{H}$ est l'espace des métriques régulières sur ∂M, à courbure $K > -1$; pour la preuve du théorème 1.2, c'est l'espace des métriques régulières sur ∂M à courbure $K < 1$, telles que les géodésiques qui sont contractiles dans M sont à courbure $L > 2\pi$. Pour les situations polyèdrales, on a des définitions analogues, dans lesquelles on fixe le nombre de points singuliers sur chaque composante connexe du bord. Une différence importante est que, dans ces cas polyèdraux, les espaces de métriques sont de dimension finie.

On définit aussi un espace de métrique hyperboliques sur M, avec des conditions au bord correspondant au problème qu'on se pose. On le notera $\mathcal{G}$ dans tous les cas. Par exemple, pour la preuve des théorèmes 1.1 et 1.2, $\mathcal{G}$ est l'espace des métriques hyperboliques sur M pour lesquelles le bord est régulier et strictement convexe.

On a alors un opérateur naturel $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, qui associe à chaque métrique $g \in \mathcal{G}$ la métrique induite sur le bord, ou la troisième forme fondamentale du bord, suivant qu'on veut montrer un analogue du théorème 1.1 ou un analogue du théorème 1.2. L'objectif sera, dans chaque cas, de montrer que Φ est un homéomorphisme entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. Pour l'atteindre, on doit montrer plusieurs points :

1. $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des espaces de même dimension, ou, lorsque le bord est lisse, Φ est Fredholm d'indice 0 ;
2. $d\Phi$ est partout injectif ;
3. Φ est propre.

Le point (2) est un énoncé de rigidité infinitésimale — on ne peut pas déformer un peu la métrique hyperbolique sur M sans que cela se "lise" sur la métrique induite, ou la troisième forme fondamentale, de son bord. Lorsque (1), (2) et (3) sont assurés, on sait que Φ est un revêtement de $\mathcal{H}$ par $\mathcal{G}$, il faut utiliser des arguments de type topologique pour montrer que c'est en fait un homéomorphisme — ce pourrait être le point (4) dans la description de la stratégie en 3 points décrite ci-dessus.

Applications Fredholm et dimensions des espaces. — Dans les cas polyèdraux, le premier point à montrer est que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont de même dimension. Pour calculer la dimension de $\mathscr{H}$ — en fonction du genre des composantes connexes du bord et du nombre de points singuliers qu'elles portent — il faut utiliser la description des métriques à courbure constante et à singularités coniques, en fonction de la structure conforme sous-jacente, suivant les résultats de [Tro91]. Pour calculer la dimension de $\mathscr{G}$, on utilise d'abord le théorème d'Ahlfors-Bers, qui donne la dimension de l'espace des métriques hyperboliques convexe co-compactes sur une variété donnée, et on termine avec des arguments élémentaires.

Lorsque on cherche des résultats avec un bord régulier, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ ne sont évidemment plus de dimension finie. L'analogue de l'égalité des dimensions est alors le fait que Φ est un opérateur Fredholm d'indice 0 entre $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$. Rappelons que cela signifie que le noyau et le conoyau de $d\Phi$ sont tous deux de dimension finie (c'est la définition d'être Fredholm), et que la différence entre ces deux dimensions (l'indice) est nul.

Le fait que Φ est Fredholm est une conséquence de l'ellipticité des équations aux dérivées partielles sous-jacentes au problème qu'on considère. La manière la plus naturelle de montrer cette propriété serait de considérer l'opérateur linéarisé $d\Phi$ comme associant à une déformation au premier ordre de la métriques sur M une variation au premier ordre de la courbure de Ricci de M et de la métrique induite (resp. de la troisième forme fondamentale) du bord. On peut alors montrer (voir [Sch01b]) en appliquant des techniques classiques que le problème correspondant est un problème au bord elliptique, et il suit que $d\Phi$ est Fredholm.

Néanmoins l'approche utilisée dans [Sch02a] est moins directe, elle décompose les déformations des métriques hyperboliques sur M (pour lesquelles le bord est convexe) en deux composantes :

- les déformations de la variété complète convexe co-compacte $E(M)$ dans laquelle M se plonge isométriquement, le plongement induisant un isomorphisme sur les π_1 ;
- les déformations dans les bouts de $E(M)$ des surfaces correspondant aux composantes connexes du bord de M, ou de leurs relèvements en des immersions équivariantes d'une surface dans H^3.

En appliquant le théorème de l'indice, on peut calculer la dimension de l'espace des déformations isométriques d'une surface équivariante dans H^3 (ou de l'espace des déformations qui ne changent pas la troisième forme fondamentale). En appliquant le théorème d'Ahlfors-Bers, on calcule aussi, dans le produit des espace de métriques hyperboliques complètes sur les bouts de N, quelle est la codimension du sous-espace des éléments qui proviennent d'une métrique complète sur $E(M)$. On constate alors que les deux nombres coïncident, et on en déduit que l'indice de $d\Phi$ est nul.

Rigidité infinitésimale. — C'est le point le plus difficile dans les questions qu'on a mentionné, et c'est surtout parce qu'on le comprend mal que certaines questions restent ouvertes. Il existe au moins quatre outils radicalement différents pour montrer des énoncés de rigidité infinitésimale.

1. Legendre [LegII] et Cauchy [Cau13] [1] ont développé une jolie démonstration, basée sur un argument combinatoire et sur les propriétés des polygones dans S^2, pour montrer la rigidité infinitésimale des polyèdres convexes euclidiens. Cette démonstration a été étendue aux problèmes de rigidité pour les angles dièdres des polyèdres hyperboliques compacts [Riv86, RH93], idéaux, et hyperidéaux [BB02]. I. Iskhakov [Isk00] a aussi étendu cette preuve aux surfaces équivariantes dans $\mathbf{R}^3_1$ dont la représentation associée fixe un point.
2. Pogorelov a défini une application remarquable (décrite dans la section suivante) qui permet de "traduire" les problèmes de rigidité infinitésimale d'un espace à courbure constante dans un autre. En utilisant le résultat de Legendre et Cauchy, on voit que les polyèdres convexes dans H^3 sont aussi infinitésimalement rigides. On va voir ci-dessous que ce type d'idée mène à des résultats de rigidité infinitésimale pour les variétés hyperboliques à bord convexe régulier.
3. Colin de Verdière [CdV91] a remarqué que des énoncés de Thurston [Thu97] sur les empilements de cercles — intimement liés aux polyèdres idéaux, voir section 8 — sont reliés à une fonctionnelle, identifiée par Brägger [Brä92] et Rivin [Riv94] comme étant le volume hyperbolique. On expliquera cette approche dans la section 6, elle a l'avantage important de s'étendre des polyèdres aux variétés à bord polyèdral idéal ou hyperidéal.
4. Pour certaines situation "polyèdrales", on peut "doubler" des objets hyperboliques — par exemple des cœurs convexes des variétés hyperboliques lorsque la lamination de plissage a pour support une union de courbes fermées simples — pour obtenir une cône-variété hyperbolique dont la singularité est un link. On peut alors appliquer un théorème de rigidité de Hodgson et Kerckhoff [HK98] pour ces objets, et en déduire un résultat de rigidité infinitésimale pour les objets polyèdraux de départ.

Compacité. — Montrer que Φ est propre revient à montrer un résultat de compacité : si on se donne une suite d'éléments $g_n \in \mathscr{G}$, telle que la suite des images $\Phi(g_n)$ converge dans $\mathscr{H}$, alors $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente. Là encore plusieurs approches très différentes sont possibles, chacune étant adaptée à certaines situations.

Pour les polyèdres hyperboliques, lorsque on considère les questions concernant la métrique induite, le problème de compacité est simple. Dès qu'on se penche sur la métrique duale, les choses sont plus subtiles. Il est en particulier important de comprendre comment apparaît la condition sur les longueurs des géodésiques. Une idée possible, suivie dans [RH93], consiste à montrer qu'une dégénerescence dans une suite de polyèdres implique l'apparition d'un "long tube fin" et donc à une géodésique très courte pour la métrique induite, et aussi — par dualité — à une géodésique de longueur 2π de la métrique duale. Une approche différente, exploitée dans [Sch98a], utilise la suite des polyèdres duaux (dans l'espace de Sitter), dont une sous-suite converge dans le modèle projectif. Les dégénérescences dans l'espace hyperbolique correspondent alors à

1. La contribution de Legendre, mal connue, a été signalée par I. Sabitov.

des phénomènes géométriques simples dans $\mathbf{R}^3$. L'avantage de cette approche est d'être assez générale — elle s'applique par exemple aux polyèdres hyperidéaux — et on peut trouver dans [Sch01a] une extension à des polyèdres dans S^3_1 qui ne sont pas des duaux de polyèdres hyperboliques, faisant apparaître un autre phénomène de dégénérescence.

Une autre approche, qui s'étend beaucoup mieux des polyèdres aux variétés à bord polyèdral idéal, consiste à choisir une sous-suite telle que la métrique sur chacune des faces converge, ainsi que les quantités qui décrivent les "recollements" entre ces faces (on montre que l'absence de sous-suite sur laquelle ces quantités converge implique l'existence d'une géodésique courte de la métrique induite, et donc d'une géodésique de longueur 2π de la métrique duale). Si on sait que les angles dièdres convergent aussi, on en déduit, en considérant le relèvement des composantes connexes du bord en des surfaces polyèdrales équivariantes dans H^3, que les variétés à bord polyèdral considérées convergent.

Enfin, pour les variétés à bord régulier, la technique utilisée est radicalement différente. Il faut encore considérer les relèvement des composantes connexes du bord en des surfaces équivariantes. Pour ces surfaces, on dispose de résultats de compacité, essentiellement issus du théorème de compacité de Gromov pour les courbes pseudo-holomorphes [Gro85], voir les travaux de Labourie [Lab89, Lab94, Lab97], et [Sch96] pour ce qui concerne la troisième forme fondamentale.

Terminons en mentionnant le problème concernant les laminations de plissages des bords des cœurs convexes des variétés hyperboliques ; le résultat d'existence obtenu par Bonahon et Otal dans [BO01] repose essentiellement sur un énoncé de compacité — on verra pourquoi dans la section 9 — dans un cadre où le problème est particulièrement subtil.

Fin des preuves. — Le point (4) du schéma de preuve mentionné plus haut est celui pour lequel il est le plus difficile de donner description générale. Dans les meilleurs cas, il suffit de montrer que $\mathscr{G}$ est connexe, et que $\mathscr{H}$ est simplement connexe. Dans d'autres cas, en particulier polyèdraux, ça peut être plus compliqué, car il est difficile de montrer directement la connexité d'espaces de métriques polyèdrales. Une solution est d'utiliser la connexité d'espace des métriques régulières, et un argument d'approximation qui montre que, étant données deux métriques polyèdrales, on peut les joindre par un chemin passant seulement par des métriques polyèdrales, mais avec un nombre de points singulier qui peut être élevé.

4. Variétés à bord régulier compact

On va maintenant donner une description plus détaillée des preuves des théorèmes 1.1 et 1.2. On se limitera au cas des variétés quasi-fuchsiennes, c'est-à-dire qu'on supposera que M est le produit d'une surface S de genre $g \geqslant 2$ par un intervalle ; le cas général se montre de la même manière, mais certaines notations sont plus simples, et la représentation heuristique est plus facile, dans ce cas particulier. On se concentrera aussi sur la preuve du théorème 1.1, et on notera simplement à la fin de la section quelles idées supplémentaires conduisent à la preuve du théorème 1.2.

L'opérateur Φ est Fredholm. — Comme on l'a mentionné dans la section 3, on va réduire cet aspect à une étude des surfaces équivariantes dans H^3. On notera pour cela $\mathcal{E}_g$ l'espace des immersions équivariantes régulières et strictement convexes de S dans H^3, considérées aux isométries globales de H^3 près. Rappelons qu'une immersion équivariante de S dans H^3 est un couple (ϕ,ρ), où $\phi : \tilde{S} \to H^3$ est une immersion du revêtement universel de S dans H^3, et $\rho : \pi_1 \to PSL(2,\mathbf{C})$ est un morphisme de groupe, tels que :

$$\forall x \in \tilde{S}, \forall \gamma \in \pi_1(S), \phi(\gamma x) = \rho(\gamma)\phi(x) .$$

On note bien entendu $\mathcal{G}$ l'espace des métriques hyperboliques sur $S \times \mathbf{R}$ pour lesquelles le bord est régulier et strictement convexe. Etant donné une métrique $g \in \mathcal{G}$, on peut relever chacune des composantes connexes de ∂M en une immersion équivariante de S dans H^3. On en déduit une application :

$$\Psi_1 : \mathcal{G} \to \mathcal{E}_g \times \mathcal{E}_g .$$

Notons aussi $\mathcal{M}_g$ l'espace des métriques régulières à courbure $K > -1$ sur S ; d'après la formule de Gauss, la métrique induite sur S par une immersion équivariante strictement convexe est à courbure $K > -1$, si bien qu'on a une application naturelle $\psi_2 : \mathcal{E}_g \to \mathcal{M}_g$. En notant $\Psi_2 := \psi_2 \times \psi_2 : \mathcal{E}_g \times \mathcal{E}_g \to \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g$, on voit que :

$$\Phi := \Psi_2 \circ \Psi_1 .$$

Soit ρ une représentation de $\pi_1(S)$ dans H^3, on note $\mathcal{E}_g(\rho)$ l'ensemble des immersions équivariantes de S dans H^3 dont la représentation est ρ. Considérons la différentielle $d\psi_2$ de l'application ψ_2, en un point $(\phi,\rho) \in \mathcal{E}_g(\rho)$. Elle associe à chaque déformation infinitésimale d'une immersion équivariante la variation au premier ordre de sa métrique induite. Une déformation infinitésimale de (ϕ,ρ) est déterminée par un champ de vecteur de H^3 défini le long de $\phi(\tilde{S})$, ayant une propriété d'équivariance. Par contre, les déformations tangentes à $\mathcal{E}_g(\rho)$ correspondent aux champs de vecteurs *invariants* sous l'action de ρ, c'est-à-dire aux sections régulières du fibré F sur S qui est le pull-back du fibré tangent de de H^3 par l'immersion ϕ.

Le fibré F peut se décomposer en deux composantes, correspondant aux composantes tangentielle et normale à S, soit :

$$F = TS \oplus NS ,$$

où NS est simplement le fibré trivial en droite réelle sur S. La variation de la métrique induite qui correspond à une section u de NS est simplement : $u\mathit{II}$, où II est la seconde forme fondamentale de S. Ainsi, pour comprendre l'opérateur ψ_2, il faut comprendre l'opérateur $\psi_2^{\perp}$, qui a une section de TS associe la composante orthogonale à II de la variation au premier ordre de la métrique induite de S. Or il est assez facile de voir que cet opérateur $\psi_2^{\perp}$ est elliptique du premier ordre, et que son symbole principal est celui de l'opérateur $\overline{\partial}$ de la seconde forme fondamentale de S. Ainsi :

$$\mathrm{ind}(\psi_2^{\perp}) = -(6g-6)$$

d'après le théorème de Riemann-Roch (ou le théorème de l'indice). En reprenant la définition qu'on vient de donner, on voit que ψ_2 est aussi Fredholm, d'indice :

$$-(6g-6) + 12g - 12 = 6g - 6\,,$$

car l'espace des représentation du groupe fondamental de S dans H^3 est de dimension $12g-12$. Donc Ψ_2 est Fredholm d'indice $12g-12$.

Mais un élément $((\phi_1,\rho_1),(\phi_2,\rho_2))$ de $\mathscr{E}_g \times \mathscr{E}_g$ est dans l'image de Ψ_1 si et seulement si les représentations ρ_1 et ρ_2 sont égales ; elles sont alors égales à la représentation d'holonomie de la métrique qui est leur image réciproque, qui est unique. Comme l'espace des représentations de $\pi_1(S)$ est de dimension $12g-12$, on voit ainsi que Ψ_1 est Fredholm d'indice $-(12g-12)$, et donc que Ψ est Fredholm d'indice 0.

Compacité. — L'élément central dans la preuve de l'énoncé de compacité nécessaire pour le théorème 1.1 concerne les suites d'immersions isométriques d'une surface à courbure $K > -1$ dans H^3.

LEMME 4.1 ([Lab97]). — *Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques C^∞ sur D^2 à courbure $K > -1$, qui converge vers une métrique régulière h à courbure $K > -1$. Supposons que $d_h(0,\partial D^2) \geqslant 1$. Soit $x_0 \in H^3$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'immersions isométriques $f_n : (D^2,h_n) \to H^3$, avec $f_n(0) = x_0$. Alors :*

- *soit il existe une sous-suite de (f_n) qui converge C^∞ vers une immersion isométrique de (D^2,h) dans H^3.*
- *soit il existe un segment géodésique $\gamma \ni 0$ sur lequel une sous-suite de (f_n) converge vers une immersion isométrique vers un segment de H^3 ; et, de plus, l'intégrale de H_n sur chaque segment transverse à γ diverge quand $n \to \infty$.*

On considère donc une suite d'éléments g_n de $\mathscr{G}$, qui sont donc des métriques hyperboliques sur M pour lesquelles le bord est convexe, telle que la suite $(\Phi(g_h))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit $\partial_i M$ l'une des composantes connexes du bord de M. On la relève en une surface équivariante dans H^3, qui réalise donc une suite d'immersions isométriques équivariante de $\partial_i M$, munies des métriques qui sont les restrictions à $\partial_i M$ des $\Phi(g_n)$, dans H^3.

La seconde alternative de ce lemme est interdite, car l'énoncé sur la divergence de l'intégrale de la courbure moyenne montrerait que la surface devrait être "très courbée", ce qui n'est possible — la surface étant plongée — qu'en présence d'un long tube fin, ce qui contredirait la convergence de la métrique induite. Le lemme montre donc que la suite d'immersions équivariantes doit converger (après extraction d'une sous-suite) au voisinage de tout point, et donc, par un argument diagonal, sur tout compact.

En appliquant ce résultat aux deux composantes connexes du bord, on voit aisément que la suite de métriques $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

L'application de Pogorelov. — On passe maintenant au point crucial de la preuve du théorème 1.1, la rigidité infinitésimale des variétés hyperboliques à bord convexe. On va utiliser pour cela un outil remarquable découvert par Pogorelov [Pog73], qui permet de "traduire" les énoncés de rigidité infinitésimale de H^3 dans $\mathbf{R}^3$, où ils sont plus facile à aborder.

L'application de Pogorelov est un morphisme de fibrés $\Phi_H : TH^3 \to TB^3$, où B^3 est la boule unité dans $\mathbf{R}^3$, qui est "au-dessus" de l'application du modèle projectif de H^3, dans le sens où, pour $v \in T_xH^3$, $\Phi_H(v) \in T_yB^3$, où y est l'image de x dans le modèle projectif. Elle peut se définir simplement de la manière suivante. On note x_0 l'image réciproque de 0 dans H^3, et, en chaque point $x \neq x_0$ de H^3, on appelle "radiale" la direction de x_0, et "latérale" les directions orthogonales à la direction radiale. De même, dans B^3, on appelle radiale la direction de 0, et "latérale" les directions orthogonales à la direction radiale. Alors :

- Φ_H préserve la norme, et la direction, des vecteurs radiaux ;
- Φ_H agit sur les vecteur latéraux comme la différentielle de l'application du modèle projectif, *i.e.* "comprime" leur norme d'un facteur $1/\cosh(\rho)$, où ρ est la distance (hyperbolique) à x_0.

La propriété fondamentale de cette application est qu'elle préserve les déformations isométriques.

LEMME 4.2. — *Soit S une sous-variété de H^3, et soit $\overline{S}$ son image dans B^3 par le modèle projectif. Soit v un champ de vecteurs défini le long de S, et soit $\overline{v} := \Phi_H(v)$. Alors $\overline{v}$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\overline{S}$ si et seulement si v est une déformation isométrique infinitésimale de S. En particulier, Φ_H envoie les champs de Killing de H^3 sur des champs de Killing de B^3.*

Le second point suit du premier en prenant pour S l'espace H^3 tout entier.

Géométrie euclidienne. — On souhaite montrer que la différentielle de l'application $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est partout injective. On considère donc un point $g \in \mathcal{G}$, c'est-à-dire une métrique hyperbolique sur M pour laquelle ∂M est régulier et strictement convexe. On considère le revêtement universel de M, muni de la métrique relevée de g ; on peut le considérer comme un domaine de H^3, à bord convexe, soit Ω. Bien entendu, Ω n'est pas compact, mais rencontre au contraire le bord à l'infini de H^3 le long de l'ensemble limite de M, qu'on notera Λ. On notera aussi $S := \partial\Omega$, qui est donc une surface complète de H^3, régulière et strictement convexe, dont le bord à l'infini est H^3.

On considère l'image de S dans B^3 par le modèle projectif, c'est une surface $\overline{S}$, strictement convexe, qui rencontre la sphère unité S^2 le long de l'image de Λ, qu'on notera encore ici Λ par abus de notation. Les propriétés cruciales de $\overline{S}$ sont les suivantes.

LEMME 4.3. — *$\overline{S}$ est $C^{1,1}$; au voisinage de Λ, son vecteur normal tend vers le vecteur normal à S^2. De plus, ses courbures principales sont comprises entre deux constantes strictement positives.*

La preuve de ces deux points utilise de manière cruciale le fait que, en dehors d'un compact de H^3, l'angle entre S et la direction radiale est toujours supérieure à une constante $\alpha_0 > 0$. On peut en déduire directement le premier point, simplement en considérant l'action du modèle projectif, qui "comprime" les directions radiales par un facteur $1/\cosh^2(\rho)$ (où ρ est la distance à x_0) et les directions latérales par un facteur seulement $1/\cosh(\rho)$.

Pour le second point, on note d'abord que, dans H^3, les courbures principales de S sont bornées entre deux constantes strictement positives, simplement par compacité de M. Ensuite, il faut remarquer que, le modèle projectif étant projectif, il agit de manière *conforme* sur la seconde forme fondamentale des surfaces, le facteur conforme étant donné par l'angle entre l'image du vecteur normal à la surface dans H^3 et le vecteur normal à la surface image dans B^3. La transformation des courbures principales est donc déterminée par la variation de la métrique induite sur S. Mais la minoration d'angle qu'on vient de mentionner permet de montrer aisément que la transformation de la métrique induite sur S en la métrique induite sur $\overline{S}$ est quasi-conforme, avec un facteur conforme qu'on peut estimer ; on en déduit que les courbures principales de $\overline{S}$ sont égales, à un facteur majoré près, à celles de S.

Estimées sur le champ de déformation hyperbolique. — On considère maintenant une déformation au premier ordre de g, soit $\dot{g}$. On peut en déduire de manière classique — suivant Calabi [Cal61] et Weil [Wei60] — une 1-forme ω sur M à valeur dans un sl(2,**C**)-fibré canonique sur M, qu'on va noter E. En chaque point $x \in M$, la fibre E_x de E est constituée des "isométries infinitésimales" de M au voisinage de x, c'est-à-dire des champs de Killing hyperboliques au voisinage de x. Il y a une connexion plate naturelle sur E, qu'on notera D : une section κ de E est plate si elle correspond partout au même champ de Killing.

On a aussi une identification naturelle, en chaque point $x \in M$, de E_x avec $T_xM \oplus T_xM$. Le premier terme correspond aux *translations pures* en x, c'est-à-dire aux champs de Killing qui sont les différentielles de translations hyperboliques ayant x dans leur axe. Le second terme correspond aux rotations infinitésimales dont l'axe contient x. On utilisera plus bas cette identification, et on désignera souvent une section de E par les notations (τ,σ), où τ et σ sont des champs de vecteurs. Avec ces notations, la connexion D s'écrit simplement en fonction de la connexion de Levi-Cività ∇ de M :

$$\forall w \in TM, D_w(\tau_x,\sigma_x) = (\nabla_w\tau_x + w \wedge \sigma_x, \nabla_w\sigma_x - w \wedge \tau_x) . \tag{1}$$

Revenons à notre déformation infinitésimale $\dot{g}$ de g, on en déduit donc la 1-forme ω à valeurs dans E, et, par compacité de M, ω est bornée : pour tout $x \in M$ et tout $w \in T_xM$, $\|\omega(w)\| \leqslant C_\omega \|w\|$, où la norme utilisée sur E provient de l'identification avec $TM \oplus TM$. On intègre ω en une section $\kappa = (\tau,\sigma)$ de E sur $\overline{M}$, avec $\kappa(x_0) = 0$; en utilisant (1) et la majoration sur ω, on peut.obtenir facilement le lemme suivant.

LEMME 4.4. — *Les composantes radiales de τ et de σ sont majorée, à distance ρ de x_0, par $C_\omega \rho$; leurs composantes latérales sont majorées par $C_\omega e^\rho$. De plus, si on note R le vecteur unitaire radial, $\tau + R \wedge \sigma$ est borné par C_ω.*

Passage au champ de déformations euclidien. — La même construction que celle qui mène au fibré E conduit à définir sur $\overline{\Omega}$ — l'image de $\omega = \widetilde{M}$ par l'application projective — un fibré $\overline{E}$, dont la fibre en un point $\overline{x} \in \overline{\Omega}$ est l'espace vectoriel des champs de Killing euclidiens définis au voisinage de $\overline{x}$. On peut encore identifier la fibre $\overline{E}_{\overline{x}}$ de $\overline{E}$ en un point $\overline{x} \in \overline{\Omega}$ avec $T_{\overline{x}}\overline{\Omega} \oplus T_{\overline{x}}\overline{\Omega}$, la première composante correspondant aux translations, et la seconde aux rotations dont l'axe contient $\overline{x}$.

D'après le lemme 4.2, l'application de Pogorelov envoie les champs de Killing hyperbolique sur des champs de Killing euclidiens, et on en déduit un morphisme de fibré naturel de E dans $\overline{E}$, qui "vit" au-dessus du modèle projectif. Ainsi, on associe à ω une 1-forme $\overline{\omega}$ sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\overline{E}$, et l'intégration de $\overline{\omega}$ conduit à une section $\overline{\kappa}$ de $\overline{E}$, avec $\overline{\kappa}(0) = 0$, qu'on note aussi $(\overline{\tau},\overline{\sigma})$ avec l'identification $\overline{E} = T\overline{\Omega} \oplus T\overline{\Omega}$.

En reprenant les estimées hyperboliques du lemme 4.4, et grâce à de petits calculs qu'on épargnera ici au lecteur éventuel, on obtient des majorations sur les composantes de $\overline{\kappa}$. A partir d'ici, pour tout $x \neq 0$ et tout $v \in T_x\Omega$, on notera v^r et $v^\perp$ les composantes radiale et latérale, respectivement, de v. Les même notations seront utilisées dans H^3.

LEMME 4.5. — *Soit $\overline{x} \in \overline{\Omega}$, avec $r := d(\overline{x},0) > 0$. Alors, en $\overline{x}$, on a pour une constante $C > 0$:*

$$\|\overline{\tau}^r(x)\| \leqslant C|\log(1-r)|\,,\ \|\overline{\tau}^\perp(x)\| \leqslant C\sqrt{1-r}\,,$$

$$\|\overline{\sigma}^r(x)\| \leqslant C|\log(1-r)|\,,\ \|\overline{\sigma}^\perp(x)\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{1-r}}\,.$$

Estimées Hölderiennes sur les déformations de $\overline{S}$. — On reprend le cadre mentionné plus haut, c'est-à-dire qu'on considère une déformation infinitésimale $\dot{g}$ de g. On a déjà vu comment on en déduit une section (τ,σ) de E sur Ω, et donc une section $(\overline{\tau},\overline{\sigma})$ de $\overline{E}$ sur $\overline{\Omega}$. Soit u la restriction de τ à $\partial\Omega$. Si on suppose que $\dot{g}$ ne change pas, au premier ordre, la métrique induite sur ∂M, alors le relevé de $\dot{g}$ à Ω ne change pas non plus la métrique induite sur $\partial\Omega$, et u est une déformation infinitésimale isométrique de $\partial\Omega$. Alors, d'après les propriétés de l'application de Pogorelov, si on note $\overline{u}$ la restriction de $\overline{\tau}$ à $\partial\overline{\Omega}$, $\overline{u}$ est encore une déformation isométrique infinitésimale de $\overline{S} \subset \partial\overline{\Omega}$.

Soit maintenant $\overline{v}$ la projection orthogonale de $\overline{u}$ sur $\overline{S}$. Il est clair que $\overline{v}$ est régulier sur $\partial\overline{\Omega}$, mais on a un résultat de régularité plus subtil, sur $\partial\overline{\Omega} := \partial\overline{\Omega} = \overline{S} \cup \Lambda$.

LEMME 4.6. — *$\overline{v}$ a une extension continue à $\partial\overline{\Omega}$: pour tout $r < 1$, cette extension est dans l'espace de Hölder C^r. De plus, l'intégrale sur $\partial\overline{\Omega}$ de $\|\nabla\overline{v}\|^2$ converge.*

La preuve de ce lemme crucial utilise essentiellement le lemme 4.5. Il faut montrer d'une part que la composante latérale de $\overline{\tau}$ se comporte "bien", d'autre part que sa composante radiale se comporte moins bien, mais d'une manière suffisamment controlée pour que sa projection orthogonale sur $\overline{S}$ reste dans C^r pour tout $r < 1$.

On sait par ailleurs que Λ est de dimension de Hausdorff inférieure strictement à 2 (c'est un résultat de D. Sullivan [Sul79]). En utilisant ce fait en plus du lemme précédent, on obtient par un argument élémentaire :

LEMME 4.7. — *$\overline{v}$ est dans H^1 sur $\partial\overline{\Omega} = \overline{S} \cup \Lambda$.*

Rigidité infinitésimale. — Le fait que $\overline{v}$ est la composante tangentielle d'une déformation isométrique infinitésimale de $\overline{S}$ se traduit par le fait qu'il est, sur $\overline{S}$, solution d'une équation elliptique, qu'on va maintenant décrire. On note $\Omega^{0,1}_{I\!I}$ le fibré sur $\overline{S}$ des 1-formes à valeurs vectorielles w telles que :

$$\forall x \in T\overline{S}, w(\overline{J}x) = \overline{J}w(x) ,$$

où $\overline{J}$ est la multiplication complexe associée à la seconde forme fondamentale $I\!I$ de $\overline{S}$. On pose : $\overline{w} := B^{-1}\overline{v}$, on vérifie alors que $\overline{w}$ est aussi dans H^1, mais sur $\overline{S}$ munie de sa troisième forme fondamentale. On appelle $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Cività de la troisième forme fondamentale $I\!I\!I$ de $\overline{S}$. $\overline{w}$ est alors solution de l'équation :

$$\overline{\partial}_{I\!I}\overline{w} = 0 ,$$

où :

$$\overline{\partial}_{I\!I} : T\overline{S} \to \Omega^{0,1}_{I\!I} ,$$
$$\forall x \in T\overline{S}, (\partial_{I\!I}\overline{w})(x) = \tilde{\nabla}_x\overline{w} + \overline{J}\tilde{\nabla}_{\overline{J}x}\overline{w} .$$

Notons que $\overline{\partial}_{I\!I}$ est un opérateur $\overline{\partial}$ "modifié", puisqu'il est défini en utilisant la structure complexe de $I\!I$ mais la connexion de Levi-Cività de $I\!I\!I$. Néanmoins, $\overline{\partial}_{I\!I}$ a le même symbole principal que l'opérateur $\overline{\partial}$ de $I\!I$, et c'est donc un opérateur elliptique, Fredholm d'indice 6. Il agit continuement des sections H^1 de $T\overline{S}$ dans les section L^2 de $\Omega^{0,1}_{I\!I}$.

Il nous suffira donc de montrer que $\partial_{I\!I}$ n'a pas d'autre solution H^1 que des champs de vecteurs correspondant à des déformations triviales. Comme l'espace des déformations triviales est de dimension 6, il faut montrer que le noyau de $\partial_{I\!I}$ est de dimension 6, ou bien, comme $\partial_{I\!I}$ est d'indice 6, que son co-noyau est réduit à 0.

Or l'adjoint de l'opérateur $\overline{J\partial_{I\!I}}$ est l'opérateur d^{∇}, agissant des section de $\Omega^{0,1}_{I\!I}$ dans les 2-formes à valeur dans $T\overline{S}$, défini par:

$$(d^{\nabla}h)(x,y) = (\nabla_x h)y - (\nabla_y h)x .$$

Or l'existence d'une solution à cette équation est équivalente à l'existence d'une solution à l'équation :

$$d^{\nabla}\dot{B} = 0 , \ \mathrm{tr}(B^{-1}\dot{B}) = 0 .$$

On reconnait là une autre manière de décrire les déformations isométriques infintésimales d'une surface, mais maintenant en terme de la variation au premier ordre de l'opérateur de Weingarten B.

On peut alors utiliser une approche classique de la rigidité infinitésimale des surfaces dans $\mathbf{R}^3$, pour obtenir, par une suite d'intégrations, qu'il n'existe pas de solution $\dot{B}$ non nulle à l'équation écrite plus haut qui soit L^2 sur $\partial\overline{\Omega}$. On en déduit qu'il n'y a pas de solution L^2 à $d^\nabla h = 0$, et donc qu'il n'y pas de solution non triviale de $\overline{\partial}_I \overline{w} = 0$, ce qui est le résultat cherché.

Conclusions. — Les éléments mentionnés plus haut permettent essentiellement de montrer le théorème 1.1 ; en réalité, il y a d'autres questions techniques, par exemple liées à l'utilisation du théorème d'inversion locale de Nash-Moser (nécessaire ici car le cadre C^∞ est obligatoire pour des raisons de "perte de régularité"). On les passera sous silence ici.

Par ailleurs, les mêmes arguments permettent de montrer, avec quelques adaptations, le théorème 1.2. La rigidité infinitésimale se montre pour la troisième forme fondamentale comme pour la métrique induite — avec en plus l'utilisation de la dualité entre H^3 et S^3_1 — grâce à une application de Pogorelov pour S^3_1 . La compacité s'obtient en utilisant des résultats de [Sch96].

En fait, la similarité entre la preuve pour la métrique induite et pour la troisième forme fondamentale indique qu'on devrait pouvoir résoudre des problèmes "mixtes", où on prescrit la métrique induite sur l'une des composantes connexes du bord et la troisième forme fondamentale sur une autre. Par exemple, dans le cas quasi-fuchsien, on peut poser la question suivante :

Question 4.8. — *Soit S une surface de genre $g \geqslant 2$, soit h_1 une métrique à courbure $K > -1$ sur S, et soit h_2 une métrique à courbure $K < 1$ sur S, dont les géodésiques contractiles sont de longueur $L > 2\pi$. Existe-t-il une unique métrique hyperbolique sur $S \times [-1,1]$, pour laquelle le bord est régulier et strictement convexe, avec la métrique induite h_1 sur $S \times \{1\}$ et la troisième forme fondamentale $S \times \{-1\}$?*

On peut espérer que la preuve qu'on a mentionnée, pour la rigidité infinitésimale — qui est encore le point crucial — fonctionne encore pour ce problème. Il faudrait considérer des surfaces dans $\mathbf{R}^3$ constituées de l'image par le modèle projectif d'une composante connexe du bord de $\widetilde{M}$, et de la surface duale de l'autre composante connexe de $\widetilde{M}$.

5. Variétés dont le bord contient des surfaces complètes

Description des objets. — Revenons aux théorèmes 1.1 ou 1.2; on peut les voir comme décrivant les métriques induites, ou les troisièmes formes fondamentales, de bords de sous-ensembles convexes compacts dans des variétés hyperboliques complètes convexes co-compactes. Les résultats sur les polyèdres idéaux ou hyperidéaux suggèrent de considérer des objets plus généraux, qui seraient des sous-ensembles convexes mais pas compacts de variétés hyperboliques convexes co-compactes.

On souhaite donc considérer des variétés hyperboliques de dimension 3 à bord, non compactes, et qui ont un "bord à l'infini" en plus de leur bord "usuel". Bien sur il est nécessaire, pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité, d'ajouter des conditions sur le comportement à l'infini du bord "usuel". Une condition semble donner de bons résultats. Soit M une telle variété, elle se plonge isométriquement dans une unique variété hyperbolique convexe co-compacte $E(M)$ (le plongement induisant un isomorphisme entre leurs π_1). On demande que le bord à l'infini de M dans $\partial_\infty E(M)$ soit une réunion de disques, au sens de la géométrie de Möbius de $\partial_\infty E(M)$. On appellera une telle variété "variété hyperbolique à bord circulaire". On peut admettre que certains des cercles soient réduits à des points.

Il faut certainement aussi des hypothèses restrictives sur le type de métriques qu'on peut prescrire sur ∂M, en ce qui concerne leur comportement à l'infini ; il est probable qu'il soit nécessaire de considérer des métriques asymptotiquement hyperboliques. Néanmoins ceci n'apparaît pas clairement pour l'instant, car les résultats dont on dispose où qu'on peut espérer dans un futur proche concernent les métriques à courbure constante.

Quelques résultats quand M est une boule. — Dans ce cas on peut — comme on l'a déjà vu — formuler les énoncés en termes de surfaces convexes dans H^3. On dispose de certains énoncés partiels, limités aux surfaces à courbure constante, dans [Sch98b].

THÉORÈME 5.1. — *Soit h une métrique à courbure constante $K \geqslant -1$ sur S^2 privée de N points, $N \geqslant 1$. Il existe une unique surface complète convexe dans H^3 dont le bord à l'infini est constitué de cercles (pour la géométrie de Möbius de $\partial_\infty H^3$) et dont la métrique induite est h.*

THÉORÈME 5.2. — *Soit h une métrique à courbure constante $K \in]0,1[$ sur S^2 privée de N points, $N \geqslant 1$. Supposons que les géodésiques fermées de h sont de longueur $L > 2\pi$. Il existe une unique surface complète convexe dans H^3 dont le bord à l'infini est constitué de cercles (pour la géométrie de Möbius de $\partial_\infty H^3$) et dont la troisième forme fondamentale est h.*

Il serait souhaitable d'étendre ces résultats à la situation où M a plus de topologie, ce qui conduit aux questions suivantes. On considère toujours une variété M compacte à bord qui admet une métrique hyperbolique convexe co-compacte.

QUESTION 5.3. — *Soit E un ensemble fini de points sur ∂M, avec un point au moins sur chaque composante connexe de ∂M. Soit h une métrique complète sur $\partial M \setminus E$ à courbure constante $K \in]-1,0[$. Existe-t-il une unique métrique hyperbolique sur M, à bord convexe circulaire, telle que la métrique induite sur le bord est h ?*

QUESTION 5.4. — *Soit E un ensemble fini de points sur ∂M, avec un point au moins sur chaque composante connexe de ∂M. Soit h une métrique complète sur $\partial M \setminus E$ à courbure constante $K \in]-\infty, 0[$, dont les géodésiques fermées qui sont contractiles dans M sont de longueur $L > 2\pi$. Existe-t-il une unique métrique hyperbolique sur M, à bord convexe circulaire, telle que la troisième forme fondamentale du bord est h ?*

Des arguments réguliers. — Pour construire de tels objets, un point de départ est donné par un résultat de Labourie [Lab97, Lab00] d'existence de surfaces à courbure constante K, pour $K > -1$, ayant un bord à l'infini donné dans H^3. Les espaces considérés sont de dimension finie — l'espace des métriques complètes à courbures constantes sur une surface, l'espace des variétés hyperboliques convexes co-compactes munies d'un nombre fini de cercles dans leur bord à l'infini — et ces espaces sont de même dimension, si bien qu'on peut à nouveau appliquer une méthode de déformation.

Il faut alors montrer les mêmes points que ceux mentionnés plus haut :

- les espaces de métriques sur ∂M et les espaces de metriques hyperboliques correspondantes sur M sont de même dimension.
- un résultat de rigidité infinitésimale ;
- un énoncé de compacité ;
- des énoncés d'ordre topologique pour conclure.

On peut supposer que la preuve de rigidité infinitésimale utilisée dans [Sch02a], et mentionnée dans la section 4, pourrait s'étendre à cette situation, c'est ce qu'on espère faire dans [Sch03]. Il faudrait pour cela montrer qu'on peut considérer le revêtement universel de M comme un convexe Ω dans H^3, puis son image $\overline{\Omega}$ dans la boule unité de $\mathbf{R}^3$. Comme cette surface n'est pas compacte, il faut la "compléter" en lui ajoutant des disques de S^2. Puis on pourrait espérer suivre la preuve mentionnée dans la section 4. Cette approche est d'ailleurs utilisée dans [Sch98b] dans un cas particulier (nettement plus simple).

Pour la compacité, les méthodes utilisées pour les variétés à bord régulier compact devraient pouvoir s'appliquer.

Des arguments quasi-conformes. — Il existe un autre type d'arguments possibles pour montrer des résultats d'existence, surtout lorsqu'on veut prescrire des métriques induites hyperboliques sur le bord. Dans ce cas, les variétés qu'on considère sont l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de cercles (ou de points) dans le bord, et elles sont bien evidemment uniquement déterminéees par le choix de la métrique hyperbolique convexe co-compacte sur $E(M)$, et d'une famille de disques (ou de points) dans le bord à l'infini $\partial_\infty E(M)$. On dispose alors de deux structures conformes sur le bord : l'une, c_∞, provenant de la structure conforme à l'infini sur $\partial_\infty E(M)$, l'autre, c_I, étant la structure conforme de la métrique induite sur ∂M.

Comme M est déterminée par c_∞, on a une application naturelle qui envoie c_∞ sur c_I, c'est donc une application d'un espace de Teichüller dans lui-même. Il suffirait, pour obtenir le résultat, de montrer que cette application est propre, puisque cela impliquerait qu'elle est de degré 1, et donc surjective. Or on dispose d'outils puissants pour montrer cette propreté, en utilisant essentiellement seulement la convexité du bord ; c'est lié par exemple aux travaux d'Epstein et Marden [EM86] sur une conjecture de Sullivan (pour le cas où le bord est incompressible, pour le cas plus général voir [BC03]).

6. Variétés à bord idéal

Les angles dièdres et la troisième forme fondamentale. — Pour comprendre l'analogue du théorème 1.2 dans ce cadre, il faut réaliser que l'analogue de la troisième forme fondamentale du bord d'une variété à bord idéal dépend seulement de ses angles dièdres. En effet, si on considère par exemple une suite croissante de domaines $\Omega_n \subset M$ à bord convexe et régulier, telle que la limite de Hausdorff de $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (M,g), alors on peut montrer que la suite des troisièmes formes fondamentales $I\!I\!I_n$ des $\partial\Omega_n$ converge vers une métrique sphérique à singularité coniques, obtenue en recollant un ensemble fini d'hémisphères. Chaque hémisphère est associé à l'un des sommets de M, et deux hémisphères sont recollés le long d'un segment si et seulement si les sommets correspondants sont reliés par une arête. Dans ce cas, la longueur du segment est égale à l'angle dièdre extérieur de M en l'arête.

Considérons une métrique de ce type, qu'on notera encore h. Il est clair que sa courbure singulière est négative en chaque point singulier – puisque l'angle total est de la forme $k\pi$, où $k \geqslant 3$ est le nombre d'hémisphère qui se rencontrent au point singulier. De plus, on remarque suivant [Rou02] que les géodésiques de ces métriques qui entrent dans l'un des hémisphère ne peuvent en sortir qu'après avoir parcouru une longueur égale à π, et le point de sortie est alors antipodal du point d'entrée.

Ainsi, soit γ une géodésique fermée de h de longueur $L < 2\pi$. Si γ entre dans l'un des hémisphères qui compose h, disons H, alors γ ne peut entrer dans aucun autre hémisphère. Considérons la courbe fermée γ' qui coïncide avec γ en dehors de H, mais pour laquelle l'intersection de γ avec H est remplacée par l'une des deux composantes connexes de $(\partial H) \setminus \gamma$. La définition de h indique que γ' est une géodésique fermée de h, et on constate que sa longueur est égale à celle de γ. Ainsi, on voit que si h admet une géodésique fermée de longueur $L < 2\pi$, alors il existe un chemin fermé, composé d'arêtes des bords des hémisphères, qui est aussi de longueur $L < 2\pi$. Le même type d'argument indique aussi que, si h contient une géodésique fermée de longueur 2π qui n'est pas le bord d'un hémisphère, il en existe une autre qui est composée d'arêtes des bords des hémisphères qui composent h.

D'ailleurs, les arêtes qui sont intersections de deux hémisphères composant h forment un graphe, noté Γ^*, qui est le dual du 1-squelette du bord de M, considéré comme une surface polyèdrale. La longueur de chacune de ces arêtes est égale à l'angle dièdre extérieur de l'arête correspondante de ∂M. Ainsi la condition qu'il existe une géodésique de longueur inférieure à 2π est équivalente à l'existence d'une courbe fermée dans ce graphe, de longueur inférieure à 2π.

On voit donc que l'analogue exact du théorème 1.2 pour les variétés à bord idéal est l'énoncé suivant, qui est une reformulation du théorème 1.4. On appelle ici *cellulation* d'une surface Σ une décomposition de Σ en un nombre fini de domaines D_n, chacun étant l'image par une immersion de l'intérieur d'un polygone de $\mathbf{R}^2$, et l'intersection de deux d'entre eux, $D_n \cap D_m$, étant l'image d'une arête de chacun des polygones.

THÉORÈME 6.1. — *Supposons que M est à bord incompressible. Soit Γ le 1-squelette d'une cellulation de ∂M, et soit $w : \Gamma_1 \rightarrow]0,\pi[$ une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $]0,\pi[$. Il existe une métrique hyperbolique g sur M, telle que (M,g) est une variété à bord idéal dont la combinatoire du bord est donnée par le graphe Γ^* dual de Γ et les angles dièdres par w, si et seulement si :*

- *pour tout sommet v de Γ, la somme des valeurs de w sur les arêtes de Γ adjacentes à v est égale à 2π.*
- *pour tout chemin fermé tracé sur Γ^*, contractile dans M mais qui ne borde pas une face, la somme des valeurs de w sur les arêtes empruntées est strictement supérieur à 2π.*

Cette métrique g est alors unique.

Ce résultat est bien sur apparenté au théorème 2.7. L'hypothèse que le bord de M est incompressible est nécessaire pour des raisons techniques, on peut espérer pouvoir s'en passer.

On va décrire rapidement les principales étapes de la preuve, suivant le schéma ébauché dans la section 3.

Dimensions des espaces. — Appelons $\partial_1 M, \cdots ,\partial_N M$ les composantes connexes du bord de M, si bien que, pour tout $i \in \{1, \cdots ,N\}$, $\partial_i M$ est une surface fermée de genre g_i au moins égal à 2. Soit f_i, a_i et v_i le nombre de faces, d'arêtes et de sommets de Γ dans $\partial_i M$. Dans la démonstration, on fixe $v_1, \cdots ,v_N$.

Les fonctions w qui apparaissent dans l'énoncé sont déterminées par le choix d'un nombre par arête de Γ, avec une contrainte par sommet. On peut montrer par un argument combinatoire que ces contraintes sont indépendantes, si bien que :

$$\dim(\mathcal{H}) = \sum_i a_i - v_i .$$

Les métriques hyperboliques g sur M telles que (M,g) est une variété à bord idéal sont, elles déterminées par le choix d'une métrique hyperbolique convexe co-compacte sur M, puis de la position des sommets de Γ. Or les métriques hyperboliques convexe co-compactes sur M sont uniquement déterminées par les structures conformes induites sur les composantes connexes du bord à l'infini, donc par les points du produit des espaces de Teichmüller des $\partial_i M$. La dimension de l'espace des métriques admissibles sur M est donc:

$$\dim(\mathcal{G}) = \sum_i (6g_i - 6) + \sum_i 2v_i .$$

Or : $v_i - a_i + f_i = 2 - 2g_i$ d'après Euler. Par ailleurs les graphes Γ obtenus le sont en prenant l'enveloppe convexe de points, et donc, génériquement, leurs faces sont triangulaires, si bien que : $3f_i = 2a_i$. On en déduit que, pour chaque i : $3v_i - a_i = 6 - 6g_i$, si bien que $\dim(\mathscr{H}) = \dim(\mathscr{G})$.

Compacité. — On ne va pas détailler ici cette partie de la preuve, on va se contenter d'en donner l'idée générale. On considère une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques hyperboliques telles que (M,g_n) est toujours une variété hyperbolique à bord idéal avec la même combinatoire au bord, et on suppose que la suite des assignations d'angles dièdres au bord converge. On remarque que la métrique induite sur chacune des composantes connexes du bord est déterminée par la description des "recollements" entre les triangles idéaux qui constituent les faces de ∂M. Ces recollements sont eux-même déterminés par la donnée, pour chaque arête de Γ, de la distance (orientée) entre les projections sur l'arête des sommets opposés des deux faces qui lui sont adjacentes. Si ces nombres convergent, alors les relevés des $\partial_i M$ en des surfaces polyèdrales équivariantes dans H^3 convergent, et on en déduit que la suite (g_n) converge. Par contre, s'ils divergent, on montre qu'il existe dans l'un des $\partial_i M$ une courbe γ non triviale dont la longueur pour la métrique induite tend vers 0. On montre alors que :

- si γ est contractile dans M, la somme des angles dièdres des arêtes empruntées par γ tend vers 2π.
- sinon, les angles dièdres des arêtes empruntées par γ tendent vers 0.

Le volume et la rigidité infinitésimale. — On doit montrer que, étant donné une variété à bord idéal, on ne peut pas la déformer (infinitésimalement) sans changer ses angles dièdres. L'argument utilisé est basé sur les propriétés de la fonction volume. C'est une technique qui n'est pas nouvelle — voir les travaux de Colin de Verdière [CdV91], Brägger [Brä92], et Rivin [Riv94] — mais la situation est topologiquement plus élaborée ici, et exige des précautions supplémentaires.

Le point de départ est la remarque suivante (cf. [Riv94]). Rappelons que étant donné un simplexe idéal, les angles des arêtes opposés, et la somme des angles des arêtes adjacentes à un sommet est 2π. Ainsi, l'espace des simplexes idéaux dans H^3 est un disque de dimension 2, paramétré par les trois angles dièdres des arêtes adjacentes à un sommet, leur somme étant 2π.

LEMME 6.2 ([Riv94]). — *Le volume des simplexes idéaux est une fonction strictement concave des angles dièdres.*

La preuve est élémentaire à partir des formules explicites donnant le volume d'un simplexe idéal en fonction de ses angles dièdres, voir le chapitre 7 des notes de Thurston [Thu97].

On considère à partir d'ici une variété à bord idéal, qu'on notera M. Pour utiliser la concavité du volume, on doit d'abord utiliser le résultat suivant :

LEMME 6.3. — *Il existe un revêtement fini $\overline{M}$ de M qui admet une triangulation idéale, i.e. une décomposition en la réunion d'un nombre fini de simplexes idéaux non dégénérés d'intérieur disjoint, de manière telle que l'intersection de deux simplexes soit toujours une face de chacun d'eux.*

Pour simplifier l'exposition, ou oubliera ici la nécessité de passer à un revêtement fini — qui ne change pas le principe de la preuve — et on supposera donc que M admet une triangulation idéale. On notera Σ la triangulations combinatoire sous-jacente.

On doit considérer des structures géométriques plus générales sur M que les variétés à bord idéal.

DÉFINITION 6.4. — *Une structure hyperbolique incomplète est la donnée, pour chacun des simplexes de Σ, d'une métrique isométrique à celle d'un simplexe idéal dans H^3.*

Il existe une unique manière de recoller deux simplexes idéaux le long de deux faces données. Une structure hyperbolique incomplète définit donc une métrique hyperbolique sur le complémentaire des arêtes de Σ. Mais cette métrique est singulière le long des arêtes, et ce pour deux raisons liées :

- l'angle total autour d'une arête peut être différent de 2π.
- l'holonomie correspondant à une arête peut aussi avoir une composante de translation le long de l'arête.

Lorsque le second cas ne se produit jamais, on dira qu'on a affaire à une *structure hyperbolique singulière.* Le point crucial est alors le suivant.

LEMME 6.5. — *Considérons une structure hyperbolique incomplète. On a équivalence entre :*

- *la structure incomplète est une structure hyperbolique singulière ;*
- *chaque déformation infinitésimale des angles dièdres des simplexes, qui préserve l'angle total autour de chaque arête (y compris les arêtes du bord), laisse invariante (au premier ordre) le volume total.*

Ce lemme se démontre assez simplement en utilisant la *formule de Schläfli.* Cette formule affirme que, lorsqu'on déforme un polyèdre hyperbolique compact, on a :

$$dV = -\frac{1}{2}\sum_i L_i d\theta_i ,$$

où i parcourt les arêtes du polyèdre, L_i est la longueur de l'arête, et θ_i est son angle dièdre. Il est frappant de constater que cette formule est encore valable pour les polyèdres idéaux, dans ce cas il faut définir la longueur des arêtes en "tronquant" un voisinage de chaque sommet par une horosphère qui y est centrée. Le choix des horosphères ne change rien à la formule, car la somme des angles dièdres des arêtes adjacentes à un sommet idéal ne varie pas.

Le lemme précédent peut se reformuler comme suit : les structures hyperboliques singulières sont les points critiques du volume total (la somme des volumes des simplexes), restreint aux sous-espaces de structures hyperboliques incomplètes correspondant à un angle total fixé autour de chaque arête de Σ. Ces sous-espaces sont des sous-espaces affines de l'espace des structures hyperboliques incomplètes (paramétré par les angles dièdres des simplexes). La stricte concavité du volume indique donc que, étant donné une structure hyperbolique singulière sur M et une variation au premier ordre des angles totaux autour des arêtes de Σ, il existe une unique manière de l'obtenir par une déformation au premier ordre parmi les structures hyperboliques singulières sur M. C'est le résultat de rigidité infinitésimale (et même de déformation locale) cherché.

Notons que cette approche produit aussi directement un résultat de rigidité infinitésimale des variétés à bord idéal par rapport à la métrique induite sur leur bord. On a en effet mentionné plus haut que cette métrique induite est uniquement déterminée par une "donnée de recollement" des simplexes idéaux que sont les faces de M. En appliquant à nouveau la formule de Schläfli, on peut montrer que la stricte concavité du volume se traduit exactement par la rigidité infinitésimale par rapport à ces données de recollement.

Arguments topologiques. — Pour conclure, il y a un point non trivial à établir : que l'espace des assignations d'angles est connexe. Si on ne pouvait l'établir, une preuve par une méthode de déformation ne pourrait en effet pas montrer de résultat d'existence général, puisque certaines composantes connexes de l'espaces des assignations d'angles pourraient rester en marge de la construction. C'est d'ailleurs à cause de ce point qu'il faut supposer, dans le théorème 6.1, que le bord de M est incompressible.

Pour montrer ce résultat de connexité, on montre dans un premier temps que le théorème 6.1 est valide dans le cas fuchsien, ce qui s'énonce sous la forme suivante.

THÉORÈME 6.6 ([Sch01c]). — *Soit S une surface fermée de genre $g \geqslant 2$, et soit Γ le 1-squelette d'une cellulation de S. Soit $w : \Gamma_1 \to]0,1[$ une fonction définie sur l'ensemble des arêtes de Γ. Il existe un plongement polyèdral idéal fuchsien de S dont la combinatoire est donnée par Γ et les angles dièdres intérieurs par w si et seulement si :*

- *pour tout sommet v de Γ, la somme des valeurs de w sur les arêtes de Γ adjacentes à v est égale à 2π ;*
- *pour tout chemin tracé sur le graphe dual Γ^* et qui ne borde pas une face de Γ^*, la somme des valeurs de w sur les arêtes est strictement supérieure à 2π.*

Ce plongement polyèdral est alors unique.

La connexité de l'espace des assignations d'angles qui apparaît dans le théorème 6.1 suit parce que, lorsque le bord de M est incompressible, les conditions de longueur de l'énoncé sont simplement le produit des conditions de longueur "fuchsiennes" pour chacune des composantes connexes du bord, pour lesquelles l'espace des assignations d'angle possibles sont connexes d'après le théorème qu'on vient d'énoncer.

Pour montrer ce théorème "fuchsien", le même problème de connexité se pose, on le résoud par passage à la limite grâce à un autre théorème, qui concerne maintenant les plongements fuchsiens dont l'image est non pas une surface polyèdrale idéale, mais une surface polyèdrale "compacte", c'est à dire dont les sommets sont des points "usuels" de H^3.

THÉORÈME 6.7 ([Sch01c]). — *Soit S une surface fermée de genre $g \geqslant 2$, et soit h une métrique sphérique à singularités coniques sur S, telle que la courbure singulière en chaque singularité est négative. Il existe un plongement polyèdral équivariant "compact" de S, fuchsien, dont la métrique duale est h, si et seulement si les géodésiques fermées de h sont de longueur $L > 2\pi$. Ce plongement est alors unique.*

Ce résultat a été étendu par Rousset [Rou02] aux plongements fuchsien semi-idéaux. Dans la démonstration de cet énoncé, le problème de connexité de l'espace des métrique se résoud par un argument d'approximation par des métriques régulières, en utilisant le fait que l'espace des métriques régulières sur S satisfaisant les conditions de courbure et de longueur de géodésiques qui apparaissent ici est connexe et simplement connexe.

7. Variétés à bord hyperidéal

La troisième forme fondamentale dans ce contexte. — Pour comprendre l'analogue du théorème 6.1 pour les variétés à bord hyperidéal, il faut suivre l'idée (provenant de [BB02]) expliquée dans la section 2, et définir la variété hyperidéale *tronquée* associée à une variété hyperidéale donnée. Il s'agit simplement de la variété, à bord polyèdral semi-idéal, obtenue en tronquant le voisinage de chaque sommet strictement hyperidéal par le plan hyperbolique dual du sommet. La description donnée dans la section 2 des polyèdres hyperidéaux tronqués s'étend aux variétés à bord hyperidéal tronqués.

On peut donc définir la métrique duale d'une variété à bord hyperidéal comme la métrique duale de la variété à bord hyperidéal tronqué correspondante. C'est une métrique obtenue par recollement d'"hémisphères singuliers" au sens de la section 2. On peut alors constater — comme pour les polyèdres hyperidéaux, suivant [Rou02] — que les géodésiques fermées de ces métriques suivent essentiellement les arêtes de la cellulation duale à la combinatoire du bord. Ceci permet de comprendre les conditions de "longueur de géodésique" qui apparaissent dans le théorème suivant, qui étend le théorème 2.10.

THÉORÈME 7.1 ([Sch02b]). — *On suppose que le bord de M est incompressible. Soit Γ le 1-squelette d'une cellulation de ∂M, et soit $w : \Gamma_1 \rightarrow]0,1[$. Il existe une métrique hyperbolique g sur M, telle que (M,g) est une variété à bord hyperidéal dont la combinatoire est* *donnée par Γ et les angles dièdres par w, si et seulement si :*

- *pour tout chemin fermé tracé sur le graphe dual Γ^*, contractile dans M, la somme des valeurs de w est au moins égale à 2π, et strictement supérieure sauf si le chemin borde une face ;*
- *pour tout chemin ouvert tracé sur Γ^*, qui part d'une face f et y revient (sans rester dans le bord de f) et qui est homotope, dans M, à un chemin dans f, la somme des valeurs de w est strictement supérieure à π.*

g est alors unique.

Les faces de Γ^* correspondant à des sommets idéaux de M sont caractérisés par le fait que la somme des valeurs de w sur leur bord est égale à 2π.

Le volume des simplexes hyperidéaux. — La preuve du théorème 7.1 utilise le lemme élémentaire suivant.

LEMME 7.2. — *Le volume des simplexes strictement hyperidéaux dans H^3 est une fonction strictement concave des angles dièdres.*

Pour le montrer, on note d'abord que la formule de Schläfli reste valable pour les polyèdres hyperidéaux, si on définit les longueurs de leurs arêtes et leurs volumes par référence à leurs versions tronquées.

On peut alors traduire cette formule de la manière suivante : étant donné un polyèdre strictement hyperidéal, il admet une déformation infinitésimale qui ne change pas les longueurs de ses cotés si et seulement si le hessien de la fonction volume y est dégénéré. Mais on peut montrer par un argument direct que les simplexes hyperidéaux sont toujours infinitésimalement rigides par rapport à la longueur de leurs arêtes, *i.e.* ils n'admettent jamais de déformation au premier ordre, non triviale, qui ne change pas la longueur des arêtes.

On en déduit que le hessien de V n'est jamais dégénéré, et donc que sa signature est constante. Il suffit donc de constater que, pour un simplexe bien choisi — par exemple un simplexe hyperidéal régulier — ce hessien est défini négatif, pour voir qu'il en est de même partout.

Principes de la preuve du théorème 7.1. — Le principe général de la preuve est similaire à ce qui a été décrit pour la preuve du théorème 6.1, avec certaines difficultés supplémentaires sur lesquelles il n'est pas nécessaire de s'apesantir ici (en particulier en ce qui concerne la compacité). La preuve de la rigidité infinitésimale utilise bien sur le lemme ci-dessus sur la concavité de la fonctionnelle volume sur les simplexes hyperidéaux. Pour montrer la connexité de l'espace des assignations d'angles, on utilise un résultat de Rousset [Rou02], qui étend le théorème 6.6 au cas hyperidéal.

Relation avec les cœurs convexes. — Il existe une relation intime entre les variétés à bord polyèdral strictement hyperidéaux et les cœurs convexes de variétés hyperboliques convexes co-compactes. En effet, étant donné une variété à bord strictement hyperidéal, on peut recoller deux copies de la variété tronquée associée le long des faces où les coupures se produisent, et on obtient le cœur convexe d'une variété hyperbolique convexe co-compacte. Réciproquement, si une variété convexe co-compacte admet une involution isométrique satisfaisant certaines propriétés élémentaires, elle provient de cette construction.

On peut grâce à cette remarque ramener un résultat comme le théorème 7.1 à la description, par Bonahon et Otal [BO01] des laminations de plissages dont le support est une réunion de courbe fermées, voir la section 9.

Par contre cette construction ne permet pas de retrouver les résultats pour les variétés dont certains sommets sont idéaux. Il faudrait pour cela considérer des objets plus compliqués que des cœurs convexes de variétés convexe co-compactes.

Il est intéressant de comparer, pour les objets qu'on vient de décrire, deux approches de la rigidité infinitésimale. Si on adopte le point de vue des polyèdres hyperidéaux, la rigidité provient des propriétés du volume des simplexes hyperidéaux, et de l'existence d'une décomposition en polyèdres hyperidéaux. Par contre, si on préfère considérer des cœurs convexes, la rigidité est une conséquence du résultat de Hodgson et Kerckhoff [HK98] de rigidité infinitésimale des cône-variétés hyperboliques.

8. Empilements et configurations de cercles

Enoncés du résultat principal. — On a déjà mentionné dans la section 1 un résultat sur les empilement de cercles dans les bords des variétés qui portent une métrique hyperbolique convexe co-compacte. On peut maintenant le préciser, en considérant des graphes qui sont le 1-squelette de cellulations qui ne sont pas nécessairement des triangulations. On considère ici encore un variété M compacte de dimension 3, à bord incompressible, qui porte une métrique hyperbolique complète convexe co-compacte.

THÉORÈME 8.1. — *Soit Γ un graphe plongé dans ∂M, qui est le 1-squelette d'une cellulation de ∂M. Il existe un unique couple (σ, C), où :*

- *σ est une $\mathbb{C}P^1$-structure sur ∂M qui provient d'une métrique hyperbolique convexe co-compacte sur M.*
- *C est un empilement de cercles, dans ∂M, pour σ, dont le graphe d'incidence est Γ.*
- *pour tout interstice de C, il existe un cercle orthogonal aux cercles adjacents à l'interstice.*

Rappelons qu'un interstice est une composante connexe du complémentaire des disques d'intérieurs disjoints bordés par les cercles. Cet énoncé est clairement une extension du théorème 1.8 car, lorsque les interstices sont bordés par seulement trois cercles, la troisième condition est automatiquement satisfaite.

On va voir deux manières de prouver ce théorème ; la première utilise une astuce de Thurston pour se ramener au théorème 6.1 sur les variété à bord idéal, la seconde paraît plus naturelle et utilise le théorème 7.1 sur les variété à bord hyperidéal.

Première preuve : par les variétés à bord idéal. — On va d'abord voir, suivant une idée de Thurston, comme on peut réduire le théorème de Koebe sur les empilements de cercles à une application du théorème d'Andreev sur les angles dièdres des polyèdres hyperboliques idéaux.

Soit Γ un graphe plongé dans S^2, qui est le 1-squelette d'une cellulation. On va définir un nouveau graphe Γ', à partir de Γ, de la manière suivante. Γ' a :

- une face pour chaque face de Γ, et une pour chaque sommet de Γ.
- un sommet pour chaque arête de Γ.
- une arête pour chaque couple (f,v), où f est une face Γ et v est un sommet de f. Cette arêtes sépare les faces de Γ' correspondant à f et à v, et ses sommets correspondent aux deux faces de Γ qui sont adjacentes à v dans le bord de f.

On remarque que chaque sommet de Γ', correspondant à une arête e de Γ, est adjacent à quatre sommets de Γ' : deux correspondant aux deux faces de Γ de part et d'autre de e, et deux autres correspondant aux deux extrémités de e.

On peut donc appliquer à Γ' le théorème d'Andreev-Rivin 2.7 en prenant pour w la fonction égale à $\pi/2$ sur toutes les arêtes de Γ'. On obtient un polyèdre idéal P dont la combinatoire est déterminée par Γ', et dont tous les angles sont droits. On considère, pour chaque face f de P, le cercle de $S^2 = \partial_\infty H^3$ qui est le bord à l'infini du plan contenant f. On obtient une configuration de cercles sur S^2, constituée de la manière suivante.

- On a un cercle pour chaque sommet de Γ, et un pour chaque face de Γ.
- Un cercle correspondant à un sommet de Γ ne rencontre transversalement que des cercles correspondant à des faces de Γ, et réciproquement ; toutes les intersections sont orthogonales.
- lorsque deux cercles correspondent à des sommets de Γ adjacents (resp. à des faces de Γ adjacentes) ils sont tangents.

On voit ainsi qu'on a réalisé non pas un, mais deux empilements de cercles : un dont le graphe d'adjacence est Γ, et un autre dont le graphe d'adjacence est le graphe dual Γ^*. De plus, si les faces de Γ sont ne sont pas des triangles mais des polygones, l'empilement de cercle satisfait à la condition supplémentaire qui apparaît dans le théorème 8.1 : les cercles adjacent à un interstice donné sont tous orthogonaux à un même cercle, qui appartient à l'autre empilement — celui dont le graphe d'adjacence est Γ^*.

Cette démonstration indique immédiatement comment on peut montrer le théorème 8.1 à partir du théorème 6.1 : il suffit d'appliquer exactement la même procédure que pour les configurations de cercles sur la sphère.

Seconde preuve : par les variétés à bord hyperidéal. — Considérons maintenant un polyèdre hyperbolique P strictement hyperidéal, c'est à dire que, dans le modèle projectif, ses sommets sont tous en dehors de la boule unité fermée. On peut considérer deux type de plans : les faces de P, et les plans duaux des sommets de P. On note que :

- les plans duaux de deux sommets de P ne se rencontrent jamais ;
- le plan contenant une face de P rencontre le plan dual d'un sommet de P si et seulement si la face contient le plan, et dans ce cas l'angle d'intersection est égal à $\pi/2$.

On peut donc traduire le théorème 2.10 directement en termes de configuration de cercles. Soit Γ un graphe plongé dans S^2, qui est le 1-squelette d'une cellulation, et soit w : $\Gamma_1 \to]0,\pi[$. Supposons que, pour chaque chemin tracé sur le graphe dual de Γ, la somme des valeurs de w est supérieure à 2π, et strictement supérieure sauf peut-être pour les chemins qui bordent une face. Alors il existe une unique *configuration de cercles* dont le graphe d'incidence est Γ et dont les angles d'intersection sont donnés par w. On entend par là une famille de cercles correspondant aux sommets de Γ, tels que deux d'entre eux se rencontrent si et seulement si les sommets correspondants de Γ sont adjacents.

Cette configuration de cercles vérifie une condition supplémentaire : pour tout interstice bordé par plus de deux cercles, il existe un autre cercle orthogonal aux cercles adjacents à l'interstice (cet autre cercle est le bord du plan dual du sommet de Γ correspondant à l'interstice).

Considérons maintenant une configuration de cercles de ce type — ou le polyèdre hyperidéal qui lui est associé — et augmentons les valeurs de w, c'est à dire les angles d'intersection. La condition de somme des valeurs de w qui apparaît dans l'énoncé reste satisfaite, et on a donc une famille de polyèdres hyperidéaux, ou de configurations de cercles, jusqu'à la valeur maximale, où w prend la valeur π sur toutes les arêtes. On a alors l'empilement de cercles recherchés. Notons que cette approche utilise un résultat de compacité, mais il est de toute manière nécessaire pour obtenir un résultat comme le théorème 2.10.

On constate aussi — en utilisant la formule de Schläfli qu'on a déjà mentionnée — que cette configuation où les angles d'intersection sont maximaux est aussi celle pour laquelle le volume du polyèdre est le plus grand. Bien sur, la combinatoire du polyèdre hyperidéal qu'on considère change lorsqu'on atteint la configuration limite.

La seconde preuve du théorème 8.1 suit directement de ces idées : on peut traduire le théorème 7.1 en termes de configuration de cercles sur le bord à l'infini de variétés hyperboliques convexe co-compactes, puis passer à la limite où le volume est maximal pour trouver la configuration de cercles cherchée.

9. Cœurs convexes de variétés hyperboliques

Les métriques induites et la lamination de plissage. — On a mentionné dans la section 1 certains résultats sur les cœurs convexes de variétés hyperboliques de dimension 3. Les bords de ces cœurs convexes ont des propriétés de régularités tout à fait fascinantes, ils sont développables, mais "plissés" le long de laminations. Le degré de plissage est mesuré par une mesure transverse à la lamination. La métrique induite sur ces bords est hyperbolique, mais l'analogue naturel de la troisième forme fondamentale est la lamination mesurée de plissage, qui peut se voir comme une métrique sur un arbre réel, qui est l'arbre dual du revêtement universel du bord, pour la dualité hyperbolique-de Sitter.

Pour la métrique induite comme pour la lamination mesurée de plissage, on a une conjecture naturelle d'existence et d'unicité de métrique hyperbolique dont la métrique induite ou la lamination de plissage est donnée ; dans les deux cas, la partie "existence" est connue, ce sont les théorèmes 1.6 et 1.7.

La métrique induite : preuve par les résultats de [Lab92]. — On peut obtenir le théorème 1.6 par passage à la limite dans l'énoncé d'existence du théorème 1.1, obtenu par Labourie [Lab92]. Rappelons que cet énoncé avait été démontré par un argument homologique d'intersection.

Preuve par la conjecture quasi-conforme de Sullivan. — Il existe aussi une autre preuve connue, qui repose sur une conjecture encore ouverte, mais partiellement démontrée, de D. Sullivan.

CONJECTURE 1. — *Soit M une variété hyperbolique convexe co-compacte, dont le bord est incompressible. La structure conforme de la métrique induite sur le bord du cœur convexe de M est 2-quasi-conforme à la structure conforme du bord à l'infini de M.*

Epstein et Marden [EM86] ont montré que cette conjecture est vraie si on remplace 2 par une constante beaucoup plus grande. La valeur de la constante a ensuite été améliorée.

D'après le théorème de d'Ahlfors-Bers, les métriques hyperboliques convexe co-compactes sont paramétrées par les structures conformes sur le bord à l'infini. Dans cette paramétrisation, l'application qui a une métrique hyperbolique convexe co-compacte associe la métrique induite sur le bord du cœur convexe est propre, et de degré 1, donc surjective. Le résultat suit.

Lorsque le bord de M n'est pas incompressible, la conjecture de Sullivan n'est plus valable, mais l'application décrite reste propre et de degré 1, d'après un résultat récent de Bridgeman et Canary [BC03].

Cœurs convexes dont la lamination de plissage est compacte. — On va maintenant considérer la lamination mesurée de plissage du bord. Le cas le plus simple se présente lorsque toutes les feuilles de cette lamination sont des courbes fermées simples. Dans ce cas, Bonahon et Otal ont donné un résultat d'existence et d'unicité d'une métrique hyperbolique pour laquelle la lamination de plissage du bord est une lamination mesurée donnée.

THÉORÈME 9.1. — *[BO01] Soit λ une lamination mesurée sur ∂M dont le support est une réunion finie de courbes fermées simples. Il existe une métrique hyperbolique convexe co-compacte sur M, telle que la lamination mesurée de plissage du bord du cœur convexe est λ, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- *le poids de chaque feuille est strictement inférieur à π ;*
- *l'intersection de λ avec le bord de chaque anneau essentiel est strictement positif;*
- *l'intersection de λ avec le bord de chaque disque incompressible dans M est strictement supérieur à 2π.*

Cette métrique est alors unique.

Notons qu'il n'est pas nécessaire ici de supposer que le bord de M est incompressible.

La preuve de ce résultat est obtenue par une méthode de déformation, comme on en a déjà vu plus haut. Le point essentiel est la rigidité infinitésimale : si on déforme infinitésimalement la métrique hyperbolique, de manière que la lamination de plissage reste la même, alors sa mesure transverse doit changer. Bonahon et Otal le montrent d'une manière qui est — en apparence du moins — complètement différente de celles qu'on a vu ci-dessous.

Ils remarquent que, si on recolle deux copies d'un cœur convexe à lamination de plissage "compacte" le long de leur bord commun, on obtient une cône-variété hyperbolique dont le lieu singulier est un link, avec des angles inférieurs à 2π autour de chaque singularité. On peut donc appliquer un résultat de rigidité infinitésimale pour ces objets, dû à Hodgson et Kerckhoff [HK98] (voir aussi un résultat de Weiss [Wei02]). Ils en déduisent qu'on ne peut pas déformer infinitésimalement la variété sans changer, au premier ordre, la lamination mesurée de plissage du cœur convexe.

Il reste ensuite à établir, entre autre choses, un résultat de compacité, pour s'assurer que toutes les laminations mesurées sont obtenues exactement une fois.

Laminations générales. — Lorsque λ n'a pas pour support une réunion finie de courbes fermées simples, on a seulement un résultat d'existence, qui est énoncé dans le théorème 1.7. La preuve repose sur un argument d'approximation, utilisant le résultat mentionné ci-dessus pour les laminations dont le support est une réunion de courbes fermées. Il faut démontrer un résultat de compacité, et utiliser la densité des laminations à support "compact" dans l'espace des laminations mesurées.

Ce résultat a été étendu au cas où le bord de M n'est plus supposé incompressible par Lecuire [Lec02]. Des difficultés "techniques" nouvelles et délicates apparaissent alors.

La dualité et la rigidité infinitésimale. — On ne connait pas actuellement de résultat de rigidité infinitésimale pour les cœurs convexes dont la lamination de plissage n'est pas à support "compact". Deux problème se posent : d'une part par rapport à la métrique induite, d'autre part par rapport à la lamination mesurée de plissage. Bonahon [Bon96] a montré que ces deux problèmes sont équivalents : s'il y a rigidité infinitésimale par rapport à la métrique induite, il en est de même pour la lamination de plissage, et réciproquement. L'argument utilise une structure complexe sur l'espace des métriques hyperboliques géométriquement finies, liée à la structure complexe de $PSL(2,\mathbf{C})$.

10. Variétés anti-de Sitter

On quitte dans cette section le monde hyperbolique, pour aborder un univers qui lui est parallèle : celui des variétés anti-de Sitter. L'espace anti-de Sitter de dimension 3, noté H_1^3, peut se voir — comme l'espace hyperbolique — comme une quadrique dans un espace plat, dans ce cas l'espace $\mathbf{R}_2^4$ de dimension 4 muni d'une forme quadratique de signature (2,2) :

$$H_1^3 := \{x \in \mathbf{R}_2^4 \mid \langle x,x \rangle = -1\} ,$$

avec la métrique induite. C'est un espace lorentzien de dimension 3, muni d'une métrique à courbure constante égale à -1. Il n'est pas simplement connexe, on considère parfois sont revêtement universel. On peut aussi l'obtenir comme le fibré unitaire du plan hyperbolique, muni d'une métrique naturelle, ou comme $PSL(2,\mathbf{R})$, muni de sa métrique de Killing.

Quelques résultats de G. Mess. — G. Mess [Mes90] a découvert que certaines variétés modelées sur H_1^3 partagent certaines propriétés des variété hyperboliques quasi-fuchsiennes. Ce sont les variétés que les physiciens appellent "GHMC", pour "globalement hyperboliques compactes maximales". Elles ont les propriétés suivantes :

- elles contiennent une hypersurface compacte de type espace, de genre $g \geqslant 2$;
- tout point peut être joint à cette hypersurface par une géodésique de type temps ;
- il n'existe pas de courbe fermée de type temps ;
- elles sont maximales, c'est à dire qu'on ne peut pas les "étendre".

Attention, ces variétés ne sont presque jamais géodésiquement complètes !

Ces variétés ont des points communs très frappants avec les variétés hyperboliques quasi-fuchsiennes, en particulier :

- pour chaque genre $g \geqslant 2$, les variétés anti-de Sitter GHMC contenant une hypersurface de type espace de genre g sont paramétrées par deux points dans l'espace de Teichmüller de genre g ;
- elles ont un cœur convexe, défini comme dans le cas hyperbolique, comme le plus petit convexe sur lequel la variété peut se rétracter ;

– le revêtement universel du cœur convexe est l'enveloppe convexe d'une courbe de Jordan Λ dans le bord à l'infini de H_1^3, qui est (presque) l'ensemble limite de l'action associé du π_1 de la variété sur H_1^3 ;
– le bord de ce cœur convexe est muni d'une métrique induite qui est hyperbolique, et d'une lamination mesurée de plissage.

Il y a quand même aussi quelques différences importantes. L'une d'elles est que la courbe de Jordan Λ est toujours de dimension de Hausdorff égale à 1, car c'est une courbe "de type espace" pour la structure conforme lorentzienne du bord à l'infini de H_1^3. En fait, cette courbe est le graphe d'une fonction Hölder de $\mathbf{R}P^1$ dans $\mathbf{R}P^1$, et il semble que l'exposant de Hölder de cette fonction — qu'on appellera dans la suite "exposant de Hölder de la variété M" — joue le rôle de la dimension de Hausdorff dans le cas hyperbolique.

Mess [Mes90] pose plusieurs questions concernant la géométrie du bord du cœur convexe, en particulier les suivantes.

Question 10.1. — *Soit S une surface de genre $g \geqslant 2$, et soient h_+, h_- deux métriques hyperboliques sur S. Existe-t-il une unique variété anti-de Sitter GHMC de genre g telle que les métriques induites sur les deux composantes connexes du bord du cœur convexe sont h_- et h_+ ?*

Question 10.2. — *Peut-on décrire les laminations de plissage des cœurs convexes des variétés anti-de Sitter GHMC? Est-ce que ces laminations de plissage déterminent uniquement la variété?*

Enoncés possibles. — Fixons maintenant une surface S, de genre $g \geqslant 2$. Les variétés anti-de Sitter HMCB ont la propriété de contenir beaucoup de sous-ensembles convexes, dont le bord est composés de deux surfaces régulières de type espace ; on parlera de *variété anti-de Sitter à bord convexe.* Par analogie avec le cas hyperbolique quasi-fuchsien, on peut poser les deux questions naturelles suivantes.

Question 10.3. — *Soit h_- et h_+ deux métriques sur S, à courbure $K < -1$. Existe-t-il une unique métrique anti-de Sitter sur $S \times [-1,1]$, telle que la métrique induite sur $S \times \{-1\}$ est h_- et que la métrique induite sur $S \times \{1\}$ est h_+ ?*

La condition de courbure est naturelle car d'une part la courbure ambiante est -1, d'autre part la formule de Gauss prend un signe – dans les variétés lorentziennes, si bien que la courbure de la métrique induite sur une surface convexe est inférieure à la courbure ambiante.

On peut aussi poser une question duale, concernant la métrique induite.

Question 10.4. — *Soit h_- et h_+ deux métriques sur S, à courbure $K < -1$. Existe-t-il une unique métrique anti-de Sitter sur $S \times [-1,1]$, telle que la troisième forme fondamentale de $S \times \{-1\}$ est h_- et que la troisième forme fondamentale de $S \times \{1\}$ est h_+ ?*

Comme on peut le constater, ces énoncés sont très similaires, ce qui s'explique par le fait que, comme H^3 est en dualité avec S_1^3, H_1^3 est en dualité avec lui-même. On peut en fait montrer que les questions 10.3 et 10.4 sont équivalentes.

On peut aussi imaginer des extensions aux variétés anti-de Sitter dont le bord est convexe, de type espace, mais polyèdral ; on laisse les détails aux lecteurs car le cas régulier est déjà suffisamment délicat.

Le cas fuchsien. — Certaines variétés anti-de Sitter à bord convexe sont particulièrement simples à comprendre, ce sont celles qui admettent une involution isométrique qui fixe un plan totalement géodésique de type espace. Par analogie avec le cas hyperbolique, on va les appeler *fuchsiennes*.

Pour ces variétés, les deux composantes du bord sont échangées par l'involution isométrique. Elles se relèvent dans H_1^3 en des surfaces convexes équivariantes dont la représentation fixe un plan, on parlera de surfaces équivariantes *fuchsiennes*. Réciproquement, il est facile de se convaincre que chaque surface convexe équivariante, dont la représentation fixe un plan, détermine une unique variété anti-de Sitter GHMC fuchsienne. Ainsi, les cas particuliers "fuchsiens" des questions 10.3 et 10.4 peuvent se formuler en termes de surfaces équivariantes fuchsiennes.

QUESTION 10.5. — *Soit h une métrique à courbure $K < -1$ sur une surface S de genre $g \geqslant 2$. Existe-t-il une unique surface équivariante fuchsienne, strictement convexe, dans H_1^3, dont la métrique induite (resp. la troisième forme fondamentale) est h ?*

Ces questions peuvent être abordées par des techniques spécifiques, qui sont actuellement l'objet du travail de F. Fillastre.

Outils pour l'espace anti-de Sitter. — Quittons maintenant le cas fuchsien pour revenir au cas des variétés anti-de Sitter à bord convexe "générales". On peut essayer de suivre la même voie que dans le cas hyperbolique, on va indiquer à quel point des divergences se produisent, et pourquoi on peut malgré tout espérer faire aboutir une preuve similaire.

Rappelons d'abord qu'on dispose, comme dans l'espace hyperbolique, d'un modèle projectif. Il envoie un "hémisphère" de H_1^3, noté $H_{1,+}^3$ — c'est à dire une "moitié" de cet espace — sur l'intérieur d'un hyperboloïde à une nappe dans $\mathbf{R}^3$. On peut construire ce modèle projectif par projection radiale de H_1^3 vu comme une quadrique de $\mathbf{R}_2^4$, ou bien en prenant la "métrique de Hilbert" d'un hyperboloïde à une nappe, comme dans [Sch98a]. Notons qu'il peut être naturel (on le verra plus bas) de considérer ce modèle projectif comme étant à valeur non pas dans $\mathbf{R}^3$, mais plutôt dans l'espace de Minkowski de dimension 3, $\mathbf{R}_1^3$.

On a aussi une notion de dualité similaire à la dualité hyperbolique-de Sitter. Considérons un point $x \in H_1^3$, on lui associe la droite vectorielle orientée d qui le contient dans $\mathbf{R}_2^4$, puis on prend l'hyperplan orienté orthogonal $d^\perp$, et enfin son intersection avec

H_1^3, qu'on note x^*. On associe ainsi à chaque point un hyperplan orienté totalement géodésique de type espace, mais on reste dans H_1^3. On en déduit une dualité sur les surfaces régulières strictement convexes de type espace, qui envoie une surface sur l'ensemble des points duaux de ses plans tangents — qui est aussi l'enveloppe des plans duaux de ses points — et on vérifie que la métrique induite sur la surface duale est la troisième forme fondamentale de la surface de départ, et réciproquement.

On a aussi, comme dans l'espace hyperbolique, une application de Pogorelov, qui "vit" au-dessus du modèle projectif. C'est un morphisme de fibré vectoriels entre $TH_{1,+}^3$ et $T\mathbf{R}_1^3$. Il agit comme dans le cas hyperbolique :

- il préserve la norme et la direction des vecteurs "radiaux", c'est à dire ceux qui sont dirigés vers le "centre" du modèle ;
- il agit comme la différentielle du modèle projectif dans les directions "latérales", c'est à dire les directions orthogonales à la direction radiale.

Il est indispensable, pour appliquer les méthodes qu'on a décrites dans le cas hyperbolique, d'utiliser une application de Pogorelov à valeurs non pas dans $\mathbf{R}_1^3$, mais dans $\mathbf{R}^3$. Pour cela, on remarque qu'il existe une "application de Pogorelov" évidente entre l'espace de Minkowski $\mathbf{R}_1^3$ et $\mathbf{R}^3$, c'est simplement l'application qui préserve les composantes horizontales des vecteurs mais change le signe de la composante verticale. Il faut donc composer l'application de Pogorelov de $H_{1,+}^3$ dans $\mathbf{R}_1^3$ par cette inversion de la composante verticale. C'est la source de difficultés dans les estimées qu'on va ébaucher, car la direction "verticale" qui apparaît n'a pas de signification géométrique bien définie.

Les isométries de H_1^3. — Avant d'aller plus loin, il faut considérer comment agissent les isométries de l'espace anti-de Sitter. Il existe plusieurs types d'isométries dans H_1^3 préservant l'orientation, mais seules certaines d'entre elles nous intéressent, on peut les caractériser par le fait qu'elles ont quatre valeurs propres réelles, qui sont deux à deux inverses l'une de l'autre. On les appellera ici des isométries *hyperboliques.* Parmi celles-ci, celles dont deux valeurs propres sont égales à 1 sont particulières, on les appellera des *translations*, elles correspondent simplement à une translation hyperbolique dans un plan totalement géodésique. Par exemple le π_1 d'une variété anti-de Sitter fuchsienne agit par translations.

Une isométrie hyperbolique laisse globalement invariantes deux droites de type espace de H_1^3 (le cas des translations étant à part). Ces deux droites sont duales l'une de l'autre. Si on écrit les valeurs propres de l'isométrie sous la forme $(e^{\rho}, e^{-\rho}, e^{\rho^*}, e^{-\rho^*})$, la distance de translation le long de l'une des droites est ρ, alors que la distance de translation sur l'autre droite est ρ^*. On peut donc décrire notre isométrie comme une translation-rotation le long du premier axe (la rotation étant "lorentzienne," puisque le fibré normal à la géodésique est muni d'une métrique lorentzienne), de distance de translation ρ et d'axe de rotation ρ^*, ou comme une translation-rotation le long du second axe, de distance de translation ρ^* et d'angle de rotation ρ.

Considérons une isométrie hyperbolique γ pour laquelle ρ et ρ^* sont distinctes, et décidons que $\rho > \rho^*$. Ceci détermine deux nombre $\rho(\gamma)$ et $\rho^*(\gamma)$, le premier étant supérieur au second. On peut alors appeler "axe principal" la première des droites, c'est à dire celle pour laquelle la longueur de translation est ρ, et "axe secondaire" la seconde droite, celle suivant laquelle la distance de translation est ρ^*. On appellera aussi "distance de translation" le nombre ρ, et "angle de rotation" le nombre ρ^*. Notons que pour les isométries qui sont des translations, on a $\rho^* = 0$, mais la distance de rotation, l'angle de rotation et l'axe principal sont bien définis (l'axe secondaire ne l'est pas).

Les isométries qui apparaissent dans la représentation associée à une variété anti-de Sitter GHMC sont assez particulière.

LEMME 10.6. — *Soit M une variété anti-de Sitter GHMC, et soit γ une isométrie de H^3_1 qui est l'image d'un élément de $\pi_1(M)$ dans $SO(2,2)$. Alors :*

- *γ est une isométrie hyperbolique, avec $\rho \neq \rho^*$;*
- *l'axe principal de γ est contenu dans le cœur convexe de M, et son axe secondaire ne rencontre pas le cœur convexe de M.*

On a surtout une relation explicite entre l'exposant de Hölder de M, soit α_0, et les quantités ρ et ρ^* des éléments de $\pi_1 M$.

LEMME 10.7. — *On a :*

$$\alpha_0 = \inf_{\gamma\in\pi_1 M\setminus\{1\}} \frac{\rho(\gamma) - \rho^*(\gamma)}{\rho(\gamma) + \rho^*(\gamma)} .$$

Le bord vu dans le modèle projectif. — On considère maintenant une variété anti-de Sitter M à bord strictement convexe de type espace, et on suppose les deux composantes connexes du bord sont des surfaces de genre g, pour un $g \geqslant 2$. On peut encore considérer le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M, qu'on peut voir comme un domaine convexe dans H^3_1. On va noter S son bord, ainsi S et une surface de type espace, régulière et strictement convexe dans H^3_1.

On peut alors vérifier le point suivant.

Remarque. — Il existe un hémisphère de H^3_1 qui contient un voisinage de $\widetilde{M}$.

En conséquence, on peut utiliser un modèle projectif de $H^3_{1,+}$ qui contient entièrement $\widetilde{M}$. On appellera $\overline{\Omega}$ l'image de $\widetilde{M}$ dans ce modèle. Appelons $\mathscr{H}$ l'hyperboloïde qui borde l'image du modèle projectif ; l'intersection de l'adhérence de $\overline{\Omega}$ avec $\mathscr{H}$ est une courbe Λ, c'est (essentiellement) l'ensemble limite de l'action de $\pi_1(M)$ sur H^3_1.

On notera encore $\overline{S}$ l'image de S dans le modèle projectif.

LEMME 10.8. — *$\overline{S} \cup \Lambda$ est homéomorphe à une sphère ; c'est une surface C^1, dont la normale est orthogonale à l'hyperboloïde $\mathscr{H}$ le long de Λ. De plus, la courbure de sa métrique induite est comprise entre deux constantes K_0 et K_1, avec $K_1 > K_0 > 0$.*

Par contre, une propriété cruciale dans le cas hyperbolique disparaît ici.

Remarque. — En général, les courbures principales de $\overline{S}$ ne sont pas bornées.

La preuve du lemme — et de la remarque — repose d'abord sur un fait élémentaire : si $\phi : M \to M'$ est un difféomorphisme projectif entre deux variétés pseudo-riemanniennes, et si $S \subset M$ est une hypersurface, alors la seconde forme fondamentale de $\phi(S)$ est conforme à la seconde forme fondamentale de S. Le facteur conforme est le produit scalaire entre l'image par $d\phi$ du vecteur normal unitaire à S dans M avec le vecteur normal unitaire à $\phi(S)$ dans M'.

Ceci étant connu, la comparaison des courbures principales de S avec celles de $\phi(S)$ repose simplement sur la comparaison entre les métriques induites sur S et sur $\phi(S)$. Dans notre situation, on a une application projective de $H^3_{1,+}$ dans $\mathbf{R}^3$, et la comparaison des métriques induites sur les surfaces des deux cotés est assez facile; elle dépend essentiellement de l'angle que fait S avec un champ de Killing de type temps fixé dans H^3_1. On en déduit malheureusement que les choses se passent assez mal : au voisinage de l'ensemble limite, les courbures principales de $\overline{S}$ peuvent tendre vers l'infini (mais d'une manière controlée par une fonction de α_0 est de la distance à Λ). Par contre, on a une bonne estimée du rapport des éléments d'aire sur S et sur $\overline{S}$, qui permet d'estimer précisément la courbure de Gauss de $\overline{S}$.

Déformations infinitésimales. — La clé de la réponse aux questions 10.3 et 10.4 se trouve dans la question suivante, d'apparence plus élémentaire.

QUESTION 10.9. — *Soit M une variété anti-de Sitter à bord régulier et strictement convexe. Peut-il existe une déformation infinitésimale non triviale de la métrique de M, parmi les métriques anti-de Sitter, telle que la variation de la métrique induite sur le bord est nulle?*

Nous ne savons pas répondre à cette question, mais on peut espérer qu'une approche similaire à celle qui a été suivie dans le cas hyperbolique donne la réponse. On peut en tous cas énoncer un résultat de régularité pour les champs de déformations de la surface $\overline{S}$ qui proviennent, par l'application de Pogorelov, de déformations de la métrique anti-de Sitter sur M.

Reprenons le formalisme développé pour le cas hyperbolique. On considère donc une métrique anti-de Sitter g sur M, pour laquelle le bord est régulier, de type espace, et strictement convexe. On appelle S le bord du revêtement universel de M, considéré comme un sous-ensemble convexe Ω de H^3_1. Une déformation infinitésimale $\dot{g}$ de g détermine un champ de vecteurs u sur S, qui est une déformation isométrique si $\dot{g}$ ne change pas, au premier ordre, la métrique induite sur le bord. Par l'application de Pogorelov, on en déduit alors une déformation isométrique infinitésimale $\overline{u}$ de $\overline{S}$. On appelle $\overline{v}$ la projection orthogonale sur $T\overline{S}$ de $\overline{u}$. Alors :

LEMME 10.10. — *Le champ de vecteurs $\overline{v}$ est dans H^1.*

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme analogue dans le cas hyperbolique, mais avec quelques différences frappantes. Dans le cas hyperbolique, on montre que $\overline{v}$ est C^α Hölder pour tout $\alpha < 1$, et on peut conclure grâce à un résultat de Sullivan affirmant que la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite est strictement inférieure à 2. Dans le cas anti-de Sitter, on peut seulement montrer que $\overline{v}$ est C^α pour tout $\alpha < \alpha_0$, où α_0 est l'exposant Hölder de M, et on conclut parce que la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite est 1. La preuve de la régularité Hölder de $\overline{v}$ utilise le lemme 10.7.

Comment conclure ?. — Contrairement au cas hyperbolique, il n'est pas facile de montrer la rigidité infinitésimale des variétés anti-de Sitter à bord convexe à partir du lemme 10.10. En effet, l'argument utilisé dans le cas hyperbolique utilisait l'opérateur adjoint de l'opérateur $\overline{\partial}_I$, ce qui nécessite de savoir que cet opérateur est uniformément elliptique. Ici ça n'est plus le cas, à cause de l'absence de borne uniforme sur les courbures principales de $\overline{S}$.

11. Quelques questions ouvertes

On va mentionner ici quelques questions ouvertes qui me semble intéressantes, ainsi que quelques pistes pour résoudre certains d'entre eux. La difficulté de ces problèmes paraît variables.

Régularité pour les variétés hyperboliques à bord convexe régulier. — Les théorèmes 1.1 et 1.2 sont énoncés seulement dans la catégorie C^∞. Par contraste, les résultats classiques de théorie des surface — sur les immersions isométriques de surfaces à courbure positive dans $\mathbf{R}^3$, par exemple — sont valides dans les classes C^k pour la métrique, se traduisant en une régularité C^{k+2} pour la surface. Il serait donc intéressant de savoir si on peut étendre les résultats sur les variétés hyperboliques à bord convexe à d'autres classes de régularité.

Variétés à bord convexe general. — On peut étendre la question précédente dans une direction légèrement différente. Toujours pour les surfaces convexes dans $\mathbf{R}^3$, Pogorelov [Pog73] a montré un résultat remarquable d'immersion isométrique sans aucune régularité pour les métriques sur S^2 qui sont à courbure positive au sens d'Aleksandrov. On peut se demander si ce résultat peut s'étendre aux métriques induites sur les bords des variétés à bord convexe, pour des métriques non régulières qui sont à courbure supérieure à -1 au sens d'Aleksandrov.

La même question se pose d'ailleurs si on remplace la métrique induite par la troisième forme fondamentale. Une indication positive est d'ailleurs donnée par un résultat récent de G. Moussong [Mou02], qui a étendu le résultat de Pogorelov aux immersions isométriques dans l'espace de Sitter des métriques non régulières $CAT(1)$ sur S^2, généralisant les résultats de [RH93] dans le cas polyèdral et de [Sch98a] dans le cas régulier.

Problèmes mixtes pour les variétés à bord régulier. — Considérons une variété hyperbolique quasi-fuchsienne à bord convexe. Le bord a deux composantes connexes, et on peut se demander s'il est possible de prescrire la métrique induite sur l'une de ces composantes, et la troisième forme fondamentale sur l'autre. Il semblerait que les techniques utilisées pour montrer les théorèmes 1.1 et 1.2 puissent mener à une preuve. La même question peut d'ailleurs se poser dans le cas anti-de Sitter GHMC, voire pour les bords de cœurs convexes de variétés hyperboliques quasi-fuchsiennes (ou de variétés anti-de Sitter GHMC). Pour les variétés hyperboliques quasi-fuchsiennes, la question est la suivante.

Question 11.1. — *Soit S une surface de genre $g \geqslant 2$. Soit h_+ une métrique sur S à courbure $K > -1$, et soit h_- une métrique sur S à courbure $K < 1$, dont les géodésiques contractiles sont de longueur $L > 2\pi$. Existe-t-il une unique métrique g hyperbolique sur $S \times [-1,1]$, pour laquelle le bord est régulier et strictement convexe, avec pour métrique induite h_+ sur $S \times \{1\}$ et pour troisième forme fondamentale h_- sur $S \times \{-1\}$?*

Variétés à bord polyèdral "compact". — On peut reprendre ces questions en considérant des variétés hyperbolique dont le bord est non pas régulier, mais polyèdral, c'est à dire localement identique à un polyèdre hyperbolique compact dans H^3. Dans ce cas, la métrique induite est hyperbolique, à singularités coniques aux sommets (avec une courbure singulière positive, c'est à dire un angle total inférieur à 2π) alors que la troisième forme fondamentale est une métrique sphérique à singularités coniques (avec une courbure singulière négative aux sommets).

On peut naturellement formuler des question correspondant aux résultats dus respectivement à Aleksandrov [Ale58a] et à Rivin et Hodgson [RH93] pour les polyèdres hyperboliques compacts. On considère toujours une variété M compacte à bord dont l'intérieur admet une métrique hyperbolique convexe co-compacte.

Question 11.2. — *Soit h une métrique hyperbolique à singularités coniques sur ∂M, avec une courbure singulière positive en chaque point singulier. Existe-t-il une unique métrique hyperbolique g sur M, à bord convexe, pour laquelle la métrique induite sur le bord est h ?*

Question 11.3. — *Soit h une métrique sphérique à singularités coniques sur ∂M, avec une courbure singulière négative en chaque point singulier. Supposons que les géodésiques fermées de h qui sont contractibles dans M sont de longuer $L > 2\pi$. Existe-t-il une unique métrique hyperbolique g sur M, à bord convexe, pour laquelle la troisième forme fondamentale du bord est h ?*

Le point clé pour répondre à ces question est la rigidité infinitésimale de ces variétés hyperboliques à bord polyèdral. Il est néanmoins possible qu'on puisse donner des résultats d'existence sans montrer la rigidité infinitésimale, par des arguments similaires à ceux de Labourie [Lab92] où d'ordre plutôt quasi-conforme.

Dans le cas fuchsien, les méthodes développées par F. Fillastre [Fil] devraient permettre de montrer la rigidité infinitésimale, et donc probablement de répondre positivement aux deux questions.

Métriques induites sur les variétés à bord idéal ou hyperidéal. — On a énoncé dans les sections 6 et 7 des résultats concernant les angles dièdres possibles des variétés hyperboliques dont le bord ressemble localement à un polyèdre idéal ou hyperidéal. Ces résultats étaient analogues au théorème 1.2, qui décrit les troisièmes formes fondamentales possibles des variétés hyperboliques à bord convexe régulier.

Il serait satisfaisant de disposer de résultats analogues pour la métrique induite sur le bord de ces variétés idéales et hyperidéales. On souhaiterait répondre aux questions suivantes. La première question est un cas particulier de la question 5.3.

QUESTION 11.4. — *Soit h une métriques hyperbolique complète d'aire finie sur ∂M privée d'un nombre fini de points. Existe-t-il une unique métrique hyperbolique g sur M, pour laquelle le bord est convexe, avec pour métrique induite h ?*

Dans la plupart des cas, (M,g) serait alors une variété hyperbolique idéale. Ici encore, le point clé est la rigidité infinitésimale. Dans la plupart des cas — précisément pour les variétés idéales — les méthodes décrites dans la section 6 permettent de montrer un résultat de rigidité infinitésimale. Le problème est que les métriques hyperboliques sur M pour lesquelles la métrique induite sur le bord est une métrique hyperbolique d'aire finie ne sont pas toujours idéales ; dans certains cas, le bord peut rencontrer le cœur convexe. Pour ces cas, on ne sait pas montrer de résultat de rigidité infinitésimale.

Par contre, il devrait être possible de montrer la partie existence de la question qu'on vient de poser en utilisant des arguments quasi-conformes, cf la section 5.

La situation est similaire pour les variétés hyperidéales, la question est maintenant la suivante, elle est plus générale que la précédente.

QUESTION 11.5. — *Soit h une métrique hyperbolique complète sur ∂M privé d'un nombre fini de points. Existe-t-il une unique métrique hyperbolique g sur M pour laquelle le bord est convexe, avec pour métrique induite h ?*

On a encore un résultat de rigidité infinitésimale pour les variétés hyperidéales, mais elles ne forment qu'un ouvert parmi les métriques hyperboliques sur M qu'on peut rencontrer.

Unicité pour les cœurs convexes des variétés hyperboliques. — On a mentionné dans la section 9 des résultats d'existence pour la métrique induite et pour la lamination mesurée de plissage des cœurs convexes de variétés hyperboliques convexe co-compactes. Il est bien entendu naturel de se demander si des résultats d'unicité sont valables aussi.

Pour la métrique induite, il est possible que les méthodes décrites, dans la section 4, pour les variétés à bord convexe régulier puissent encore s'appliquer. Il faudrait néanmoins des aménagements importants, car des différences significatives se font jour. En effet, dans ce cas, la surface $\overline{S}$ qu'on obtient est maintenant l'enveloppe convexe d'une courbe tracée sur S^2 (l'ensemble limite de la variété, bien sur). Cette surface n'est donc plus du tout régulière.

Etant donné une déformation infinitésimale de la métrique hyperbolique sur un cœur convexe, on peut encore en déduire un champ de vecteurs u sur le bord du revêtement universel du cœur convexe, puis, par l'application de Pogorelov, un champ de vecteurs $\overline{u}$ sur $\overline{S}$. Si la déformation ne change pas la métrique induite sur le bord, alors $\overline{u}$ est une déformation isométrique de $\overline{S}$.

Notons encore $\overline{v}$ la projection orthogonale de $\overline{u}$ sur $\overline{S}$, là ou elle est bien définie. Il est intéressant de constater que $\overline{v}$ vérifie encore une estimée Hölder sur Λ. Mais cette estimée est obtenue par un raisonnement plus fin que lorsque le bord est régulier. Schématiquement, on peut distinguer deux arguments correspondant à deux cas limites :

- aux points de Λ qui ne sont l'extrémité d'aucun segment tracé sur $\overline{S}$, $\overline{S}$ se comporte de manière C^1, et on peut appliquer le même type d'estimées que dans le cas régulier.
- aux points de Λ qui sont l'extrémité d'un segment s tracé sur $\overline{S}$, par contre, il faut utiliser un argument direct reposant sur le fait que la restriction de $\overline{u}$ à s est la restriction à s d'un champ de Killing de $\mathbf{R}^3$.

En réalité, l'estimée précise utilise les deux arguments, et, lorsque s existe, sa distance à l'origine joue un rôle.

Des variétés convexe co-compactes aux variétés géométriquement finies. — On s'est limité dans ce texte aux variétés hyperboliques convexe co-compactes, mais il n'y a à priori pas de raison de ne pas considérer des variétés qui sont seulement géométriquement finies, une partie au moins des résultats et des arguments qu'on a ébauchés devraient s'étendre à ce cas.

On pourrait aussi considérer les variétés, un peu particulière, qui ont un seul cusp, et dont le bord est un tore — leur π_1 étant $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ et agissant de manière parabolique sur H^3.

Remerciements

Certains éléments de preuves présentés ici ont été considérablement épurés grâce à de nombreuses remarques et suggestions de François Labourie. Je tiens aussi à remercier Francois Bonahon, Greg McShane et Igor Rivin pour des conversations utiles à la rédaction de ce texte.

Bibliographie

[Ale58a] A. D. ALEKSANDROV, *Vestnik Leningrad Univ.*, 13(1), 1958.

[Ale58b] A. D. ALEXANDROW, *Konvexe polyeder.* Akademie-Verlag, Berlin, 1958.

[And70] E.M. ANDREEV, Convex polyhedra in Lobacevskii space. *Mat. Sb.(N.S.)*, 81 (123):445–478, 1970.

[And71] E.M. ANDREEV, On convex polyhedra of finite volume in Lobacevskii space. *Math. USSR Sbornik*, 12 (3):225–259, 1971.

[BB02] X. BAO and F. BONAHON, Hyperideal polyhedra in hyperbolic 3 space. Preprint available at http://math.usc.edu/~fbonahon. *Bull. Soc. Math. France*, to appear, 2002.

[BC03] M. BRIDGEMAN and R.-D. CANARY, From the boundary of the convex core to the conformal boundary. *Geom. Dedicata*, 96:211–240, 2003.

[BO01] F. BONAHON and J.-P. OTAL, Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3. http://math.usc.edu/~fbonahon, 2001.

[Bon96] F. BONAHON, Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 5(2):233–297, 1996.

[Bon01] F. BONAHON, Geodesic laminations on surfaces. In *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, volume 269 of *Contemp. Math.*, pages 1–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Brä92] W. BRÄGGER, Kreispackungen und Triangulierungen. *Enseign. Math. (2)*, 38(3-4):201–217, 1992.

[Cal61] E. CALABI, On compact Riemannian manifolds with constant curvature, I. *AMS proceedings of Symposia in Pure Math*, 3:155–180, 1961.

[Cau13] A. L. CAUCHY, Sur les polygones et polyèdres, second mémoire. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 19:87–98, 1813.

[CdV91] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Invent. Math.*, 104(3):655–669, 1991.

[EM86] D. B. A. EPSTEIN and A. MARDEN, Convex hulls in hyperbolic spaces, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces. In D. B. A. Epstein, editor, *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space*, volume 111 of *L.M.S. Lecture Note Series.* Cambridge University Press, 1986.

[Fil] F. FILLASTRE, Surfaces convexes fuchsiennes. In preparation.

[Gro85] M. GROMOV, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Math.*, 82:307–347, 1985.

[Gro86] M. GROMOV, *Partial Differential Relations.* Springer, 1986.

[HK98] C. D. HODGSON and S. P. KERCKHOFF, Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery. *J. Differential Geom.*, 48:1–60, 1998.

[Isk00] I. ISKHAKOV, *On hyperbolic surface tessellations and equivariant spacelike convex polyhedral surfaces in Minkowski space.* PhD thesis, Ohio State University, 2000.

[Koe36] P. KOEBE, Kontaktprobleme der konformen Abbildung. *Abh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl.*, 88:141–164, 1936.

[Lab89] F. LABOURIE, Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes. *J. Differential Geom.*, 30:395–424, 1989.

[Lab92] F. LABOURIE, Métriques prescrites sur le bord des variétés hyperboliques de dimension 3. *J. Differential Geom.*, 35:609–626, 1992.

[Lab94] F. LABOURIE, Exemples de courbes pseudo-holomorphes en géométrie riemannienne. In Audin and Lafontaine, editors, *Pseudo-Holomorphic Curves in Symplectic Geometry*, pages 251–270. Birkhauser, 1994.

[Lab97] F. LABOURIE, Problèmes de Monge-Ampère, courbes holomorphes et laminations. *Geom. Funct. Anal.*, 7(3):496–534, 1997.

[Lab00] F. LABOURIE, Un lemme de Morse pour les surfaces convexes. *Invent. Math.*, 141(2):239–297, 2000.

[Lec02] C. LECUIRE, Plissage des variétés hyperboliques de dimension 3. Preprint 301, UMPA, ENS Lyon, 2002.

[LegII] A.-M. LEGENDRE, *Eléments de géométrie.* Paris, 1793 (an II). Première édition, note XII, pp.321-334.

[LS00] F. LABOURIE and J.-M. SCHLENKER, Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante. *Math. Annalen*, 316:465–483, 2000.

[Mes90] G. MESS, Lorentz spacetimes of constant curvature. Preprint I.H.E.S./M/90/28, 1990.

[Mou02] G. MOUSSONG, Personal communication. July 2002.

[Pog73] A. V. POGORELOV, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces.* American Mathematical Society, 1973. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 35.

[RH93] I. RIVIN and C. D. HODGSON, A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. *Invent. Math.*, 111:77–111, 1993.

[Riv86] I. RIVIN, *Thesis.* PhD thesis, Princeton University, 1986.

[Riv92] I. RIVIN, Intrinsic geometry of convex ideal polyhedra in hyperbolic 3-space. In M. Gyllenberg and L. E. Persson, editors, *Analysis, Algebra, and Computers in Mathematical Research*, pages 275–292. Marcel Dekker, 1992. (Proc. of the 21st Nordic Congress of Mathematicians).

[Riv94] I. RIVIN, Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume. *Annals of Math.*, 139:553–580, 1994.

[Riv96] I. RIVIN, A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space. *Annals of Math.*, 143:51–70, 1996.

[Rou02] M. ROUSSET, Sur la rigidité de polyèdres hyperboliques en dimension 3 : cas de volume fini, cas hyperidéal, cas fuchsien. math.GT/0211280; Bull. Soc. Math. France, to appear, 2002.

[Sch96] J.-M. SCHLENKER, Surfaces convexes dans des espaces lorentziens à courbure constante. *Commun. Anal. and Geom.*, 4:285–331, 1996.

[Sch98a] J.-M. SCHLENKER, Métriques sur les polyèdres hyperboliques convexes. *J. Differential Geom.*, 48(2):323–405, 1998.

[Sch98b] J.-M. SCHLENKER, Représentations de surfaces hyperboliques complètes dans H^3. *Annales de l'Institut Fourier*, 48(3):837–860, 1998.

[Sch00] J.-M. SCHLENKER, Dihedral angles of convex polyhedra. *Discrete Comput. Geom.*, 23(3):409–417, 2000.

[Sch01a] textscJ.-M. Schlenker, Convex polyhedra in Lorentzian space-forms. *Asian J. of Math.*, 5:327–364, 2001.

[Sch01b] J.-M. SCHLENKER, Einstein manifolds with convex boundaries. *Commentarii Math. Helvetici*, 76(1):1–28, 2001.

[Sch01c] J.-M. SCHLENKER, Hyperbolic manifolds with polyhedral boundary. math.GT/0111136, available at http://picard.ups-tlse.fr/~schlenker, 2001.

[Sch02a] J.-M. SCHLENKER, Hyperbolic manifolds with convex boundary. preprint, math.DG/0205305, available at http://picard.ups-tlse.fr/~schlenker, 2002.

[Sch02b] J.-M. SCHLENKER, Hyperideal polyhedra in hyperbolic manifolds. Preprint math.GT/0212355., 2002.

[Sch03] J.-M. SCHLENKER, Hyperbolic manifolds with constant curvature boundaries. In preparation, 2003.

[Sul79] D. SULLIVAN, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):171–202, 1979.

[Thu97] W.-P. THURSTON, Three-dimensional geometry and topology. Recent version of the 1980 notes. http://www.msri.org/publications/books/gt3m/, 1997.

[Tro91] M. TROYANOV Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):793–821, 1991.

[Wei60] A. WEIL, On discrete subgroups of Lie groups. *Annals of Math.*, 72(1):369–384, 1960.

[Wei02] H. WEISS, Local rigidity of 3-dimensional cone-manifolds. PhD thesis, available at `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/personen/weiss.html`, 2002.

Jean-Marc SCHLENKER
Laboratoire Émile Picard, UMR CNRS 5580
UFR MIG, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 4 (France)

`schlenker@picard.ups-tlse.fr`
`http://picard.ups-tlse.fr/~schlenker`