Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Barbara Schapira

Propriétés ergodiques du flot horocyclique d'une surface hyperbolique géométriquement finie

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 21 (2002-2003), p. 147-163

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2002-2003__21__147_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **21** (2003) 147–163

PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DU FLOT HOROCYCLIQUE D'UNE SURFACE HYPERBOLIQUE GÉOMÉTRIQUEMENT FINIE

Barbara SCHAPIRA

Résumé

Dans cet article, nous présentons plusieurs propriétés du flot horocyclique d'une surface géométriquement finie non nécessairement compacte : classification des mesures invariantes ou quasi-invariantes, et propriétés de non divergence et d'équidistribution des orbites.

Introduction

Le flot géodésique agissant sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique compacte S admet de nombreuses mesures de probabilité invariantes ergodiques. Il y a notamment celles portées par les géodésiques périodiques, mais aussi de nombreuses autres, parmi lesquelles les mesures de Gibbs, qui sont de plus mélangeantes.

La situation est beaucoup plus rigide pour le flot horocyclique, puisqu'on sait depuis les travaux de Furstenberg [F] qu'il est uniquement ergodique, et donc que toutes ses orbites s'équidistribuent vers la mesure de Liouville λ. Lorsque la surface n'est plus compacte, mais de volume fini, le résultat reste essentiellement le même : en dehors des probabilités invariantes induites par les orbites périodiques du flot horocyclique, la mesure de Liouville est la seule mesure invariante ergodique [Da1], et toutes les orbites non périodiques s'équidistribuent vers λ [Da-S].

Dans cet article, nous proposons d'abord une démonstration nouvelle de ces résultats, inspirée du travail de Martine Babillot (voir paragraphe 2).

2000 Mathematics Subject Classification: 37D40, 37A99.

Nous présentons également dans ce cadre simple une partie des résultats obtenus dans [S1], [S2], [S3] et [S4], en essayant de dégager les idées directrices des démonstrations.

Dans le paragraphe 3, nous étendons les résultats du paragraphe 2 dans le cas des mesures quasi-invariantes par le flot horocyclique et dont la dérivée de Radon-Nikodym est un cocycle höldérien fixé.

Pour finir, nous concentrons notre étude sur les surfaces géométriquement finies mais de volume infini. La classification des mesures invariantes ergodiques (non nécessairement finies) est connue dans ce cadre depuis les travaux de Bowen-Marcus [Bo-M], Burger [Bu] et Roblin [Ro]. En revanche, la question de l'équidistribution des horocycles a été peu étudiée (mentionnons tout de même un résultat d'équidistribution en moyenne de Césaro obtenu dans [Bu] dans un cas bien particulier). Dans [S2] et [S3], nous répondons partiellement à cette question dans le cadre des variétés à courbure négative variable, et nous exposons ces résultats dans le cadre des surfaces au paragraphe 4.

Je remercie Marc Peigné pour son aide précieuse durant la rédaction de ce travail.

Cet article est écrit en souvenir de Martine Babillot, dont l'enthousiasme et le goût pour la clarté et la rigueur mathématiques ont imprégné mes trois années de thèse.

1. Géométrie

Le demi-plan hyperbolique est l'espace $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ muni de la métrique hyperbolique $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Nous utiliserons aussi le modèle du disque de Poincaré pour l'espace hyperbolique. Plus précisément, l'espace $\mathbb{H}$ est isométrique au disque ouvert $\mathbb{D} = D(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique $\frac{1}{4}\frac{dx^2}{(1-|x|^2)^2}$, via l'homographie $z \to \frac{z-i}{z+i}$. Par cette application, le *bord à l'infini* $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à $S^1 = \partial\mathbb{D}$.

Le groupe $PSL(2,\mathbb{R})$ des isométries directes de $\mathbb{H}$ agit simplement transitivement sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$, de sorte que l'application qui au vecteur de coordonnées $(0,1)$ tangent en $o = (0,1)$ à $\mathbb{H}$ associe l'identité de $PSL(2,\mathbb{R})$ permet d'identifier ces deux espaces.

Le *cocycle de Busemann* est l'application continue sur $\partial\mathbb{H} \times \mathbb{H}^2$ définie par

$$\beta_\xi(x,y) := \lim_{z\to\xi} \left(d(x,z) - d(y,z)\right) .$$

Définissons l'application

$$v \in T^1\mathbb{H} \mapsto (v^-,v^+,\beta_{v^-}(\pi(v),o)) ,$$

où v^- et v^+ désignent les extrémités dans $\partial\mathbb{H}$ de la géodésique définie par v, et $\pi(v) \in \mathbb{H}$ est le point base de v. C'est un homéomorphisme entre le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$ et $\partial^2\mathbb{H} \times \mathbb{R} := \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H} \setminus \text{Diagonale} \times \mathbb{R}$.

Si Γ est un sous-groupe discret de $PSL(2,\mathbb{R})$, ses orbites s'accumulent sur $\partial\mathbb{H}$; l'*ensemble limite* de Γ est l'ensemble $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o$ des points d'accumulation de l'orbite de o dans $\partial\mathbb{H}$. Un point ξ de Λ_Γ est dit *conique* ou *radial* s'il est limite d'une suite $(\gamma_n o)$ de points de Γo qui restent à distance bornée du rayon géodésique $[o\xi)$ joignant o à ξ. Nous noterons Λ_{rad} l'ensemble des points limite radiaux.

Une isométrie de $PSL(2,\mathbb{R})$ est dite *hyperbolique* si elle fixe exactement deux points de $\partial\mathbb{H}$, elle est *parabolique* si elle fixe exactement un point de $\partial\mathbb{H}$, et *elliptique* sinon. Nous noterons $\Lambda_{\mathrm{p}} \subset \Lambda_\Gamma$ l'ensemble des points paraboliques, *i.e.* des points de Λ_Γ fixés par une isométrie parabolique de Γ.

Toute surface hyperbolique s'obtient comme le quotient $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ de l'espace hyperbolique par un sous-groupe discret sans torsion (*i.e.* sans élément elliptique) Γ de $PSL(2,\mathbb{R})$. Le fibré unitaire tangent T^1S s'identifie à $\Gamma\backslash PSL(2,\mathbb{R})$.

Dans tout cet article, la surface S sera supposée *géométriquement finie*, c'est-à-dire que Γ est de type fini. Dans ce cas, l'ensemble limite Λ_Γ est la réunion disjointe de Λ_{rad} et de Λ_{p}. Lorsque S est compacte, on a $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\mathrm{rad}} = \partial\mathbb{H}$. Elle est dite *convexe-cocompacte* lorsque le sous-ensemble $\Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R}$ de $\partial^2\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ est cocompact modulo Γ ; dans ce cas, on a $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\mathrm{rad}}$. Lorsque S est de volume fini mais non compacte, on a $\Lambda_\Gamma = \partial\mathbb{H}$.

Rappelons que les géodésiques de $\mathbb{H}$ sont les demi-droites verticales et les demi-cercles orthogonaux au bord (*i.e.* centrés sur l'axe réel). Les horocyles sont les droites horizontales et les cercles tangents à l'axe réel. Tout vecteur $v \in T^1\mathbb{H}$ détermine une unique géodésique à laquelle il est tangent. De plus, il est orthogonal à exactement deux horocycles passant par son point base, centrés respectivement en v^+ et v^-. On appellera *horocycle fortement instable* de v, noté $H^+(v)$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ce dernier horocycle, et pointant vers l'extérieur.

Le *flot géodésique* $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ agit sur $T^1\mathbb{H}$ en poussant un vecteur v d'une distance t le long de la géodésique qu'il définit. Dans l'identification de $T^1\mathbb{H}$ avec $PSL(2,\mathbb{R})$, cette action correspond à la multiplication à droite par le sous-groupe à un paramètre

$$\left\{a_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le *flot horocyclique* fortement instable $(h^s)_{s\in\mathbb{R}}$ agit sur $T^1\mathbb{H}$ en décalant un vecteur v d'une distance $|s|$ le long de l'horocycle fortement instable qu'il définit. Cette action correspond à la multiplication à droite dans $PSL(2,\mathbb{R})$ par le sous-groupe à un paramètre

$$\left\{n_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ces deux flots vérifient la relation de commutation fondamentale suivante :

$$g^t \circ h^s = h^{se^t} \circ g^t \tag{1}$$

Le fibré unitaire tangent T^1S s'identifiant au quotient de $PSL(2,\mathbb{R})$ par l'action à gauche de Γ, ces deux flots induisent au quotient les flots géodésique et horocyclique de T^1S.

2. Unique ergodicité du flot horocyclique

Dans tout le paragraphe, la surface S sera supposée compacte ou de volume fini.

La *mesure de Liouville* λ sur $T^1 S$ est la mesure de Lebesgue de $T^1 S$; elle est à la fois invariante par le flot horocyclique et le flot géodésique. Lorsque la surface S est de volume fini, et en particulier lorsqu'elle est compacte, la mesure de Liouville est finie, et ergodique pour les actions de (g^t) et (h^s). Dans les « coordonnées » données par l'homéomorphisme $T^1 S \simeq S^1 \times S^1 \setminus$ Diagonale $\times \mathbb{R}$, on peut montrer que

$$d\lambda(v^-,v^+,t) = \frac{dv^- \, dv^+ \, dt}{|v^- - v^+|^2},$$

où $|v^- - v^+|$ désigne la distance euclidienne entre v^- et v^+ sur S^1 et dv est la mesure de Lebesgue normalisée sur S^1.

La classification topologique des orbites du flot horocyclique est bien connue. Lorsque S est compacte, toutes les orbites sont denses dans $T^1 S$; si S est de volume fini, la présence de cusps entraîne l'existence d'orbites périodiques pour $(h^s)_{s\in\mathbb{R}}$ et toutes les autres orbites sont denses.

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous allons préciser le comportement ergodique des orbites du flot horocyclique.

2.1. Cas des surfaces compactes

Dans ce paragraphe, nous présentons une démonstration géométrique du résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 (Furstenberg, [F]). — *Soit S une surface hyperbolique compacte. Alors le flot horocyclique $(h^s)_{s\in\mathbb{R}}$ agissant sur $T^1 S$ est uniquement ergodique, et la mesure de Liouville sur $T^1 S$ est l'unique mesure (finie) (h^s)-invariante, à une constante multiplicative près.*

Nous verrons que l'énoncé ci-dessus est équivalent au résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Soit S une surface hyperbolique compacte. Pour toute fonction continue $\psi : T^1 S \to \mathbb{R}$ et tout $v \in T^1 S$, on a*

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \psi \circ h^s(v)\, ds \to \frac{1}{\lambda(T^1 S)} \int_{T^1 S} \psi \, d\lambda \quad \textit{quand} \quad r \to +\infty,$$

et la convergence est uniforme en $v \in T^1 S$.

Pour tout $v \in T^1S$, pour toute fonction continue $\psi : T^1S \to \mathbb{R}$ et tout réel $r > 0$, nous noterons

$$M_{r,v}(\psi) := \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \psi \circ h^s(v)\, ds\,, \quad \text{et} \quad M^t_{r,v}(\psi) := (g^t)_* M_{r,v}(\psi)\,,$$

où $(g^t)_* M_{r,v}(\psi)$ désigne la quantité $M_{r,v}(\psi \circ g^t)$. En utilisant (1), on obtient l'égalité fondamentale

$$(g^t)_* M_{r,v}(\psi) = M_{re^t, g^t v}(\psi)\,. \tag{2}$$

Nous allons d'abord démontrer le théorème 2.2 en utilisant une approche mise en lumière par Martine Babillot, puis nous montrerons l'équivalence entre les deux énoncés ci-dessus.

Le fait que le flot géodésique est mélangeant pour λ, combiné avec sa structure de quasi-produit dans $\partial\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, permet d'obtenir le résultat essentiel suivant (dans un cadre bien plus général que celui de cet article) :

PROPOSITION 2.3 (Babillot, [B1]). — *Soit $r > 0$ fixé. Pour tout $u \in T^1S$, les probabilités $((g^t)_* M_{r,u})_{t \geqslant 0}$ convergent faiblement vers la mesure de Liouville normalisée $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\lambda$ quand $t \to +\infty$.*

LEMME 2.4 (Babillot, [B2]). — *Soit $r > 0$ fixé. Pour toute fonction $\psi : T^1S \to \mathbb{R}$ continue, les applications $u \to (g^t)_* M_{r,u}(\psi)$ sont équicontinues en $t \geqslant 0$.*

Démonstration : La preuve est reprise de [B2] et repose de manière cruciale sur la relation (1). Nous aurons besoin du flot horocyclique stable, noté $(\bar{h}^s)_{s\in\mathbb{R}}$, qui déplace les vecteurs le long de leur horosphère fortement stable. Il correspond dans $PSL(2,\mathbb{R})$ à une action à droite du sous-groupe à un paramètre $\left\{\bar{n}^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\right\}$. L'analogue de la relation (1) est alors $g^t \circ \bar{h}^s = \bar{h}^{se^{-t}} \circ g^t$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. La fonction ψ étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $w \in T^1S$, tout $|\tau| < \delta$ et $|s| < \delta$, on ait $|\psi(\bar{h}^s \circ g^\tau(w)) - \psi(w)| < \varepsilon$.

Fixons $v \in T^1S$. Considérons des voisinages V_v de v de la forme $V_v = v.V$, où V désigne un voisinage de l'identité dans $PSL(2,\mathbb{R})$. Tout élément $g \in G$ s'écrit de manière unique sous la forme $g = n^s a^t \bar{n}^{s'}$, et les paramètres varient continûment en fonction de g. En particulier, pour tout $w \in V_v$ et tout $s \in [-r,r]$, on peut écrire $h^s(w) = \bar{h}^{\bar{\sigma}(w,s)} \circ g^{\tau(w,s)} \circ h^{\sigma(w,s)}(v)$. Si le voisinage V_v est choisi assez petit, on peut assurer que $|\bar{\sigma}(w,s)| < \delta$, $|\tau(w,s)| < \delta$ et $|\sigma(w,s) - s| < \delta$. On a alors pour tout $t \geqslant 0$ et $w \in V_v$

$$\begin{aligned} M^t_{r,w}(\psi) &= \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \psi \circ g^t \circ \bar{h}^{\bar{\sigma}(w,s)} \circ g^{\tau(w,s)} \circ h^{\sigma(w,s)}(v)\, ds \\ &= \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \psi \circ \bar{h}^{\bar{\sigma}(w,s)e^{-t}} \circ g^{\tau(w,s)} \circ g^t \circ h^{\sigma(w,s)}(v)\, ds\,. \end{aligned}$$

Vu le choix de w, le terme de droite est ε-proche de $\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\psi\circ g^t\circ h^{\sigma(w,s)}(v)\,ds$, et ceci uniformément en $t\geqslant 0$.

Comme $|\sigma(w,s)-s|<\delta$, la quantité ci-dessus diffère de $M^t_{r,v}(\psi)$ d'au plus $2\delta\|\psi\|_\infty$. Il reste alors à choisir δ suffisamment petit pour que $2\delta\|\psi\|_\infty<\varepsilon$, ce qui achève la démonstration. □

Démonstration du théorème 2.2 : Soit $\psi : T^1S\to\mathbb{R}$ une fonction continue. La propriété d'équicontinuité ci-dessus permet immédiatement de déduire du théorème 2.3 que les moyennes $M^t_{1,v}(\psi)$ convergent uniformément en $v\in T^1S$ vers $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\int_{T^1S}\psi\,d\lambda$ quand $t\to+\infty$, puisque T^1S est compact.

La relation (2) donne $M_{r,u}(\psi)=M^t_{1,v}(\psi)$ pour $t=\log r$ et $v=g^{-t}u$. De cette relation et de la convergence uniforme de $M^t_{1,v}(\psi)$ vers $\int_{T^1S}\psi\,d\lambda$ quand $t\to+\infty$, on déduit la convergence uniforme de $M_{r,u}(\psi)$ vers $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\int_{T^1S}\psi\,d\lambda$ quand $r\to+\infty$. Ceci conclut la preuve du théorème 2.2. □

Démonstration du théorème 2.1 : Si M est une mesure de probabilité invariante par $(h^s)_{s\in\mathbb{R}}$ sur T^1S, on a

$$\int_{T^1S}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\psi\circ h^s(u)ds\,dM(u)=\int_{T^1S}\psi(u)\,dM(u)\,. \tag{3}$$

Le théorème 2.2 donne la convergence du terme de gauche vers $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\int_{T^1S}\psi\,d\lambda$ quand $r\to+\infty$. On en déduit que $M=\frac{1}{\lambda(T^1S)}\lambda$; ceci étant vrai pour toute mesure M invariante, on a bien prouvé que $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\lambda$ est l'unique probabilité invariante par $(h^s)_{s\in\mathbb{R}}$ sur T^1S. □

Remarque 2.5. — Nous venons de montrer que le théorème 2.1 découle du théorème 2.2, mais ces deux résultats sont équivalents. C'est un fait très classique et élémentaire de théorie ergodique (voir par exemple [P] chapitre 4 proposition 2.8) ; nous détaillons ici la réciproque par souci de clarté.

Supposons le flot horocyclique uniquement ergodique. Pour tout $u\in T^1S$, toute valeur d'adhérence de la famille $(M_{r,u})_{r\geqslant 0}$ est nécessairement une probabilité invariante par le flot. Donc toutes les suites $(M_{r,u})_{r\geqslant 0}$ tendent vers $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\lambda$ quand $r\to+\infty$.

La convergence est nécessairement uniforme en $u\in T^1S$ à ψ fixée ; en effet, sinon on pourrait trouver $\varepsilon>0$, une suite croissante (r_n) tendant vers $+\infty$, une suite (u_n) de T^1S et une fonction continue $\psi : T^1S\to\mathbb{R}$ telles que pour tout $n\geqslant 0$, on ait

$$\left|M_{r_n,u_n}(\psi)-\frac{1}{\lambda(T^1S)}\int_{T^1S}\psi\,d\lambda\right|\geqslant\varepsilon\,.$$

Quitte à extraire, on pourrait supposer que (u_n) converge vers u. D'autre part, l'équicontinuité assure que pour n assez grand, les quantités $M_{r_n,u_n}(\psi)$ et $M_{r_n,u}(\psi)$ sont $\varepsilon/2$-proches. On obtient une contradiction lorsque $n \to +\infty$ puisque la suite $(M_{r_n,u}(\psi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda(\psi)/\lambda(T^1S)$.

2.2. Surfaces de volume fini

Lorsque S est de volume fini mais non compacte, les résultats restent essentiellement les mêmes. Nous donnons les énoncés précis, mais nous ne ferons qu'esquisser les démonstrations. On a d'abord le

THÉORÈME 2.1' (Dani [Da1]). — *Soit S une surface hyperbolique de volume fini. Alors les seules mesures de probabilité (h^s)-invariantes et ergodiques sont la mesure de Liouville normalisée $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\lambda$ et les mesures de probabilité induites par les orbites périodiques du flot horocyclique.*

L'équidistribution des orbites devient :

THÉORÈME 2.2' (Dani-Smillie, [Da-S]). — *Soit S une surface hyperbolique de volume fini. Pour tout vecteur $v \in T^1S$ qui n'est pas (h^s)-périodique, les mesures de probabilité $(M_{r,v})_{r>0}$ convergent faiblement vers la mesure de Liouville normalisée $\frac{1}{\lambda(T^1S)}\lambda$.*

Du fait de la non-compacité de S, les preuves du paragraphe précédent ne s'appliquent plus. On peut utiliser alors l'égalité (3) et le théorème 2.3 pour obtenir directement le théorème 2.1' de classification des mesures invariantes. C'est l'approche privilégiée par Roblin qui obtient un résultat analogue au théorème 2.1' dans le cadre très général d'espaces $CAT(-1)$ géométriquement finis [Ro].

Ensuite, le théorème 2.2' d'équidistribution nécessite le résultat quantitatif ci-dessous sur la non divergence des orbites du flot horocyclique :

THÉORÈME 2.6 (Dani, [Da2]). — *Soit S une surface hyperbolique de volume fini. Pour tout $u \in T^1S$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_{u,\varepsilon} \subset T^1S$ et un réel $T_0 > 0$ tels que pour tout $t \geqslant T_0$ on ait*

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \mathbf{1}_{K_{u,\varepsilon}}(h^s u)\, ds \geqslant 1-\varepsilon .$$

En d'autres termes, ce théorème signifie que la suite $(M_{r,u})_{r>0}$ est « tendue », *i.e.* elle n'admet que des mesures de probabilité comme valeurs d'adhérence quand $r \to +\infty$.

À l'aide de ce théorème, on peut démontrer le théorème 2.2' en suivant les idées développées dans la remarque 2.5. En effet, d'après le théorème 2.6, les valeurs d'adhérence de la famille $(M_{r,u})_{r>0}$ quand $r \to +\infty$ sont des probabilités (h^s)-invariantes. Un argument dû à Bekka et Mayer [Be-M, p.136] et basé sur la relation (2) assure que ces valeurs d'adhérence ne chargent pas les orbites périodiques du flot horocyclique. On utilise alors le théorème 2.1' pour conclure que la suite $(M_{r,u})_{r>0}$ converge faiblement vers la mesure de Liouville.

3. Mesures quasi-invariantes par le flot horocyclique

3.1. Définitions, énoncés

Un *cocycle höldérien* pour le flot horocyclique est une application höldérienne Δ de $\mathbb{R} \times T^1S$ dans $\mathbb{R}_*^+$ qui vérifie : pour tout $v \in T^1S$ et $(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Delta(s_1 + s_2,v) = \Delta\left(s_1,h^{s_2}(v)\right)\ \Delta(s_2,v)\,.$$

Une *mesure* (h^s)*-quasi-invariante pour le cocycle* Δ est une mesure m sur T^1S telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, la mesure $(h^s)_*m$ est équivalente à m et on a

$$\frac{dm}{d(h^s)_*m}(h^s v) = \Delta(s,v),\, m - p.p.$$

Rappelons un procédé classique pour construire des cocycles höldériens [L]. Si $f : T^1S \to \mathbb{R}$ est une application höldérienne, on pose

$$\Delta^f(s,v) = \exp\left(\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(g^{-t}h^s v)\,dt - \int_0^t f(g^{-t}v)\,dt\right)\,.$$

Cette quantité est bien définie car f est höldérienne et les rayons géodésiques $(g^{-t}h^s v)_{t\geqslant 0}$ et $(g^{-t}v)_{t\geqslant 0}$ sont asymptotes.

Le théorème suivant est valable en toute dimension. La démonstration de Babillot et Ledrappier utilise la dynamique symbolique, celle développée dans [S1] est de nature géométrique.

THÉORÈME 3.1 (Babillot-Ledrappier, [Ba-L]). — *Soit S une surface compacte. Alors pour toute fonction höldérienne $f : T^1S \to \mathbb{R}$, il existe une unique mesure de probabilité λ^f qui est (h^s)-quasi-invariante pour le cocycle Δ^f.*

Pour toute fonction continue $\psi : T^1S \to \mathbb{R}$ et tout $r > 0$, définissons la moyenne

$$A^f_{r,u}(\psi) := \frac{\int_{-r}^r \psi\circ h^s(u)\Delta^f(s,v)\,ds}{\int_{-r}^r \Delta^f(s,v)\,ds}\,.$$

Nous obtenons alors le

THÉORÈME 3.2. — *Soit S une surface hyperbolique compacte, $f : T^1S \to \mathbb{R}$ une application höldérienne et $u \in T^1S$. Alors les mesures de probabilité $(A^f_{r,u})_{r>0}$ convergent faiblement vers la mesure λ^f.*

3.2. Démonstrations

Pour démontrer les deux résultats qui précèdent, nous n'utilisons pas les notions de flot horocyclique et de mesure quasi-invariante par le flot, mais celles de feuilletage horocyclique (noté $\mathcal{F}$) de $T^1 S$ et de mesures transverses quasi-invariantes par holonomie.

Commençons par quelques définitions. Si $\varphi : B \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ est une carte du feuilletage, l'ouvert B est appelé une *boîte*, un ensemble P de la forme $\varphi^{-1}(\{w\} \times \mathbb{R})$ (resp. un ensemble T de la forme $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{v\})$) est appelé une *plaque* (resp. une *transversale*). Par abus de notation, nous écrirons alors $B = T \times P$. Notons que les plaques de B sont exactement les feuilles du feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur B. Nous ne considérerons par la suite que des boîtes, plaques et transversales relativement compactes.

Une *application d'holonomie triviale* $\zeta : T \to T'$ entre deux transversales T et T' d'une même boîte B est l'application qui à $w \in T$ associe le point d'intersection w' de la plaque P_w de w avec T'. Plus généralement, une application d'holonomie est un élément du pseudogroupe engendré par les applications d'holonomie triviales des boîtes d'un atlas $\mathcal{U}$ du feuilletage. Dans le cas du feuilletage horocyclique de $T^1\mathbb{H} \simeq \partial^2\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, qui est trivial, on dispose de transversales globales de la forme $\partial\mathbb{H} \setminus \{v^+\} \times \{v^+\} \times \mathbb{R}$, et les applications d'holonomie entre deux telles transversales s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \partial\mathbb{H} \setminus \{u^+\} \times \{u^+\} \times \mathbb{R} & \to & \partial\mathbb{H} \setminus \{v^+\} \times \{v^+\} \times \mathbb{R} \\ (w^-, u^+, t(w)) & \mapsto & (w^-, v^+, t(w)) \end{array}$$

Remarquons que dans le cadre du feuilletage horocyclique d'une surface hyperbolique compacte, si v et v' sont deux vecteurs d'un même horocycle, et si T et T' sont deux transversales au feuilletage passant respectivement par v et v', il existe un unique germe d'application d'holonomie de T dans T' envoyant v sur v'.

Notons $\mathcal{R}$ la *relation d'équivalence du feuilletage*, c'est-à-dire l'ensemble des couples de points d'un même horocycle. Un *cocycle pour le feuilletage* est une application Δ définie sur $\mathcal{R}$ qui satisfait la relation

$$\Delta(u,v)\Delta(v,w) = \Delta(u,w)\,.$$

Un cocycle Δ pour le feuilletage $\mathcal{F}$ définit de manière unique un cocycle $\tilde{\Delta}$ pour l'action du flot horocyclique par $\tilde{\Delta}(s,v) := \Delta(h^s v, v)$. Réciproquement, pour tout $(w,v) \in \mathcal{R}$, il existe un unique $s \in \mathbb{R}$ tel que $w = h^s v$ de sorte qu'à tout cocycle $\tilde{\Delta}$ pour le flot est associé un cocycle Δ pour le feuilletage défini par $\Delta(w,v) := \tilde{\Delta}(s,v)$. Nous utiliserons donc désormais la même notation pour un cocycle Δ sur le feuilletage et le cocycle associé pour le flot horocyclique.

Une *mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle* Δ est la donnée d'une famille $\mu = \{\mu_T\}$ de mesures de Radon sur toutes les transversales T au feuilletage qui satisfait la relation

$$\frac{d\mu_{T'}}{d\zeta_*\mu_T}(\zeta v) = \Delta(\zeta v, v)\,.$$

Un *système de Haar* $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$ est la donnée d'une famille de mesures de Radon sur chaque horocycle fortement instable H^+, qui vérifie la condition de régularité suivante. Pour toute application continue $\psi : B \to \mathbb{R}$ avec $B = T \times P$ une boîte relativement compacte, l'application

$$w \in T \mapsto \int_{P_w} \psi(v) d\alpha_{H^+}(v)$$

est continue. Un exemple fréquemment utilisé ici est celui de la mesure ds d'intégration selon le paramétrage du flot horocyclique (h^s).

La donnée d'une mesure transverse μ quasi-invariante pour le cocycle Δ et d'un système de Haar α permet de définir une mesure $\mu \circ \alpha$ sur T^1S, définie sur toute boîte $B = T \times P$ par

$$\mu \circ \alpha(B) = \int_T d\mu_T(w) \int_{P_w} \Delta(v,w)\, d\alpha_{H^+}(v)\,.$$

Par quasi-invariance de μ, la quantité ci-dessus ne dépend pas du choix de la transversale T dans B, et cette définition ne présente donc pas d'ambiguïté.

Dans le cas particulier où le système de Haar considéré est ds, la mesure « produit » obtenue est quasi-invariante par le flot horocyclique, et plus précisément, on a :

PROPOSITION 3.3. — *La mesure transverse $\mu = \{\mu_T\}$ est quasi-invariante par holonomie pour le cocycle Δ si et seulement si la mesure $\mu \circ ds$ sur T^1S est quasi-invariante par (h^s) pour le cocycle Δ.*

Si $f : T^1S \to \mathbb{R}$ est une application höldérienne, la *mesure d'équilibre* m^f associée sur T^1S est un exemple de tel produit. C'est une mesure finie, que l'on supposera normalisée en une probabilité. De plus, elle est invariante par le flot géodésique. Il existe une construction géométrique explicite de m^f, due à Ledrappier [L] et détaillée par exemple dans [S4]. Elle s'écrit sous la forme $m^f = \mu^f \circ \mu_H^f$, où μ^f est une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle Δ^f défini au paragraphe 3.1, et μ_H^f un système de Haar.

Cette mesure m^f n'est pas quasi-invariante par le flot horocyclique. En revanche, la mesure $\lambda^f = \mu^f \circ ds$ produit de la même mesure transverse par la mesure ds d'intégration le long du flot est quasi-invariante par le cocycle Δ^f (voir proposition 3.3).

L'énoncé du théorème 3.2 ressemble beaucoup à celui du théorème 2.2 ; cependant, nous verrons plus loin que c'est une propriété d'équidistribution d'autres moyennes, vers la mesure m^f introduite ci-dessus, qui nous servira à démontrer le théorème 3.1.

Soit $\psi : T^1S \to \mathbb{R}$ une application continue. On introduit les moyennes suivantes :

$$M_{r,u}^f(\psi) := \frac{\int_{\{h^s u, |s|<r\}} \psi(v)\Delta^f(v,u)\, d\mu_H^f(v)}{\int_{\{h^s u, |s|<r\}} \Delta^f(v,u)\, d\mu_H^f(v)}\,.$$

Ces moyennes sont analogues aux moyennes $A_{r,u}^f(\psi)$ définies précédemment, mais on utilise ici un système de Haar différent sur les horocycles.

THÉORÈME 3.4 (S. [S1]). — *Soit S une surface compacte, et $f : T^1S \to \mathbb{R}$ une application höldérienne fixée. Alors pour tout $u \in T^1S$, les mesures de probabilité $(M^f_{r,u})_{r>0}$ convergent vers la mesure m^f. De plus, si $\psi : T^1S \to \mathbb{R}$ est une fonction continue fixée, les moyennes $(M^f_{r,u}(\psi))_{r>0}$ convergent uniformément en $u \in T^1S$.*

Les schémas des démonstrations des théorèmes 3.1 et 3.4 sont ceux des théorèmes 2.1 et 2.2.

D'abord, la structure produit de m^f permet de montrer qu'elle est mélangeante, ce qui donne alors la

PROPOSITION 3.5 (Babillot, [B1]). — *Soit S une surface hyperbolique compacte, $f : T^1S \to \mathbb{R}$ une application höldérienne, $u \in T^1S$ et $r > 0$. Alors les mesures de probabilité $((g^t)_* M^f_{r,u})_{t>0}$ convergent faiblement vers m^f quand $t \to +\infty$.*

On montre alors que les fonctions $u \mapsto (g^t)_* M^f_{r,u}(\psi)$ sont équicontinues en $t > 0$ (voir [S1], lemme 4.3 et les lemmes techniques de [Ro]), ce qui permet d'obtenir une convergence uniforme en u à ψ fixée dans le théorème ci-dessus. L'égalité

$$(g^t)_* M^f_{r,u}(\psi) = M_{re^t, g^t u}(\psi)$$

permet d'achever la démonstration du théorème 3.4.

Une égalité analogue à (3) (voir lemme 3.6 de [S1] ainsi que [Ro]) permet alors de déduire le théorème 3.1 du théorème 3.4 ci-dessus, de la même manière que le théorème 2.1 se déduit du théorème 2.2.

Nous donnons la preuve suivante qui n'est pas détaillée dans [S1] (théorème 4.6).

Démonstration du théorème 3.2 : Il suffit de démontrer le théorème pour des fonctions ψ continues à support dans une boîte $B = T \times P$ relativement compacte. Pour tout $r > 0$, on approche la moyenne $A^f_{r,u}(\psi)$ par la quantité

$$\int_T d\nu^{f,r}_T(w) \int_{\{s | h^s(u) \in P_w\}} \psi(h^s u)\Delta^f(h^s u, w)\, ds\,, \tag{4}$$

où $\{\nu^{f,r}_T\}$ est la mesure transverse définie sur toute transversale T par

$$\nu^{f,r}_T := \frac{1}{\int_{-r}^{r} \Delta^f(s,u)\, ds} \sum_{w \in T \cap \{h^s u, |s| < r\}} \Delta^f(w,u)\delta_w\,.$$

L'erreur commise dans l'approximation (4) est due d'une part à un éventuel point $w \in T \cap \{h^s u, |s| < r\}$ tel que

$$\int_{\{s | h^s u \in P_w\}} \psi(h^s u)\Delta^f(h^s u, w)\, ds > \int_{\{s | h^s u \in P_w \text{ et } |s| < r\}} \psi(v)\Delta^f(h^s u, w)\, ds\,,$$

et d'autre part à un éventuel $w \in T \setminus \{h^s u, |s| < r\}$ tel que

$$\int_{\{s \mid h^s u \in P_w \text{ et } |s|<r\}} \psi(h^s u) \Delta^f(h^s u, w)\, ds > 0 .$$

Cette erreur est donc majorée en valeur absolue par

$$\frac{2\|\psi\|_\infty \sup_{w\in T} \Delta^f(w,u) \int_{\{s \mid h^s u \in P_w\}} \Delta^f(h^s u,w)\, ds}{\int_{-r}^{r} \Delta^f(s,u)\, ds} .$$

Le numérateur ci-dessus est clairement borné indépendamment de $r > 0$. Et $\int_{-r}^{r} \Delta^f(s,u)\, ds$ tend vers $+\infty$ quand $r \to +\infty$. En effet, comme la fonction f est höldérienne, on peut montrer que

$$|\log \Delta^f(s,u)| = \left| \int_0^{+\infty} \left(f(g^{-t} h^s u) - f(g^{-t} u) \right) ds \right| \leqslant C(f)\, d(u, h^s u)^{\alpha(f)} ,$$

où $C(f)$ est une constante positive et $\alpha(f) \in]0,1]$ est l'exposant de Hölder de f. Comme $T^1 S$ est compact, la distance $d(u, h^s u)$ est bornée ; on en déduit immédiatement que Δ^f est minoré par une constante strictement positive, ce qui donne le résultat voulu.

L'erreur commise dans l'approximation (4) tend donc vers 0 quand $r \to +\infty$. On en déduit que les valeurs d'adhérence de $(A^f_{r,u})$, qui sont des probabilités, sont celles des mesures $\nu_T^{f,r} \circ ds$. Ceci implique aussi que les valeurs d'adhérence des mesures $\nu_T^{f,r}$ quand $r \to +\infty$ sont des mesures finies non nulles. Par construction de ces mesures, toutes leurs valeurs d'adhérence sont nécessairement des mesures transverses quasi-invariantes pour le cocycle Δ^f ; les valeurs d'adhérence des mesures $\nu_T^{f,r} \circ ds$ sont donc des probabilités quasi-invariantes par le flot horocyclique pour le cocycle Δ^f. Le théorème 3.1 permet alors de conclure qu'elles sont toutes égales à $\frac{1}{\lambda^f(T^1 S)} \lambda^f$. □

REMARQUE 3.6. — Certains des résultats ci-dessus se généralisent sans trop de difficultés. Par exemple, la classification des mesures transverses quasi-invariantes pour le cocycle Δ^f s'étend aux variétés géométriquement finies de dimension quelconque et de courbure variable, sous réserve que la mesure de Gibbs m^f soit finie (voir [C] pour les cas où elle est finie et [S4] pour la démonstration, ainsi que [Ro] dans le cas $f \equiv 0$).

Le théorème 3.4 ne s'étend en dimension plus grande et en courbure variable que sur les variétés compactes ou convexes-cocompactes, avec une hypothèse supplémentaire satisfaite en courbure constante et dans le cas des surfaces.

En revanche, faute d'un énoncé de non divergence du type du théorème 2.6, il ne s'étend pas a priori aux variétés géométriquement finies quelconques, sauf dans le cas $f \equiv 0$ expliqué au paragraphe ci-dessous.

4. Propriétés d'équidistribution en volume infini

4.1. Équidistribution des orbites du flot horocyclique

Dans le cadre général d'une surface hyperbolique géométriquement finie S, nous serons obligés de restreindre notre étude à l'*ensemble non-errant* du flot horocyclique, *i.e.* l'ensemble $\mathscr{E}$ des vecteurs de T^1S qui sont des points d'accumulation de leur propre orbite $(h^s u)$ quand $s \to \pm\infty$.

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble des vecteurs $v \in T^1S$ tels que $v^- \in \Lambda_\Gamma$. Plus précisément, on a alors la classification topologique suivante des orbites de (h^s), due à Hedlund [H] puis Dal'bo [D] :

- L'orbite d'un vecteur $v \in T^1S$ tel que $v^- \in \Lambda_{\mathrm{rad}}$ est dense dans $\mathscr{E}$.
- L'orbite d'un vecteur v tel que $v^- \in \Lambda_{\mathrm{p}}$ est périodique.
- L'orbite d'un vecteur v tel que $v^- \notin \Lambda_\Gamma$ est errante, fermée et non-compacte dans T^1S.

Ceci justifie la décomposition de l'ensemble non errant du flot horocyclique en l'union disjointe

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\mathrm{p}} \sqcup \mathscr{E}_{\mathrm{rad}} .$$

Remarquons que les orbites périodiques n'apparaissent que lorsque la surface a au moins un cusp, *i.e.* quand $\Lambda_{\mathrm{p}} \neq \varnothing$; les orbites fermées non compactes n'apparaissent elles que lorsque Λ_Γ est strictement inclus dans $\partial\mathbb{H}$.

Depuis les travaux de Bowen-Marcus [Bo-M] sur les variétés compactes ou convexe-cocompactes, Burger [Bu] sur les surfaces hyperboliques convexe-cocompactes et finalement Roblin [Ro] dans la généralité des espaces $CAT(-1)$ géométriquement finis, la classification des mesures invariantes ergodiques par le flot horocyclique est bien connue.

THÉORÈME 4.1. — *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie. Les mesures invariantes par le flot horocyclique (h^s) et ergodiques sont de l'un des trois types suivants :*

- *Une unique mesure m de support $\mathscr{E}$ telle que $m(\mathscr{E}_{\mathrm{p}}) = 0$.*
- *Les probabilités invariantes obtenues par intégration sur les orbites périodiques de (h^s).*
- *Les mesures (infinies) obtenues par intégration sur les orbites fermées non périodiques de (h^s).*

De plus, la mesure m est finie si et seulement si la surface S est compacte ou de volume fini.

En particulier, sur une surface géométriquement finie de volume infini, la mesure de Liouville λ n'est pas ergodique (voir [Ba-L] ou [K] pour des exemples de surfaces de volume infini où elle l'est), mais nous disposons tout de même d'une mesure invariante ergodique m intéressante.

Lorsque cette mesure m est finie, c'est la mesure de Liouville λ, et les orbites non périodiques de (h^s) s'équidistribuent vers m (théorèmes 2.2 et 2.2'). En revanche, lorsqu'elle est infinie, un des seuls résultats connus jusqu'ici, corollaire des travaux de Ratner [R] était que pour toute fonction continue à support compact $\psi : T^1S \to \mathbb{R}$ et pour tout vecteur $u \in T^1S$ non périodique, on a

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \psi \circ h^s(u)\, ds \longrightarrow 0 \quad \text{quand } r \to +\infty . \tag{5}$$

(Mentionnons également un résultat partiel de [Bu] d'équidistribution en moyenne de Césaro sur certaines surfaces hyperboliques convexe-cocompactes.)

Dans [S3], nous prouvons le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2. — *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie. Soit $u \in T^1S$ un vecteur non errant et non périodique du flot horocyclique. Alors pour toutes fonctions φ et ψ continues à support compact sur T^1S, avec $\int_{T^1S} \psi\, dm \neq 0$, on a*

$$\frac{\int_{-r}^{r} \varphi \circ h^s(u)\, ds}{\int_{-r}^{r} \psi \circ h^s(u)\, ds} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \varphi\, dm}{\int_{T^1S} \psi\, dm} \quad \textit{quand} \quad t \to +\infty .$$

REMARQUE 4.3. — C'est un théorème d'équidistribution quotient du type du théorème ergodique quotient de Hopf, mais on ne peut pas espérer mieux vu (5).

4.2. La stratégie de la preuve : d'autres propriétés d'équidistribution

L'unique mesure invariante par (h^s) et ergodique à support dans $\mathcal{E}$ telle que $m(\mathcal{E}_p) = 0$ est en fait le produit $m = \mu^0 \circ ds$ de l'unique mesure transverse invariante ergodique $\mu^0 = \{\mu^0_T\}$ à support dans $\mathcal{E}$ et telle que $\mu^0_T(T \cap \mathcal{E}_p) = 0$ pour toute transversale T par la mesure ds le long du flot.

De même qu'au paragraphe 3.2, il est naturel de considérer la mesure d'équilibre correspondante, associée à l'application höldérienne $f \equiv 0$. C'est le produit $\mu^0 \circ \mu$ de la mesure transverse μ^0 par un système de Haar noté μ^{ps}. Cette mesure est la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, encore appelée mesure de Bowen-Margulis ou *mesure de Patterson-Sullivan*, et notée m^{ps}. (Notons aussi que lorsque S est compacte ou de volume fini, cette mesure coïncide avec m et donc aussi avec la mesure de Liouville λ).

Lorsque S est géométriquement finie, cette mesure m^{ps} est finie, on la supposera donc normalisée en une probabilité.

On considère alors les moyennes suivantes sur les feuilles

$$M^{ps}_{r,u}(\psi) := \frac{1}{\mu_{H^+}(\{h^s u, |s| < r\})} \int_{\{h^s u, |s|<r\}} \psi(v)\, d\mu^{ps}_{H^+}(v) .$$

Dans [S3], nous prouvons (en courbure variable) le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4. — *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie, et $u \in \mathscr{E}_{\mathrm{rad}}$. Alors les mesures $(M^{ps}_{r,u})_{r>0}$ convergent faiblement vers m^{ps} quand $r \to +\infty$.*

Ce théorème repose de façon cruciale sur le théorème 4.1 et sur le résultat ci-dessous, démontré dans [S2] (en courbure variable et dimension quelconque) :

THÉORÈME 4.5. — *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie et $u \in \mathscr{E}_{\mathrm{rad}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_{\varepsilon,u} \subset T^1S$ et un réel $r_0 > 0$ tels que pour tout $r \geqslant r_0$, on ait*

$$M^{ps}_{r,u}(K_{\varepsilon,u}) \geqslant 1 - \varepsilon\,.$$

Ce résultat est assez technique, et nous renvoyons le lecteur intéressé à [S2] pour une preuve détaillée.

Donnons maintenant l'idée de la démonstration du théorème 4.4. D'après le théorème 4.5, toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(M^{ps}_{r,u})_{r>0}$ sont des mesures de probabilité. En décomposant ces mesures dans une boîte en le produit d'une mesure transverse par le système de Haar $\mu^{ps}_{H^+}$ (comme dans la démonstration du théorème 3.2), on remarque que leurs valeurs d'adhérence sont forcément de la forme $\nu \circ \mu^{ps}_{H^+}$, où $\nu = \{\nu_T\}$ est une mesure transverse invariante par holonomie à support dans $\mathscr{E}$. La formule (2), toujours valable ici, permet de montrer que pour toute transversale T, on a $\nu_T(\mathscr{E}_{\mathrm{p}} \cap T) = 0$, et le théorème 4.1 permet de conclure que toutes les valeurs d'adhérence de $(M^{ps}_{r,u})_{r>0}$ sont égales à m^{ps}. Ceci démontre que $(M^{ps}_{r,u})_{r>0}$ converge vers m^{ps}.

Pour établir le théorème 4.2, nous nous servons du théorème 4.4. On fixe un compact K de T^1S tel que $m(K) > 0$, et on considère les mesures de probabilité sur K définies pour toute fonction continue $\varphi : T^1S \to \mathbb{R}$ à support dans K par

$$M^{K}_{r,u}(\varphi) := \frac{\int_{-r}^{r} \varphi \circ h^s(u)\, ds}{\int_{-r}^{r} \mathbf{1}_K(h^s u)\, ds}\,.$$

Sans perdre en généralité, on peut supposer que le support de φ est inclus dans une boîte $B = T \times P$, elle-même incluse dans K. De la même manière que dans la démonstration du théorème 3.2, à un terme qui tend vers 0 près, on écrit les moyennes $M^{K}_{r,u}(\varphi)$ sous la forme

$$\nu_T^{K,r} \circ ds(\varphi) := \frac{1}{\int_{-r}^{r} \mathbf{1}_K(h^s u)\, ds} \sum_{w \in T \cap \{h^s u, |s|<r\}} \int_{\{s \mid h^s w \in P_w\}} \varphi(h^s w)\, ds\,.$$

Or (toujours à un terme qui tend vers 0 près), les moyennes $M^{ps}_{r,u}(\varphi)$ se décomposent sous la forme

$$\nu_T^r \circ \mu_{H^+}^{ps}(\varphi) := \frac{1}{\mu_{H^+}^{ps}(\{h^s u, |s| < r\})} \sum_{w \in T \cap \{h^s u, |s| < r\}} \int_{P_w} \varphi(v)\, d\mu_{H^+}^{ps}(v)\,.$$

Il existe donc pour tout $r > 0$ une constante $c(r,K) > 0$ telle que pour toute transversale T au feuilletage horocyclique incluse dans K, on ait

$$\nu_T^{K,r} = c(r,K)\, \nu_T^r\,.$$

Le fait que $M_{r,u}^{ps}$ converge faiblement vers m^{ps} implique alors que ν_T^r converge vers l'unique mesure transverse invariante ergodique $\mu^0 = \{\mu_T^0\}$ à support dans $\mathscr{E}$ telle que $\mu_T^0(T \cap \mathscr{E}_{\mathrm{p}}) = 0$. Les valeurs d'adhérence de $M_{r,u}^K$ sont des probabilités à support dans K, donc les valeurs d'adhérence de la suite de mesures transverses $\nu^{K,r} = \{\nu_T^{K,r}\}$ sur K sont des mesures transverses non nulles. Ceci implique que les valeurs d'adhérence de la suite $(c(r,K))$ quand $r \to +\infty$ sont toutes strictement positives et finies. On en déduit aisément que la suite $(M_{r,u}^K)_{r>0}$ converge vers un multiple de la mesure $\mu^0 \circ ds$ restreinte à K. Le théorème 4.2 en découle lorsqu'on considère une suite croissante de compacts (K_n) tels que $\cup_n K_n = T^1 S$.

Bibliographie

[B1] Babillot, Martine *On the mixing property for hyperbolic systems* (2002) Israel J. Math. 129, 61-76.

[B2] Babillot, Martine *Points entiers et groupes discrets : de l'analyse aux systèmes dynamiques*, Panoramas et synthèses **13**, Paris, SMF (2002).

[Ba-L] Babillot, Martine ; Ledrappier, François *Geodesic paths and Horocycle Flow on Abelian Covers*, Proc. International Colloquium on Lie groups and Ergodic theory, Tata Institute of Fundamental Research, Narosa Publishing house, New Delhi (1998), 1-32.

[Be-M] Bekka, M. Bachir ; Mayer, Matthias *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces.* London Mathematical Society Lecture Note Series **269** Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Bo-M] Bowen, Rufus ; Marcus, Brian *Unique ergodicity for horocycle foliations.* Israel J. Math. **26** (1977), no. 1, 43–67.

[Bu] Burger, Marc *Horocycle flow on geometrically finite surfaces*, Duke Math. J. 61, n.3, (1990) 779 803.

[C] Coudène, Yves *Gibbs measures on negatively curved manifolds.* J. Dynam. Control Systems **9** no. 1 (2003), 89-101.

[D] Dal'bo, Françoise *Topologie du feuilletage fortement stable.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 3, 981–993.

[Da1] Dani, S. G. *Invariant measures of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces.* Invent. Math. **47** (1978), no. 2, 101–138.

[Da2] Dani, S.G. *On uniformly distributed orbits of certain horocycle flows*, Ergodic Theory Dyn. Systems **2** (1982), 139-158.

[Da S] Dani, S. G. ; Smillie, John *Uniform distribution of horocycle orbits for Fuchsian groups.* Duke Math. J. **51** (1984), no. 1, 185–194.

[F] Furstenberg, Harry *The unique ergodicity of the horocycle flow.* Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn., 1972 ; in honor of Gustav Arnold Hedlund), pp. 95–115. Lecture Notes in Math., Vol. 318, Springer, Berlin, 1973.

[H] Hedlund, Gustav Arnold *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. 2 (1936), 530-542.

[K] KAIMANOVICH, Vadim A. *Ergodic properties of the horocycle flow and classification of Fuchsian groups*, J. Dynam. Control Systems **6**, no. 1, 21-56 (2000).

[L] LEDRAPPIER, François *Structure au bord des variétés à courbure négative*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble (1994-95), 93-118.

[P] PETERSEN, Karl *Ergodic Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **2**, Cambridge University Press, Cambridge (1983).

[R] RATNER, Marina *Raghunathan's conjectures for* SL(2,$\mathbb{R}$). Israel J. Math. **80** (1992), no. 1-2, 1–31.

[Ro] ROBLIN, Thomas *Ergodicité et unique ergodicité du feuilletage horosphérique, mélange du flot géodésique et équidistributions diverses dans les groupes discrets en courbure négative.* (2001) Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes.

[S1] SCHAPIRA, Barbara *On quasi-invariant transverse measures for the horospherical foliation of a negatively curved manifold* (2002) A paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems.

[S2] SCHAPIRA, Barbara *Lemme de l'ombre et non divergence des horocycles d'une variété géométriquement finie* (mai 2003) Prépublication du MAPMO.

[S3] SCHAPIRA, Barbara *Équidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie* (juillet 2003) Prépublication du MAPMO.

[S4] SCHAPIRA, Barbara *Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative*, Thèse de l'Université d'Orléans (2003).

[Su1] SULLIVAN, Dennis *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions* Publ. Math. I.H.E.S **50** (1979) 171-202.

[Su2] SULLIVAN, Dennis *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math., (1984) 259-277.

Barbara SCHAPIRA
Laboratoire de Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris Sud,
91405 ORSAY Cedex (France)

Barbara.Schapira@math.u-psud.fr