Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Colin de Verdière

Géodésiques pour des métriques riemanniennes semi-continues inférieurement

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 151-156
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__151_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (151–156)

GÉODÉSIQUES POUR DES MÉTRIQUES RIEMANNIENNES SEMI-CONTINUES INFÉRIEUREMENT

par *Yves COLIN DE VERDIÈRE*

C'est un exercice instructif que d'essayer d'affaiblir au maximum les hypothèses de régularité sur une métrique riemannienne pour définir quelques objets géométriques : géodésique, courbure, rayon d'injectivité, laplacien, équation de la chaleur, mouvement brownien, *etc.*

Ce jeu n'est pas entièrement gratuit comme le montre les exemples suivants :

- théorie du contrôle et métriques de Carnot,
- double d'une variété à bord,
- optique géométrique ou ondulatoire près des hypersurfaces de séparation de de milieux d'indices différents,
- laplaciens sur un feuilletage.

1. Métriques semi-continues inférieurement

Dans toute la suite X est une variété compacte C^∞ de dimension d .

Métriques euclidiennes sci : c'est la donnée, sur un espace vectoriel E , d'un sous-espace F de E et d'une structure euclidienne g_0 sur F . La métrique g sur E est donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si } x \in F \\ +\infty & \text{si } x \notin F \end{cases},$$

il est clair qu'une telle métrique est limite de la suite croissante des métriques euclidiennes $g_n(x \oplus y) = g_0(x) + n g_1(y)$ si $E = F \oplus G$ et g_1 métrique euclidienne sur g.

Une métrique riemannienne *sci* est la donnée pour chaque x de X d'une métrique euclidienne *sci* sur T_xX, soit g_x ayant la propriété suivante : l'application $(x,v) \mapsto g_x(v)$ est *sci* comme fonction numérique sur TX. On a la propriété caractéristique suivante :

PROPOSITION. — *Si g est une métrique riemannienne sci sur la variété compacte X, il existe une suite croissante g_n de métriques Finslériennes continues sur X telles que, $\forall (x,v) \in TX$, on ait $g(x,v) = \lim_{n\to\infty} g_n(x,v)$.*

Remarque. — Je ne sais pas si dans cet énoncé on peut remplacer "*Finslérienne*" par "*Riemannienne*".

Démonstration. — Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une base dénombrable de la topologie de X et supposons TX trivialisé sur les ω_α. Puis soit g_β une famille dénombrable dense de métriques euclidiennes (usuelles sur $\mathbf{R}^d$). Pour chaque (α,α',β) tel que $\omega_{\alpha'} \subset\subset \omega_\alpha$ et $g_\beta < g$ sur ω_α, on construit $g_{\alpha,\alpha',\beta} = \varphi \cdot g_\beta$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\omega_\alpha;\mathbf{R}^+)$, $\varphi_{|\omega_{\alpha'}} = 1$, $0 \le \varphi \le 1$.

Soit γ_n la suite de ces $g_{\alpha,\alpha',\beta}$ et $\tilde g_n = \sup_{n\ge 1} \gamma_n$, $g_n = \max(\tilde g_n, g_0)$, ($g_0 \le g$ partout). Alors g_n est une suite de métriques Finslériennes ayant la propriété voulue.

2. Exemples

a) Double d'une variété à bord. — Soit X une variété riemannienne (C^∞) compacte à bord et $Y = bX$ son bord. Soit Z l'espace topologique obtenu en recollant deux exemplaires X_+ et X_- de X le long de Y : si X est un domaine de $\mathbf{R}^2$, Z est la plaque X où on n'a pas identifié le dessus et le dessous (cette idée remonte au moins Birkhoff). Z admet une structure naturelle de variété C^∞ : soit $n(y)$ le vecteur normal à Y intérieur, unitaire. On définit des recollements $\varphi_\pm$ de $Y\times]0,\pm\varepsilon[$ avec $X_\pm$ par : $\varphi_\pm(y,t) = y + |t|n(y)$.

Il existe alors une métrique g sur Z, qui induit la métrique initiale sur $\mathring{X}_+$ et $\mathring{X}_-$. Cette métrique est continue sur Z. Par exemple, si X est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ avec la métrique euclidienne et s l'abscisse curviligne le long de y, on a :

$$g = dt^2 + \Big(1 - |t|\kappa(s)\Big)^2 ds,$$

où $\kappa(s)$ est la courbure algébrique du bord Y.

b) Milieu d'indice variable. — Soit X une variété C^∞, Z une hypersurface séparant X en deux composantes connexes X_1 et X_2. Soient g_1 (resp. g_2) des métriques riemanniennes sur X_1 (resp. X_2) telles que $\forall z \in Z$, $g_{1|T_zX} \leq g_{2|T_zX}$. On définit g par $g_{|X_1} = g_1$ et $g_{|\overset{\circ}{X}_2} = g_2$. C'est une métrique riemannienne *sci* sur X .

c) Cas d'une distribution de sous-espaces. — Soit D une distribution de sous-espaces (donnée pour chaque x de X d'un sous-espace D_x de dimension k de T_xX variant continûment avec x). Si g_0 est une métrique C^∞ auxiliaire sur X , on définit g par $g_{|D_x} = g_0$, $g_{|T_xX \setminus D_x} = +\infty$.

Deux cas extrêmes :

- le cas intégrable (feuilletages),
- le cas contrôlable (les crochets itérés des champs de vecteurs tangents à D engendrent T_xX pour tout x) : métriques de Carnot.

3. Géodésiques

DÉFINITION. — *Une courbe $\gamma : I \to X$, de classe H^1_{loc} , où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ est une géodésique si elle minimise localement l'énergie : $\forall t_0 \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute courbe γ_1 coïncidant avec γ sur $|t - t_0| \geq \varepsilon$ vérifie*

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|\dot\gamma_1(t)\|_g^2 dt \geq \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|\dot\gamma(t)\|_g^2 dt.$$

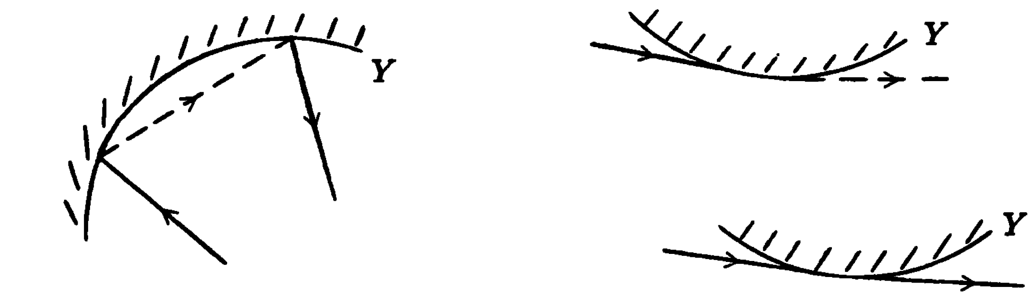
Dans tout ouvert où g est C^2 , les géodésiques sont les solutions des équations d'Euler-Lagrange.

THÉORÈME. — *Si X est compacte et g sci, pour tout couple $a, b \in X$ tels que $d_g(a,b) < +\infty$, il existe une géodésique γ joignant a à b et réalisant la distance de a à b.*

Démonstration. — Soit $\Omega^E_{a,b}$ l'ensemble des arcs $H^1([0,1],X)$ tels que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $E_g(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma\|_g^2 dt \leq E$. Cet ensemble est compact pour la topologie H^1 faible et d'après Ascoli pour la topologie C^0 . Il suffit donc de prouver que la fonction énergie E_g est *sci* sur $\Omega^E_{a,b}$ pour la topologie de la convergence uniforme. Cela est classique si g est Finslérienne continue et donc dans le cas général car alors $E_g = \sup_n E_{g_n}$ avec $g_n C^0$.

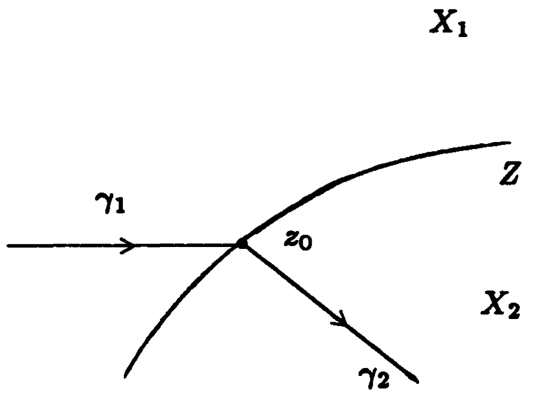
Exemples. —

a) On retrouve les *trajectoires du billard* : Deux types de géodésiques près du bord en dimension 2 :



$- - - - \rightarrow - -$ = trajectoire dans X_- ,
$\longrightarrow$ = trajectoire dans X_+ .

b) On retrouve les lois de la *réfraction* :



si $\vec{t}_1 = \frac{\dot{\gamma}_1}{\|\dot{\gamma}_1\|_1}$, $\vec{t}_2 = \frac{\dot{\gamma}_2}{\|\dot{\gamma}_2\|_2}$, alors $\forall\ \vec{v} \in T_{x_0}Z$, $g_1(\vec{t}_1, \vec{v}) = g_2(\vec{t}_2, \vec{v})$. En particulier, existence d'un cône limite $C_{x_0}Z \subset T_{x_0}X$, ensemble de toutes les directions possibles des géodésiques entrant dans X_2 par x_0 .

On peut aussi définir des notions d'indice de Morse et de points conjugués.

DÉFINITION. — *Soit $F : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ une fonction sci et $x_0 \in \mathcal{X}$, on définit l'indice de Morse de F en x_0 ($\leq +\infty$) par :* $\mathrm{ind}_{x_0}(F) = \max_Z(\dim Z)$; *$Z$ sous-variété de X , $x_0 \in Z$ et $F_{|Z}$ admet en x_0 un maximum local.*

On en déduit une notion d'indice de Morse d'une géodésique : $\mathcal{X} = \Omega_{a,b}$, ou d'une géodésique périodique : $\mathcal{X} = H^1(S^1, X)$ où F est l'énergie.

Points conjugués. — Soit $\gamma : [0, c] \to X$ une géodésique; $x_0 = \gamma(0)$, on considère la fonction $n(t)$ qui est l'indice de Max de $\gamma_{|[0,t]}$ dans $\Omega_{x_0,\gamma(t)}$. C'est une fonction croissante, finie et à valeurs entières. Les points conjugués de x_0 sur γ sont les points de discontinuité de $n(t)$. [$n(t)$ est fini, car si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ sont tels que sur $[t_1; t_{i+1}]$, γ minimise localement E et $W = \{\gamma_1 : [0,t] \to X | \forall i, \gamma_1(t_i) = \gamma(t_i)\}$, c'est une sous-variété de codimension finie et $E_{|W}$ a un minimum strict sur γ.]

4. Laplaciens

1) Cas où g est bornée. — Il existe g_0 métrique riemannienne C^∞ sur X et des constantes c_1 et c_2 telle que $0 < c_1 g_0 \leq g \leq c_2 g_0$. La forme quadratique $q(f) = \int_X \|df\|_g^2 v_g$ avec comme domaine $H^1(X)$ est fermée. L'extension de Friedrich de cette forme conduit à un opérateur autoadjoint sur $L^2(X, v_g)$ qui mérite le nom de laplacien associé à g . Ce n'est pas nécessairement un *opérateur* différentiel au sens classique.

Si $g_{|\Omega}$ (Ω ouvert de X) est C^2 alors $H_0^2(\Omega) \subset D(A)$ et Δ est le laplacien usuel dans Ω : $\forall f \in D(\Delta_g)$, $f_{|\Omega} \in H^2(\Omega)$ et $\Delta f_{|\Omega} = \Delta_{|\Omega} \cdot f_{|\Omega}$.

Là où g n'est pas régulière, il y a lieu d'écrire des conditions aux limites :

ⓐ Dans l'exemple du double d'un domaine à bord X , on peut ainsi identifier $\Delta = \Delta^X_{Dirichlet} \oplus \Delta^X_{Neumann}$ en considérant les espaces propres de l'involution évidente de $L^2(X_+ \cup X_-)$.

ⓑ Dans le cas où g a des discontinuités le long d'hypersurfaces, le formule de Green donne les conditions de recollement :

$$(1) \qquad D(\Delta_g) = \left\{ f \in H^1(X) | f = f_1 \oplus f_2, f_i \in H^2(X_i), \frac{\partial f_1}{\partial n_1}\sigma_1 + \frac{\partial f_2}{\partial n_2}\sigma_2 = 0 \right\}$$

où σ_i sont les volumes sur le bord de X_i et n_i les normales extérieures calculées pour les deux métriques.

• Si g est continue, $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ et la condition est $\frac{\partial f_1}{\partial n_1} + \frac{\partial f_2}{\partial n_2} = 0$: c'est le cas des variétés C^1 par morceaux.

• Si g n'est pas continue par exemple $g_1 = g_0$ et $g_2 = n^2 g_0$ (g_0 $C^\infty, n > 1$), $\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = n^{d-1}\sigma_0$ d'où la condition : $\frac{\partial f_1}{\partial n_1} = n^{d-2}\frac{\partial f_2}{\partial n_2}$.

Dans ce cas, on peut mettre en évidence le phénomène de réflexion totale de certaines ondes planes issues du milieu d'indice > 1. Décrivons le cas $X = \mathbb{R}^2$, $X_+ = \{y > 0\}$, $X_- = \{y < 0\}$, $g_0 = dx^2 + dy^2$: étudions les solutions de $\Delta f = \lambda f$ de la forme :

$$f_\pm(x,y) = F_\pm(y) \cdot e^{ix\xi} : \begin{cases} F''_+ + (\lambda - \xi^2)F_+ = 0 \\ F'' - +(\lambda n^2 - \xi^2)F_- = 0. \end{cases}$$

On voit que si $\lambda > \xi^2$, une onde plane incidente

$$F^i_-(y) = e^{i\sqrt{\lambda n^2 - \xi^2}\cdot y}$$

se répartie en une onde plane réfléchie

$$F^r_-(y) = r(\xi) e^{i\sqrt{\lambda n^2 - \xi^2}\cdot y}$$

et une onde réfractée

$$F_+^r(y) = t(\xi)e^{i\sqrt{\lambda-\xi^2}\cdot y}.$$

Dans le cas où $\xi^2/n^2 < \lambda < \xi^2$, l'onde réfractée est à décroissance exponentielle : $F_+^v = t(\xi)e^{-\sqrt{\xi^2-\lambda}\cdot y}$: on a réflexion totale.

Dans tous ces cas Δ est à résolvante compacte et on a l'asymptotique de Weyl si l'ensemble des discontinuités se présente comme une réunion finie d'hypersurfaces.

2) Cas où g est finie sur une distribution $D \subset TX$. — On est alors amené à supposer que la distribution des sous-espaces ($D_x \subset T_xX$; $x \in X$) est C^∞ et de dimension constante. Supposons que $g = g_{0|D}$ où g_0 est C^∞; on peut considérer la forme quadratique $q(f) = \int_X \|df\|_g^2 v_{g_0}$, elle est fermable, car

$$\widehat{D}(q) = \{f \in L^2(X) | Pf \in L^2(X)\}$$

où $P : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X; D^*)$ est défini par $Pf = df_{|D}$. L'extension de Friedrich de q a l'inconvénient de dépendre de g_0 . Mais c'est une sorte de laplacien.

Deux cas extrêmes :

- Cas où les crochets de D engendrent TX , Δ est alors un opérateur hypoelliptique du type considéré par Hörmander.

- Cas où D est un feuilletage, Δ est une sorte de laplacien le long des feuilles.